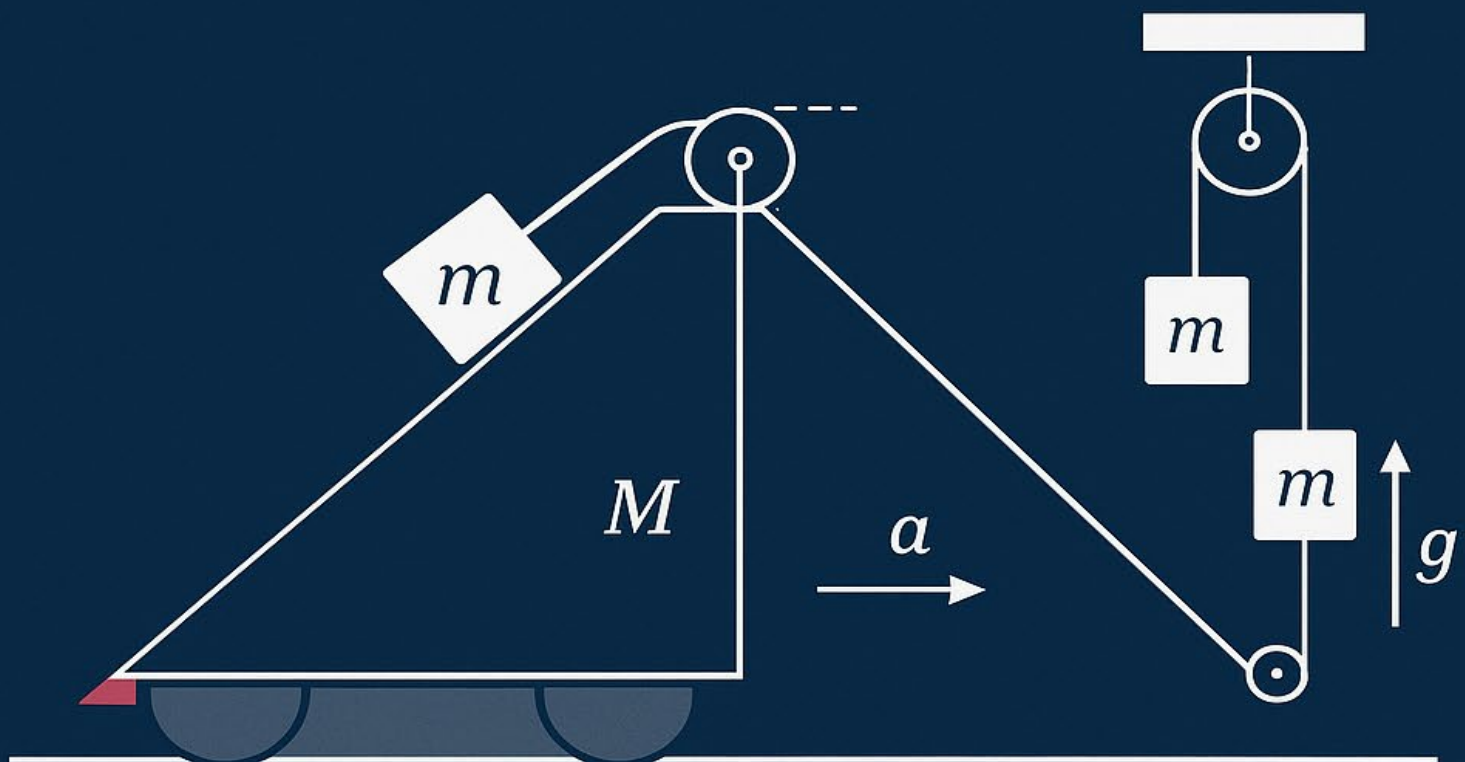


LEIS DE NEWTON E VÍNCULO

PARA TURMA ITA E IME

Prof. Laerte



Prof. Laerte

1. Força

Se você chutar uma bola com pouca força, ela rolará pelo chão. Se você puxar uma maçaneta, a porta abrirá. De muitos anos de experiência, você sabe que é necessário algum tipo de força para mover estes objetos. Nosso objetivo é compreender por que o movimento ocorre, e a constatação de que força e movimento estão relacionados é um bom ponto de partida.

Os dois principais assuntos deste capítulo são:

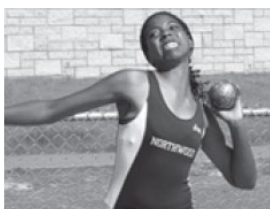
- O que é uma força?
- Qual é a relação entre força e movimento?

Começaremos com o primeiro tópico na tabela abaixo.

O que é uma força?

Uma força é um empurrão ou um puxão.

A ideia comum que temos de uma força é que ela é um empurrão ou um puxão. Iremos aperfeiçoar esta ideia mais adiante, todavia ela é apropriada agora como ponto de partida. Note nossa escolha cuidadosa das palavras: nos referimos a “uma força”, em vez de, simplesmente, a “força”. Desejamos conceber uma força como um caso muito específico de ação, de modo que podemos falar a respeito de uma única força ou, talvez, sobre duas ou três forças individuais que podem ser claramente diferenciadas entre si. Daí a ideia concreta de “uma força” como uma ação sobre um objeto.



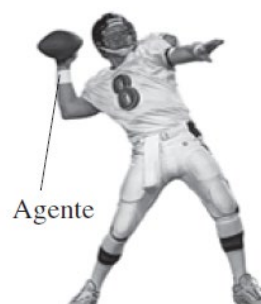
Uma força representa uma ação sobre um objeto.

Está implícito em nosso conceito de força que uma força é exercida sobre um objeto. Em outras palavras, empurrões e puxões são aplicados em algo — um objeto. Do ponto de vista do objeto, uma força foi exercida sobre ele. Forças não existem isoladas dos objetos que as experimentam.



Uma força requer um agente.

Cada força possui um agente, algo que atua ou exerce poder, isto é, uma força possui uma causa específica e identificável. Quando você arremessa uma bola, o agente ou a causa da força é sua mão, enquanto fica em contato com a bola. Se uma determinada força está sendo exercida sobre um objeto, deve-se ser capaz de identificar a causa específica (i.e., o agente) para ela. Alternativamente, uma força não é exercida sobre um objeto a menos que se possa especificar uma causa ou agente. Embora esta ideia possa parecer expressar o óbvio, você verá que ela será uma ferramenta poderosa para evitar algumas concepções errôneas comuns acerca do que seja e do que não seja uma força.



Uma força é um vetor.

Se você empurrar um objeto, pode fazê-lo suave ou fortemente. De forma análoga, você poderia empurrá-lo para a esquerda ou para a direita, para cima ou para baixo. Para qualificar um empurrão, você precisa especificar um módulo e uma orientação. Não surpreende o fato de uma força ser uma grandeza vetorial. O símbolo geral de uma força é $\vec{F}$. O “tamanho” ou intensidade de uma força é o seu módulo F .

Uma força pode ser de contato ...

Existem dois tipos básicos de forças, dependendo se o agente toca ou não o objeto. Forças de contato são aquelas exercidas sobre um corpo através do contato com algum ponto do mesmo. O bastão deve tocar na bola a fim de rebatê-la. Uma corda deve ser amarrada a um objeto para poder puxá-lo. A maioria das forças que abordaremos são forças de contato.



... ou de ação a distância.

Forças de ação a distância são aquelas exercidas sobre um corpo sem haver contato físico. A força magnética é um exemplo de força de ação a distância. Sem dúvida você já viu um ímã colocado acima de um clipe conseguir erguê-lo. Uma xícara de café solta de sua mão é puxada pela Terra pela força de ação a distância da gravidade.



Vamos resumir estas ideias como nossa definição de força:

- Uma força é um empurrão ou um puxão sobre um objeto.
- Qualquer força é um vetor. Ela possui módulo e orientação.
- Qualquer força requer um agente. Algo que empurre ou puxe.
- Qualquer força é de contato ou de ação a distância. A gravidade é a única força de ação a distância que abordaremos até bem mais adiante no livro.

NOTA: No modelo de partícula, os objetos não podem exercer forças sobre si mesmos. Uma força sobre um objeto terá um agente ou uma causa externa ao objeto. Agora, certamente existem objetos que possuem forças internas (pense nas forças dentro do motor de seu carro!), porém o modelo de partícula já não é válido se você precisa levar em conta forças internas. Se você for considerar seu carro como uma partícula e se concentrar no movimento global dele como um todo, este movimento será uma consequência das forças externas exercidas sobre o carro.

Vetores força

Podemos usar um diagrama simples para visualizar como as forças externas são exercidas sobre os corpos. Uma vez que estamos usando o modelo de partícula, no qual os objetos são considerados como pontos, o processo de desenhar um vetor força é direto. Eis como:

Desenhando vetores força

- 1 Represente o objeto como uma partícula.
- 2 Localize a cauda do vetor força sobre a partícula.
- 3 Desenhe o vetor força como uma seta com a orientação apropriada e com um comprimento proporcional à intensidade da força.
- 4 Denote o vetor adequadamente.

2. Tipos de força

Força peso ($\vec{P}$)

A força peso é o resultado da atração gravitacional entre a massa da Terra e a massa dos corpos. Newton verificou que massa atrai massa, e é isso que gera, por exemplo, a queda dos corpos e mantém a Lua em órbita ao redor do nosso planeta. Todo corpo que possui massa está sujeito a uma força que chamamos de força peso; no caso do sistema Terra-Lua, ela aponta para o centro da Terra (direção vertical, sentido para baixo independentemente da sua localidade).



Geralmente, entende-se a grandeza **massa** como correspondente à quantidade de matéria de um corpo. Na Física, contudo, apesar de a grandeza ser a mesma, dizemos que a massa representa a capacidade que o corpo tem de permanecer em seu estado de movimento.

Se for de nosso interesse, calcularemos a intensidade do vetor força peso de um corpo de massa m quando submetido a uma região da Terra de intensidade do campo gravitacional (aceleração da gravidade) g por:

$$P = m \cdot g$$

A chamada intensidade do campo gravitacional terrestre, ou **aceleração da gravidade**, representada pelo símbolo **g**, é a capacidade que a Terra tem de atrair um corpo qualquer para o seu centro, e depende das características físicas do nosso planeta (raio e massa). Essa grandeza também pode ser entendida como a **aceleração que um corpo adquire quando abandonado em queda livre**.

Na superfície de nosso planeta, o valor aproximado de **g** é $9,8 \text{ m/s}^2$, que costumamos arredondar para 10 m/s^2 .

Se utilizarmos nessa expressão apenas unidades de medição do SI, ou seja, a massa em quilogramas (kg) e a aceleração da gravidade em metros por segundo ao quadrado (m/s^2), a unidade de medição da força peso será em: $\frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}^2}$

No entanto, em homenagem ao grande responsável pela maioria dos estudos aqui apresentados, temos o hábito de chamar essa unidade de newton (N), que é a **unidade padrão do SI para a medição de qualquer tipo de força**.

O **dinamômetro** é o instrumento utilizado para a medição de forças.

Força normal

Se você sentar em um colchão de molas, estas serão comprimidas e, em consequência disso, exercerão uma força orientada para cima sobre você. Molas mais duras sofreriam menor compressão, mas ainda assim exerceriam forças orientadas para cima. Pode ser que a compressão de molas extremamente duras seja mensurável apenas por instrumentos sensíveis. Apesar disso, as molas seriam comprimidas ainda que ligeiramente e exerceriam uma força orientada para cima sobre você.

A figura 1 mostra um objeto estacionário sobre o tampo duro de uma mesa. A mesa pode não flexionar ou encurvar visivelmente, mas – da mesma forma como você fez com o colchão de molas – o objeto comprime as molas atômicas da mesa. O tamanho da compressão é muito pequeno, mas não é nulo. Como consequência, as molas atômicas comprimidas empurram para cima o objeto. Dizemos que “a mesa” exerce uma força para cima, mas é importante que se compreenda que o empurrão é, de fato, realizado pelas molas atômicas. Analogamente, um objeto em repouso sobre o solo comprime as molas atômicas que o mantêm íntegro e, consequentemente, o solo empurra o objeto para cima.

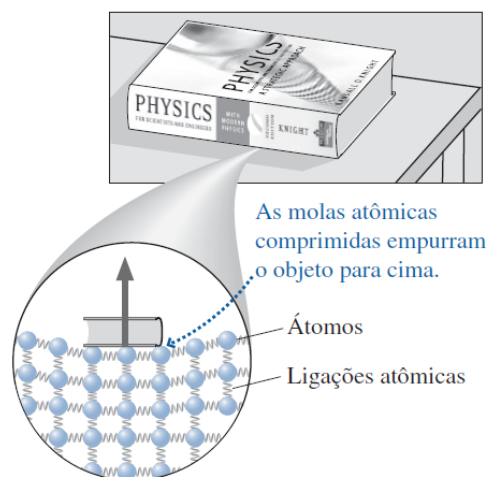


Figura 1

Podemos ampliar esta ideia. Suponha que você encoste sua mão sobre uma parede e a empurre, como ilustrado na figura 2. A parede exercerá uma força sobre sua mão? Quando você empurra, comprime as molas atômicas da parede e, como consequência, elas empurram sua mão de volta. Logo, a resposta é sim, a parede realmente exerce uma força sobre você.

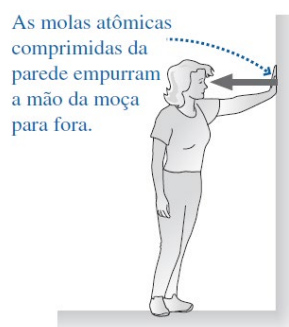


Figura 2

A força exercida pelo tampo da mesa é vertical; a força que a parede exerce é horizontal. Em todos os casos, a força exercida sobre um objeto que pressiona uma superfície tem uma direção perpendicular à superfície. Os matemáticos se referem a uma reta que é perpendicular a uma superfície como sendo normal a esta. Mantendo esta terminologia, definimos a força normal como aquela exercida por uma superfície (o agente) contra um objeto que a está pressionando. O símbolo para a força normal será $\vec{n}$ ou $\vec{N}$.

Não estamos empregando a palavra normal para significar de uma forma “comum” ou para diferenciá-la de uma “força anormal”. Uma superfície exerce uma força perpendicular (i.e., normal) a si mesma quando as molas atômicas empurram para fora. A figura 3 mostra um objeto sobre uma superfície

plana inclinada, uma situação inteiramente comum. Note que a força normal $\vec{n}$ é perpendicular à superfície.

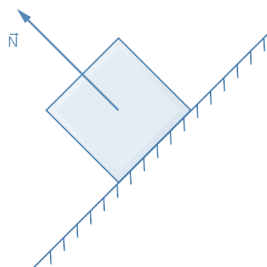


Figura 3

Gastamos um bocadinho de tempo descrevendo a força normal porque muitas pessoas levam tempo para entendê-la. **A força normal é uma força real que surge da compressão real das ligações atômicas.** Ela é, em essência, uma força elástica de uma mola, mas exercida por um número enorme de molas microscópicas agindo juntas. A força normal é responsável pela “solidez” dos corpos sólidos. É ela que impede você de atravessar direto através da cadeira onde está sentado e é ela que causa dor de que o machuca quando você bate sua cabeça em uma porta. Sua cabeça pode, então, dizer-lhe que a força exercida sobre ela pela porta é bem real!

Força de tensão ou tração ($\vec{T}$)

Quando um barbante, uma corda ou um arame puxa um objeto, ele exerce uma força de contato que chamamos de **força de tensão**, representada pela letra maiúscula $\vec{T}$. A orientação da força de tensão é a mesma do barbante ou da corda, como se pode ver na figura 4. A referência usual à “tensão” em um barbante é uma maneira informal de expressar o que se denota por T , o tamanho ou módulo da força de tensão.



Figura 4

Se usássemos um microscópio muito poderoso para olhar o interior de uma corda, “veríamos” que ela é formada por átomos mantidos juntos por meio de ligações atômicas. As ligações atômicas não são conexões rígidas entre átomos. Elas se parecem mais com minúsculas molas mantendo os átomos juntos, como na figura 5. Puxando-se as extremidades de um barbante ou de

uma corda, estica-se ligeiramente as molas atômicas. A tensão dentro da corda e a força de tensão experimentada por um objeto em contato com uma das extremidades da corda são, de fato, a força resultante exercida por bilhões e bilhões de molas microscópicas.

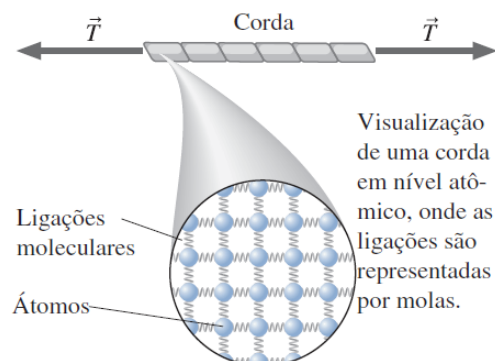


Figura 5: Um modelo atômico da tensão.

Esta visão da tensão em escala atômica introduz uma nova ideia: a de um **modelo atômico microscópico** para a compreensão do comportamento e das propriedades dos objetos macroscópicos. Trata-se de um modelo porque átomos e ligações atômicas não são, realmente, pequenas bolas e molas. Estamos usando conceitos macroscópicos — bolas e molas — para entender fenômenos em escala atômica que não podemos ver ou sentir diretamente. Este é um bom modelo para explicar as propriedades elásticas dos materiais, mas ele não seria necessariamente um bom modelo para explicar outros fenômenos. Com frequência usaremos modelos atômicos para obter uma compreensão mais profunda do que observamos.

A figura 6 mostra um cofre pesado suspenso por uma corda, tencionando-a. Se você cortasse a corda, o cofre e a porção inferior da corda cairiam. Logo, deve haver uma força *no interior* da corda com a qual a parte superior da corda puxa para cima a parte inferior da mesma e a impede de cair.

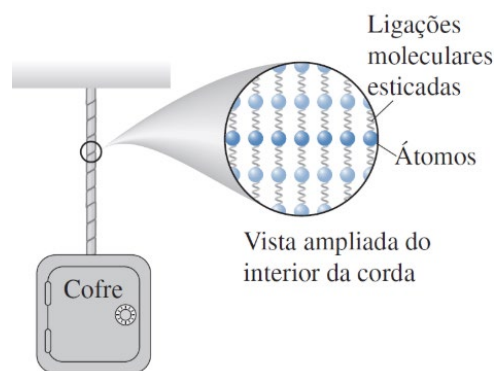


Figura 6: cofre pesado suspenso.

Apresentamos um modelo atômico em que a tensão se deve ao esticamento de ligações moleculares do tipo mola, como se fossem minúsculas molas, no interior da corda. Molas esticadas exercem forças que puxam, e a força conjunta de bilhões de molas moleculares esticadas dentro da corda constitui o que chamamos de *tensão*.

Um aspecto importante da tensão é que ela puxa igualmente *nos dois sentidos*. A figura 7 representa a ampliação de uma seção transversal extremamente fina da corda.

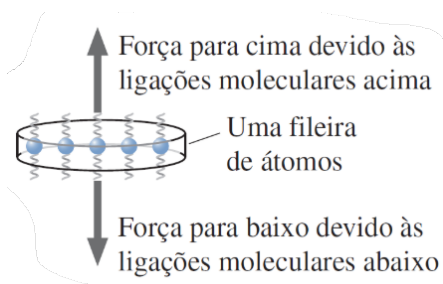
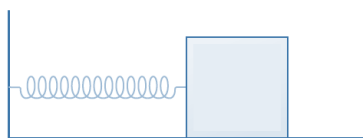


Figura 7: Forças de tensão no interior da corda

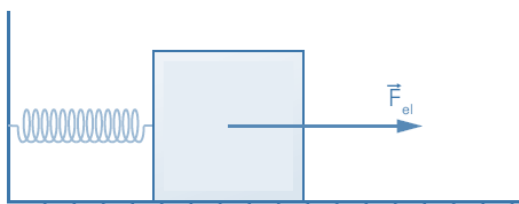
Força elástica ($\vec{F}_{el}$)

Comumente chamamos de superfície restauradora aquela que tem a capacidade de retornar ao seu estado original depois de ter sido submetida a algum tipo de deformação. Exemplos claros são as molas, que podem ser comprimidas ou distendidas e têm, depois disso, o ímpeto de restabelecer seu comprimento natural. A força elástica é aquela que determinados corpos podem receber quando a superfície restauradora tenta retornar ao tamanho original. Admita o seguinte exemplo.

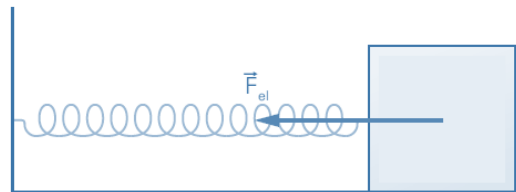
Imagine um pequeno corpo anexado, de alguma maneira, a uma mola relaxada.



Agora, suponha que essa mola tenha sido comprimida por algum fator externo. Surge então no corpo uma força resultante da vontade espontânea da mola de retornar ao seu comprimento natural.



E se pensássemos na mesma mola e no mesmo corpo, mas agora em uma situação de distensão? Novamente surgiria no corpo uma força, mas agora em sentido oposto ao do exemplo anterior, no entanto seguindo a mesma lógica: na orientação que garante à mola seu ímpeto de restauração.



Verifica-se experimentalmente que a força elástica é proporcional à **deformação** à qual a mola está submetida. Ou seja, quanto mais deformada a mola está (comprimida ou distendida), mais força ela faz. Fisicamente, isso significa que, quanto mais deformada a mola estiver, mais difícil será continuar se deformando. Ou ainda que, quanto mais deformada a mola estiver, mais intensa será a magnitude da “vontade” que ela tem de retornar ao seu estado original.

Essa ideia é matematicamente expressa pela chamada lei de Hooke, a qual afirma que:

$$F_{el} = k \cdot x$$

em que k é a chamada **constante elástica**, uma característica da própria superfície restauradora e que mede a sua “dureza” — ou seja, quanto maior for a constante elástica, mais difícil será de deformar a mola. x é a **deformação** — ou seja, o quanto a mola aumentou ou diminuiu em relação ao tamanho original.

Força de empuxo



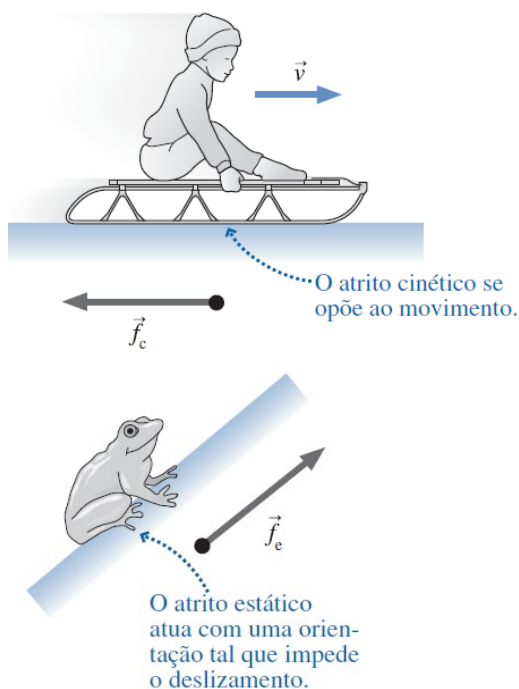
Durante a decolagem, um avião a jato obviamente é impulsionado para a frente por uma força. Da mesma forma ocorre com o foguete mostrado durante o lançamento na figura 8. Esta força, chamada de **empuxo**, ocorre quando o motor de um jato ou de um foguete expelle moléculas de gás em altas velocidades. O empuxo é uma força de contato, com os gases da exaustão correspondendo ao agente que empurra o motor. Por ora, abordaremos o empuxo como sendo uma força de

sentido contrário ao dos gases expelidos. Não existe um símbolo especial para o empuxo, de modo que o denotaremos por $\vec{F}_{\text{empuxo}}$.

Forças elétricas e magnéticas

A eletricidade e o magnetismo, como a gravidade, exercem forças de ação a distância. As forças elétricas e magnéticas são exercidas sobre partículas eletricamente carregadas. Por ora, não é relevante que as forças que mantêm juntas as moléculas — ligações moleculares — não sejam realmente como as de pequenas molas. Os átomos e as moléculas são constituídos de partículas carregadas — elétrons e prótons —, e o que chamamos de ligação molecular é realmente uma força elétrica entre tais partículas. Assim, quando dissermos que a força normal e a força de tensão devem-se a “molas atômicas” ou que o atrito se deve ao movimento de uns átomos sobre os outros, o que realmente estaremos querendo expressar é que estas forças, no nível mais fundamental, são, de fato, forças elétricas entre as partículas carregadas no interior dos átomos.

Força de atrito



Certamente você já observou que um objeto rolando ou escorregando, se não for empurrado ou propelido, desacelera até parar. Provavelmente você já descobriu que pode deslizar mais sobre uma camada de gelo do que sobre o asfalto. Você também sabe que a maioria dos objetos ficam parados sobre uma mesa, sem deslizar para fora dela, mesmo se a mesa não estiver perfeitamente nivelada. A força

responsável por este tipo de comportamento é o **atrito**. O símbolo para o atrito é a letra minúscula $\vec{f}$.

O atrito, como a força normal, é exercido por uma superfície. Mas enquanto a força normal é perpendicular à superfície, a força de atrito é sempre *tangente* à superfície. Ao nível microscópico, o atrito surge quando os átomos do objeto e da superfície movem-se uns em relação aos outros. Quanto mais rugosa for a superfície, mais estes átomos serão forçados a se aproximar e, como resultado, surgirá uma grande força de atrito. No próximo capítulo, desenvolveremos um modelo simples para o atrito que será suficiente para nossas necessidades. Por ora, é útil distinguir entre dois tipos de atrito:

- **O atrito cinético**, denotado por $\vec{f}_c$, aparece quando um objeto desliza ao longo de uma superfície. É uma força “oposta ao movimento”, o que significa que o vetor força de atrito $\vec{f}_c$ tem sentido oposto ao do vetor velocidade $\vec{v}$ (i.e., “o movimento”).
- **O atrito estático**, denotado por $\vec{f}_e$, é a força que mantém um objeto “grudado” sobre uma superfície e que o impede de se mover. Determinar a orientação de $\vec{f}_e$ é um pouco mais complicado do que encontrar a de $\vec{f}_c$. O atrito estático aponta no sentido oposto àquele em que o objeto se *movimentaria* se não existisse o atrito, ou seja, ele tem a orientação necessária para *impedir* a ocorrência do movimento.

Identificando forças

- **1. Identifique o objeto de interesse.** Trata-se do objeto cujo movimento você deseja estudar.
- **2. Faça um desenho da situação.** Mostre o objeto de interesse e todos os objetos — como cordas, molas ou superfícies — que estão em contato com ele.
- **3. Trace uma curva fechada ao redor do objeto de interesse.** Somente ele deve estar dentro da curva traçada; tudo mais deve ficar fora.
- **4. Localize cada ponto dos limites dessa curva em que outros objetos toquem o objeto de interesse.** Estes são os pontos onde as *forças de contato* são exercidas sobre os objetos.
- **5. Nomeie e coloque índices para as forças de contato exercidas sobre o objeto.** Existe pelo menos uma força em cada ponto de contato; podem existir mais de uma. Quando necessário, use

subscritos para diferenciar forças de um mesmo tipo.

- **6. Nomeie e use índices para as forças de ação a distância exercidas sobre o objeto.** Por ora, a única força de ação a distância é a força gravitacional.

3. Inércia: a primeira lei de Newton

As leis de Newton tratam da relação entre força e movimento em referenciais inerciais, ou seja, referenciais fixados em corpos em repouso ou com movimento retilíneo uniforme. A primeira pergunta a que elas procuram responder é: o que acontece com o movimento de um corpo livre da ação de qualquer força?

Podemos responder a essa pergunta em duas partes. A primeira trata do efeito da inexistência de forças sobre o corpo em repouso. A resposta é quase óbvia: *se nenhuma força é exercida sobre o corpo em repouso, ele continua em repouso*. A segunda parte trata do efeito da inexistência de forças sobre o corpo em movimento. A resposta, embora simples, não é óbvia: *se nenhuma força é exercida sobre o corpo em movimento, ele continua em movimento*. Mas que tipo de movimento? Como não há força sendo exercida sobre o corpo, a sua velocidade não aumenta, nem diminui, nem muda de direção. Portanto, o único movimento possível do corpo na ausência de qualquer força exercida sobre ele é o movimento retilíneo uniforme.

A primeira lei de Newton reúne ambas as respostas num só enunciado:

Um corpo permanece em repouso ou em movimento retilíneo uniforme se nenhuma força for exercida sobre ele.

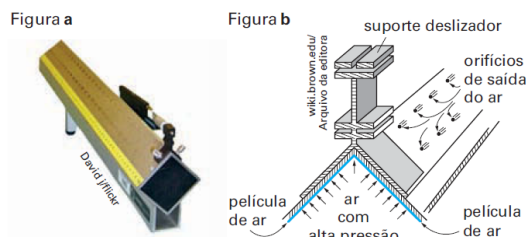
Em outras palavras, a primeira lei de Newton afirma que, livre da ação de forças, todo corpo fica como está: parado se estiver parado, em movimento se estiver em movimento (retilíneo uniforme). Daí essa lei ser chamada de princípio da inércia.

Vale ressaltar que *inércia*, na linguagem cotidiana, significa “falta de ação, de atividade, indolência, preguiça”, ou coisa semelhante. Por essa razão, costuma-se associar inércia a repouso, o que não corresponde exatamente ao sentido que a Física dá ao termo. O significado físico de inércia é mais abrangente: inércia é “ficar como está”, ou em repouso ou em movimento.

É importante lembrar, no entanto, que a ideia de o corpo se mover, mesmo que não exista nenhuma força sobre ele, sempre foi muito difícil de ser aceita. Aliás, durante séculos prevaleceu o ponto de vista contrário — de que só havia movimento se houvesse força — até o aparecimento dos trabalhos de Galileu.

Para manter o corpo em movimento, não há necessidade de força, como Galileu percebeu, mas, ao contrário, a existência de força é necessária para fazer o movimento cessar.

Existem equipamentos experimentais didáticos, como os trilhos de ar, que permitem observar concretamente a possibilidade do movimento contínuo e uniforme sem ação de força, até mesmo em sala de aula. A figura a, abaixo, mostra um trilho de ar, enquanto a figura b representa esquematicamente o seu funcionamento. Dentro de um tubo fechado se injeta ar, que sai com alta pressão por orifícios na superfície do trilho onde se apoiam suportes deslizadores — entre a base desses suportes e o trilho forma-se uma película de ar que reduz drasticamente o atrito entre eles: basta um leve empurrão para que o deslizador se desloque com velocidade praticamente constante.



Na época de Galileu não havia a possibilidade de observar experimentalmente o movimento de um móvel na ausência de forças, por isso ele recorreu a alguns argumentos muito interessantes que ficaram conhecidos como *experiências de pensamento*. Duas delas são descritas e ilustradas a seguir.

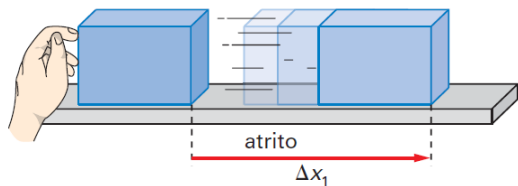
Experiência de pensamento I

Vamos supor que o bloco da figura abaixo esteja apoiado sobre um plano horizontal:

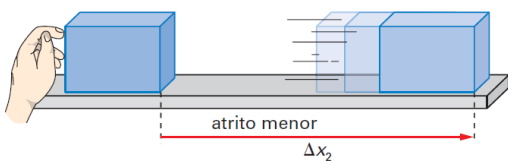


Se dermos um empurrão nesse bloco, ele se deslocará uma distância Δx_1 até parar, em decorrência do atrito entre o bloco e o plano (o estudo do atrito e de suas leis é apresentado mais a diante; por enquanto, vamos utilizar o termo atrito de forma

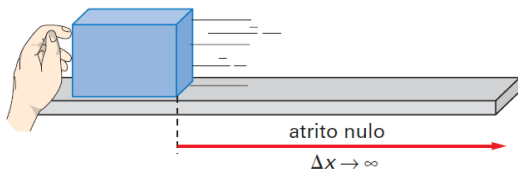
provisória, com o significado que lhe dá o *Dicionário eletrônico Houaiss*: “resistência que se opõe ao movimento relativo de dois corpos sólidos em contato”).



Se reduzirmos o atrito (lubrificando as superfícies, por exemplo), vamos observar que, para o mesmo empurrão, o bloco vai se deslocar Δx_2 , maior que Δx_1 .



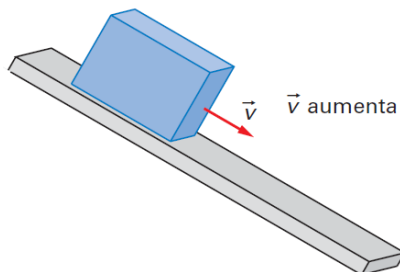
É fácil imaginar que, à medida que o atrito diminuir, as distâncias percorridas serão cada vez maiores. Numa situação ideal, em que o atrito fosse nulo e o plano infinito, o bloco percorreria uma distância Δx infinita, ou seja, se nenhuma força sobre o bloco, ele se manteria indefinidamente em movimento.



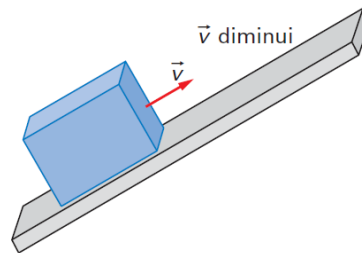
Experiência de pensamento II

Vamos supor que o bloco da figura abaixo seja lançado do alto do plano inclinado sem atrito.

À medida que o bloco desce o plano, sua velocidade aumenta.

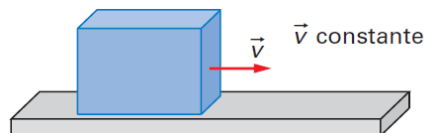


Se o bloco for lançado para cima, ao longo desse plano inclinado sem atrito, sua velocidade diminuirá.



O que deve acontecer com a velocidade desse bloco se ele for lançado ao longo de um plano horizontal sem atrito?

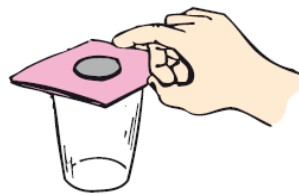
Se no movimento de descida a velocidade aumenta e no movimento de subida a velocidade diminui, pode-se concluir que no movimento horizontal a velocidade não deve aumentar nem diminuir, mas permanecer constante.



A partir de argumentos como esses, Galileu concluiu que um corpo em movimento tende a se manter indefinidamente em movimento com velocidade constante. A velocidade só irá se alterar se alguma força for exercida sobre o corpo.

Do mesmo modo, se o corpo estiver em repouso, permanecerá em repouso, a menos que alguma força seja exercida sobre ele.

EXEMPLO 1: Por que a moeda cairá dentro do copo quando uma força acelerar o cartão?



Resolução do Laerte:

A moeda está inicialmente em repouso sobre o cartão, que se encontra apoiado sobre o copo. Quando uma força é aplicada ao cartão, ele acelera rapidamente na direção horizontal. De acordo com a **1ª Lei de Newton**, também conhecida como **princípio da inércia**, um corpo tende a manter seu estado de repouso ou de movimento uniforme quando a força resultante sobre ele é nula.

Assim, quando o cartão é puxado ou acelerado, a moeda tende a permanecer praticamente no mesmo lugar, pois a força de atrito entre a moeda e o cartão é pequena e não consegue acompanhar o movimento acelerado do cartão. O cartão desliza para fora, deixando de sustentar a moeda.

Nesse instante, a única força significativa que atua verticalmente sobre a moeda é a **força peso**, orientada para baixo:

$$P = m \cdot g$$

Por causa da ação da gravidade, a moeda cai verticalmente. Como o copo está localizado exatamente abaixo da moeda, ela cai dentro dele.

Resumindo...

A moeda cai dentro do copo porque, ao ser acelerado, o cartão se desloca rapidamente, enquanto a moeda tende a permanecer em repouso devido à sua inércia. Quando o cartão sai debaixo dela, a moeda fica sob a ação da gravidade e cai no copo.

EXEMPLO 2: Por que um aumento lento e contínuo da força para baixo rompe o barbante acima da esfera de grande massa, enquanto um aumento súbito rompe o barbante de baixo?



Resolução do Laerte:

A) Aumento lento e contínuo da força

Quando a força para baixo é aplicada lentamente, a esfera consegue acompanhar o movimento do sistema quase sem sofrer uma aceleração significativa. Nesse caso, o barbante inferior transmite sua tensão para a esfera. Assim:

- A tensão no barbante inferior é aproximadamente igual à força aplicada:

$$T_{\text{inferior}} \approx F$$

- O barbante superior precisa sustentar tanto o peso da esfera quanto a tensão transmitida pelo barbante inferior:

$$T_{\text{superior}} = P + T_{\text{inferior}}$$

Como o peso da esfera é:

$$P = m \cdot g$$

temos:

$$T_{\text{superior}} = m \cdot g + F$$

Portanto, a tensão no barbante superior é maior que a tensão no barbante inferior. Com o aumento gradual da força, o barbante superior atinge primeiro seu limite de resistência e se rompe.

Ao puxar lentamente, rompe-se o barbante superior.

B) Aumento súbito da força

Quando a força é aplicada de forma muito rápida, a esfera, por possuir grande massa, tende a permanecer inicialmente em repouso devido à sua inércia.

Nesse curto intervalo de tempo, a esfera não consegue se mover o suficiente para aumentar significativamente a tensão no barbante superior. A força aplicada concentra-se principalmente no barbante inferior.

Assim, a tensão no barbante inferior pode atingir rapidamente seu limite de resistência:

$$T_{\text{inferior}} \approx F$$

Como a força é aplicada de maneira brusca, o barbante inferior se rompe antes que a esfera consiga transmitir um aumento considerável de tensão para o barbante superior.

Ao puxar subitamente, rompe-se o barbante inferior.

Conclusão

- Puxão lento: a esfera acompanha o movimento, e o barbante superior suporta o peso da esfera somado à força aplicada. Por isso, ele se rompe.
- Puxão súbito: a inércia da esfera impede que ela se mova imediatamente. A força fica concentrada no barbante inferior, que se rompe.

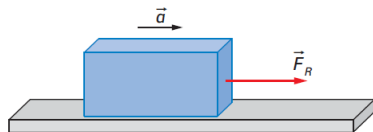
4. Força, massa e aceleração: a segunda lei de Newton

A primeira lei de Newton descreve o que ocorre com o corpo quando a resultante das forças exercidas sobre ele é nula.

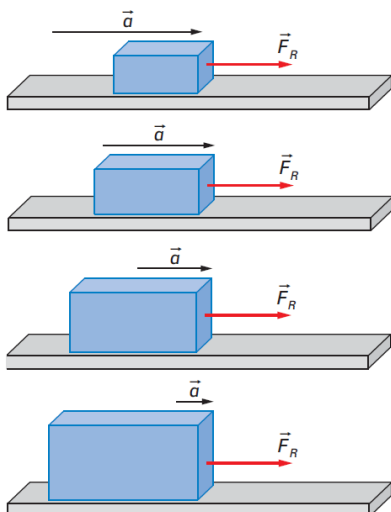
A segunda lei responde à outra questão possível: o que ocorre quando o corpo está sob a ação de força resultante não nula? É claro que, nessa situação, o corpo não pode estar nem parado nem em movimento retilíneo uniforme, pois esse é o caso da primeira lei, em que a resultante é nula. Se não pode estar parado nem com velocidade constante, o corpo certamente deve ter aceleração. Mas como é essa aceleração? Do que ela depende?

A resposta dada por Newton é que essa aceleração, $\vec{a}$, tem a mesma direção e sentido da

força resultante $\vec{F}_R$. Se a força resultante for constante, a aceleração também será. Veja a figura abaixo:



Mas do que depende o módulo da aceleração? Vamos supor que a mesma força resultante $\vec{F}_R$ seja aplicada a diferentes corpos em repouso. Pode-se afirmar que o módulo da aceleração é maior para os corpos que oferecem menor oposição ao movimento (têm menor inércia). E vice-versa: adquirem aceleração menor os corpos que oferecem maior oposição ao movimento (têm maior inércia). Veja as figuras abaixo. Sobre blocos do mesmo material, é exercida a mesma força resultante $\vec{F}_R$. À medida que as dimensões do bloco aumentam, a sua inércia também aumenta. Se a força resultante $\vec{F}_R$ for constante, quanto maior a inércia, menor a aceleração.



Se atribuirmos valor à inércia de cada bloco, esse resultado poderá ser expresso matematicamente pela razão entre os módulos de $\vec{F}_R$ e $\vec{a}$:

$$\frac{F_R}{a} = \text{valor da inércia do bloco} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F_R = \text{valor da inércia do bloco} \times a$$

Pode-se verificar experimentalmente que esse “valor da inércia do bloco” está diretamente relacionado à sua massa. Maior massa significa maior inércia; menor massa, menor inércia. Desse modo,

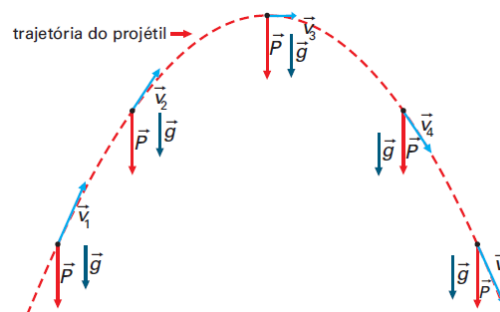
podemos substituir o “valor da inércia do bloco” na razão anterior por sua massa m . Assim, podemos escrever a expressão matemática da segunda lei de Newton na forma:

$$\vec{F}_R = m\vec{a}$$

A segunda lei de Newton é conhecida também como a lei fundamental da Dinâmica. **Dinâmica** é o estudo dos movimentos e de suas causas.

A partir da segunda lei de Newton, pode-se obter a primeira lei, pois um corpo em repouso ou em MRU tem aceleração nula e, portanto, a força resultante exercida sobre ele também é nula. No entanto, isso não significa que a primeira lei seja desnecessária. Ela é essencial, pois garante a validade das leis de Newton para a situação em estudo, ou seja, a segunda lei de Newton só é válida quando a primeira lei também for válida. Essa afirmação fica mais clara no quadro da próxima página, em que discutimos essa condição de validade para as três leis de Newton.

A notação vetorial da força resultante e da aceleração que aparece na expressão matemática da segunda lei de Newton torna explícito que ambas as grandezas são vetores de mesma direção e sentido. No entanto, isso não significa que essas grandezas tenham o mesmo sentido da velocidade do corpo. Veja a figura. No movimento livre de um projétil, a velocidade é sempre tangente à trajetória e, portanto, varia em módulo, direção e sentido. No entanto, a força resultante (o peso do projétil, $\vec{P}$, conceito que será apresentado no próximo capítulo) e a aceleração (aceleração da gravidade, $\vec{g}$) são constantes. Note que em nenhum instante a velocidade do projétil tem a mesma direção e sentido de $\vec{P}$ e $\vec{g}$.

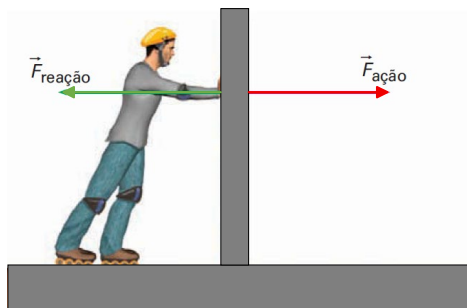


5. Ação e reação: a terceira lei de Newton

As duas primeiras leis de Newton relacionam força e movimento. A terceira lei procura

descrever força como o resultado da interação entre dois corpos.

Imagine a seguinte situação: um patinador está parado junto à parede. Para se movimentar, ele empurra a parede para a frente e desloca-se para trás. Quem exerceu força sobre quem? O patinador sobre a parede ou a parede sobre o patinador? A resposta é: um exerceu força sobre o outro. Não há como separar a ação do patinador da reação da parede, ou vice-versa. Enquanto o patinador empurra a parede, a parede empurra o patinador. São forças simultâneas que têm sempre o mesmo módulo e direção, mas sentidos opostos. Veja a figura abaixo:

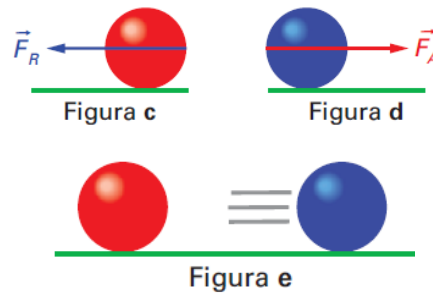
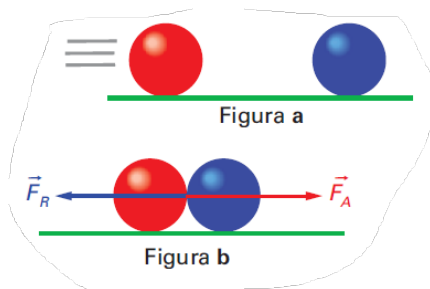


As forças são exercidas sempre aos pares; não existe ação sem reação. Essa é a ideia fundamental da terceira lei de Newton, que pode ser enunciada da seguinte maneira:

Se um corpo A exerce uma força sobre um corpo B , o corpo B exerce sobre A uma força de mesmo módulo e direção, mas de sentido contrário.

Esse enunciado equivale a outro, mais simples: “A toda ação corresponde uma reação igual e contrária”. Embora correto, esse enunciado simplificado não destaca o fato de a ação e a reação serem exercidas em corpos diferentes, o que o enunciado proposto torna evidente: a ação de A é exercida em B , a reação de B é exercida em A . É por essa razão que ação e reação, embora iguais e contrárias, nunca têm resultante nula — não é possível somá-las vetorialmente, pois elas não estão aplicadas ao mesmo corpo.

Veja a figura a seguir:



A esfera vermelha movimenta-se em direção à esfera azul em repouso (a) e com ela colide frontalmente (b). Nessa interação, a esfera vermelha exerce uma força $\vec{F}_A$ (ação) sobre a esfera azul, e esta exerce uma força $\vec{F}_R$ (reação) sobre a esfera vermelha. Essas forças não se equilibram porque $\vec{F}_R$ é aplicada na esfera vermelha (c), enquanto $\vec{F}_A$ é aplicada na esfera azul (d). Em condições ideais, se as esferas tiverem massas iguais, depois da interação, a esfera vermelha parará e a esfera azul passará a se movimentar com a mesma velocidade da esfera vermelha (e).

A terceira lei de Newton completa o conjunto de leis que estabelece as bases das relações entre força e movimento para referenciais fixados em sistemas em repouso ou em movimento retilíneo uniforme (referenciais inerciais).

EXEMPLO 3: Uma partícula de massa 0,50 kg realiza um movimento retilíneo uniformemente variado. Num percurso de 4,0 m, sua velocidade varia de 3,0 m/s a 5,0 m/s. Qual é o módulo da força resultante que age sobre a partícula?

Solução:

Utilizando a equação de Torricelli, podemos determinar a aceleração escalar α :

$$\begin{aligned} v_f^2 &= v_0^2 + 2\alpha\Delta s \Rightarrow \\ (5,0)^2 &= (3,0)^2 + 2\alpha \cdot 4,0 \Rightarrow \\ \alpha &= 2,0 \text{ m/s}^2 \end{aligned}$$

Sendo o movimento retilíneo, resulta: $a = |\alpha| = 2,0 \text{ m/s}^2$

Pela equação fundamental da Dinâmica calculamos o módulo da força resultante:

$$F_R = ma \Rightarrow F_R = 0,50 \cdot 2,0 \Rightarrow \boxed{F_R = 1,0 \text{ N}}$$

EXEMPLO 4: Na figura abaixo, temos uma maçã sobre uma mesa.

- Represente todas as forças que agem sobre a maçã.
- Onde estão aplicadas as correspondentes reações?

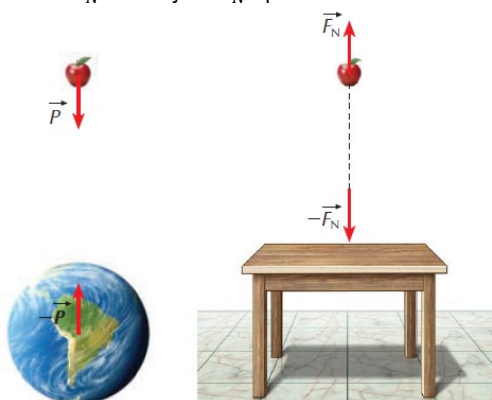


Solução:

a) Sobre a maçã agem o peso $\vec{P}$ e a força normal $\vec{F}_N$.



b) A reação do peso $\vec{P}$ da maçã é a força $-\vec{P}$ aplicada no centro da Terra. A reação da força normal $\vec{F}_N$ é a força $-\vec{F}_N$ aplicada na mesa:



Exercícios - Parte 1

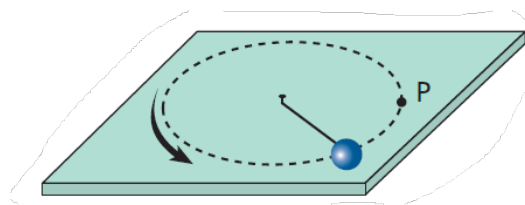
1. Indique a alternativa que está em desacordo com o Princípio da Inércia.

- a) A velocidade vetorial de uma partícula só pode ser variada se esta estiver sob a ação de uma força resultante não-nula.
- b) Se a resultante das forças que agem em uma partícula é nula, dois estados cinmáticos são possíveis: repouso ou movimento retilíneo e uniforme.
- c) Uma partícula livre da ação de uma força externa resultante é incapaz de vencer suas tendências inerciais.

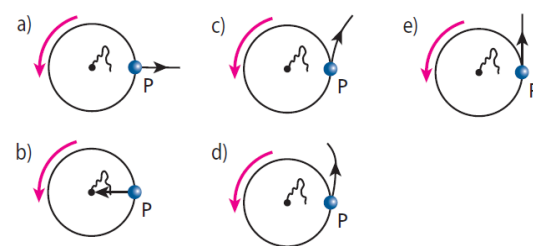
d) Numa partícula em movimento circular e uniforme, a resultante das forças externas não pode ser nula.

e) Uma partícula pode ter movimento acelerado sob força resultante nula.

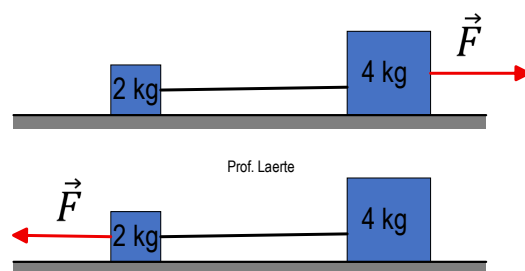
2. (Cesgranrio-RJ) Uma bolinha descreve uma trajetória circular sobre uma mesa horizontal sem atrito, presa a um prego por um cordão (figura seguinte).



Quando a bolinha passa pelo ponto P, o cordão que a prende ao prego arrebenta. A trajetória que a bolinha então descreve sobre a mesa é:



3. (UFRJ) Dois blocos de massa igual a 4 kg e 2 kg, respectivamente, estão presos entre si por um fio inextensível e de massa desprezível. Deseja-se puxar o conjunto por meio de uma força $\vec{F}$ cujo módulo é igual a 3 N sobre uma mesa horizontal e sem atrito. O fio é fraco e corre o risco de romper-se.



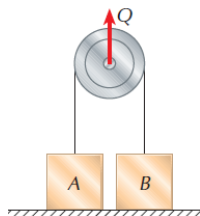
Qual é o melhor modo de puxar o conjunto sem que o fio se rompa: pela massa maior ou pela menor? Justifique sua resposta.

4. (Olimpíada Paulista de Física) Um homem de 70 kg está em cima de uma balança dentro de um elevador. Determine qual é a indicação da balança, nas seguintes situações:

- a) O elevador subindo acelerado com aceleração de 3 m/s^2 .
- b) O elevador subindo com velocidade constante de 2 m/s .
- c) O elevador descendo acelerado com aceleração de 1 m/s^2 .
- d) O elevador caindo em queda livre.

Considere a balança graduada em newtons e adote $g = 10 \text{ m/s}^2$.

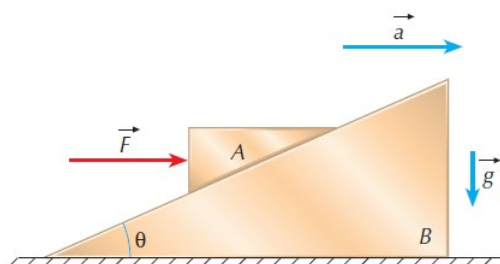
5. (UFSCar-SP) A polia e os fios da figura são considerados ideais, sem inércia. O fio é perfeitamente flexível e não há atritos a considerar. Use $g = 10 \text{ m/s}^2$. Dadas as massas $m_A = 40 \text{ kg}$, $m_B = 24 \text{ kg}$, determine as acelerações a_A (do corpo A) e a_B (quando):



- a) $Q = 400 \text{ N}$
- b) $Q = 720 \text{ N}$
- c) $Q = 1.200 \text{ N}$

A força Q aplicada ao eixo da polia ideal se divide em $\frac{Q}{2}$ em cada parte do fio. Só existem acelerações a_A (para A) e a_B (para B) quando $\frac{Q}{2}$ for maior que cada peso (P_A e P_B), erguendo desse modo os corpos.

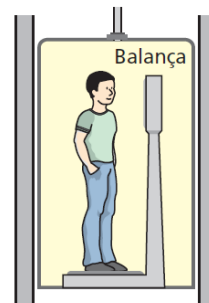
6. (Fuvest-SP) Duas cunhas A e B, de massas M_A e M_B , respectivamente, se deslocam juntas sobre um plano horizontal sem atrito, com aceleração constante $\vec{a}$, sob a ação de uma força horizontal $\vec{F}$ aplicada à cunha A, como mostra a figura. A cunha A permanece parada em relação à cunha B, apesar de não haver atrito entre elas.



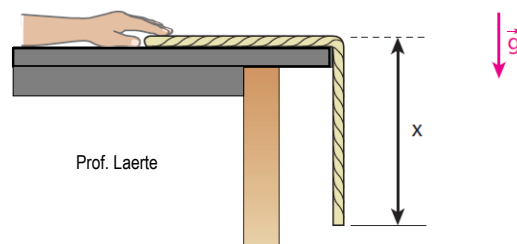
- a) Determine a intensidade da força $\vec{F}$ aplicada à cunha A.
- b) Determine a intensidade da força $\vec{F}_N$ que a cunha B aplica à cunha A.
- c) Sendo θ o ângulo de inclinação da cunha B, determine a tangente de θ .

7. Um homem de massa 60 kg acha-se de pé sobre uma balança graduada em newtons. Ele e a balança situam-se dentro da cabine de um elevador que tem, em relação à Terra, uma aceleração vertical de módulo $1,0 \text{ m/s}^2$. Adotando $|\vec{g}| = 10 \text{ m/s}^2$, calcule:

- a) a indicação da balança no caso de o elevador estar acelerado para cima;
- b) a indicação da balança no caso de o elevador estar acelerado para baixo.



8. Uma corda flexível e homogênea tem seção transversal constante e comprimento total L . A corda encontra-se inicialmente em repouso, com um trecho de seu comprimento apoiado em uma mesa horizontal e perfeitamente lisa, conforme indica a figura a seguir.



Em determinado instante, a corda é abandonada, adquirindo movimento acelerado. Não considerando a influência do ar e assumindo para o módulo da aceleração da gravidade o valor g , responda: como poderia ser apresentada a variação do módulo da aceleração da corda em função do comprimento pendente x ?

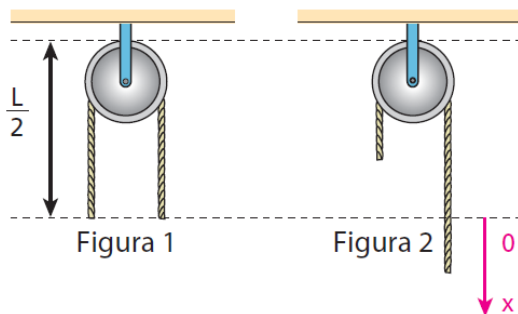
- a) $a = \frac{g}{L} x$
- b) $a = \frac{g}{L^2} x^2$

c) $a = \frac{gL}{x}$

d) $a = \frac{g}{L^3} x^3$

e) Não há elementos para uma conclusão, pois a massa da corda não foi dada.

9. Na figura 1, a corda flexível e homogênea de comprimento L repousa apoiada na polia ideal de dimensões desprezíveis. Um pequeno puxão é dado ao ramo direito da corda e esta põe-se em movimento. Sendo g o módulo da aceleração da gravidade, aponte a opção que mostra como varia o módulo da aceleração a da extremidade direita da corda em função da coordenada x indicada na figura 2:



a) $a = \frac{g}{L} x$

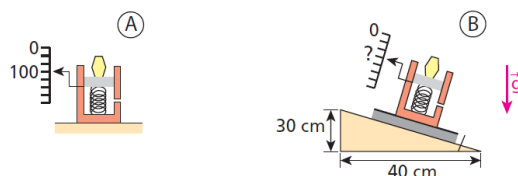
b) $a = \frac{2g}{L} x$

c) $a = \frac{2g}{3L} x$

d) $a = g$

e) A aceleração depende da massa da corda.

10. (Fuvest-SP) O mostrador de uma balança, quando um objeto é colocado sobre ela, indica 100 N, como esquematizado em A. Se tal balança estiver desnivelada, como se observa em B, seu mostrador deverá indicar, para esse mesmo objeto, o valor de:



a) 125 N.

b) 120 N.

c) 100 N.

d) 80 N.

e) 75 N.

Gabarito – parte 1

1. Resposta: e

2. Resposta: e

3. Nas duas situações, os blocos adquirem a mesma aceleração a . Na 1ª situação, para o bloco de massa 2 kg, temos: $T = 2 \cdot a$. Na segunda situação, para o bloco de massa 4 kg, temos: $T' = 4 \cdot a$. Logo, a tração é menor na 1ª situação. Portanto, devemos puxar o conjunto pelo corpo de maior massa (o que ocorre na 1ª situação).

4.a)

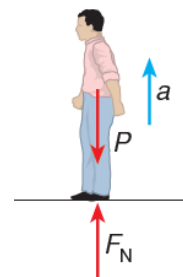
$$F_N - P = m \cdot a$$

$$F_N = mg + ma$$

$$F_N = m(g + a)$$

$$F_N = 70 \cdot (10 + 3)$$

$$F_N = 910 \text{ N}$$



F_N é o peso aparente. A aceleração da gravidade aparente no interior do elevador é $g_{ap} = g + a$.

b) Nesse caso: $a = 0$

$$F_N = P = 700 \text{ N}$$

c) $P - F_N = m \cdot a$

$$mg - F_N = m \cdot a$$

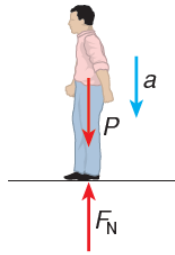
$$F_N = m(g - a)$$

$$F_N = 70 \cdot (10 - 1)$$

$$F_N = 630 \text{ N}$$

Nesse caso, a aceleração da gravidade aparente no interior do elevador é:

$$g_{ap} = g - a$$



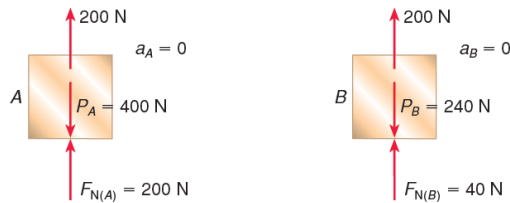
d) Sendo $a = g$, vem:

$$P - F_N = mg \Rightarrow P - F_N = P \Rightarrow \boxed{F_N = 0}$$

A aceleração da gravidade aparente é nula:

$$a = g \Rightarrow g_{ap} = 0$$

5.



a) $Q = 400 \text{ N} \Rightarrow \frac{Q}{2} = 200 \text{ N} < P_B < P_A$

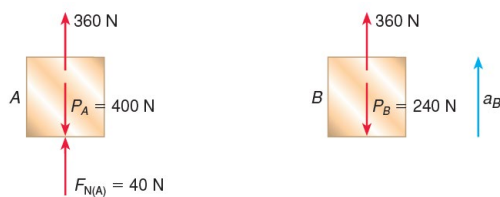
$$\Rightarrow \boxed{a_A = a_B = 0}$$

Nesse caso, os blocos A e B ficam apoiados.

b) $Q = 720 \text{ N} \Rightarrow \frac{Q}{2} = 360 \text{ N} < P_A$

$$\Rightarrow \boxed{a_A = 0}$$

Mas existe a_B .



A permanece no apoio enquanto B sobe com aceleração a_B , dada por:

$$360 - 240 = 24 \cdot a_B \Rightarrow \boxed{a_B = 5 \text{ m/s}^2}$$

c) $Q = 1.200 \text{ N} \Rightarrow \frac{Q}{2} = 600 \text{ N}$

Os blocos A e B sobem com acelerações a_A e a_B , tais que:

Bloco A:

$$600 - 400 = 40 \cdot a_A \Rightarrow \boxed{a_A = 5 \text{ m/s}^2}$$

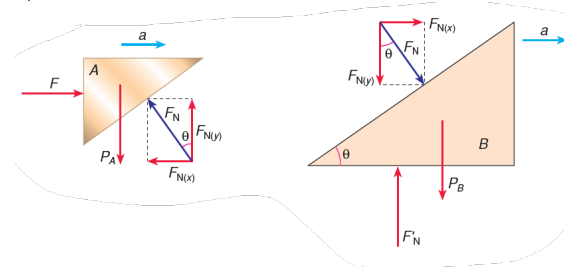
Bloco B:

$$600 - 240 = 24 \cdot a_B \Rightarrow \boxed{a_B = 15 \text{ m/s}^2}$$

6. a) Aplicando a equação fundamental da Dinâmica para o conjunto de corpos (A + B), temos:

$$F = (M_A + M_B) \cdot a$$

b)



Cunha B:

$$F_{N(x)} = M_B \cdot a$$

Cunha A:

$$F_{N(y)} = M_A \cdot g$$

$$F_N = \sqrt{F_{N(x)}^2 + F_{N(y)}^2}$$

$$\Rightarrow F_N = \sqrt{M_B^2 \cdot a^2 + M_A^2 \cdot g^2}$$

c)

$$\text{tg} \theta = \frac{F_{N(x)}}{F_{N(y)}}$$

$$\Rightarrow \text{tg} \theta = \frac{M_B \cdot a}{M_A \cdot g}$$

8. Resolução:

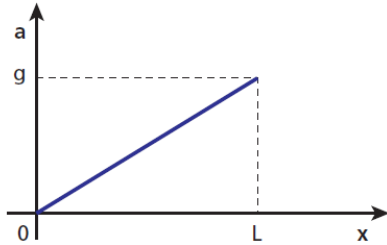
2ª Lei de Newton para a corda:

$$P_x = M_{\text{total}} \cdot a$$

$$\Rightarrow m_x \cdot g = M_{\text{total}} \cdot a$$

$$k \cdot x \cdot g = k \cdot L \cdot a$$

$$\Rightarrow a = \frac{g}{L} x$$



É importante notar que a massa da corda é diretamente proporcional ao comprimento considerado ($m = k \cdot x$, em que k é uma constante de proporcionalidade que traduz a densidade linear da corda).

Resposta: a

9. Resolução:

Aplicando a 2ª Lei de Newton à corda, temos:

$$P - p = m_{\text{total}} \cdot a$$

$$K \left(\frac{L}{2} + x \right) g - K \left(\frac{L}{2} - x \right) g = KLa$$

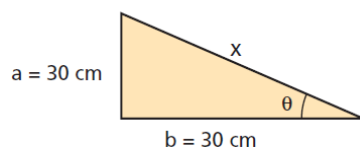
$$\left(\frac{L}{2} + x + \frac{L}{2} + x \right) g = La$$

$$\Rightarrow a = \frac{2g}{L} x$$

Resposta: b

10. Resolução:

A indicação (I) da balança corresponde à força normal de compressão que o objeto exerce sobre sua plataforma. Essa força, nesse caso, tem intensidade igual à da componente normal ($\vec{P}_n$) do peso do objeto:



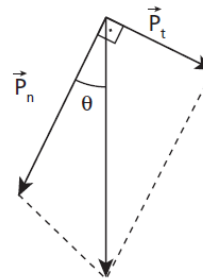
$$x^2 = a^2 + b^2$$

$$x^2 = (30)^2 + (40)^2$$

$$x = 50 \text{ cm}$$

$$I = P_n \Rightarrow I = P \cos \theta$$

$$I = P \frac{b}{x} = 100 \frac{40}{50} \text{ (N)}$$



$$I = 80 \text{ N}$$

6. Vínculo de velocidade escalar entre corpos conectados - método da projeção.

Considere um corpo rígido de um formato genérico como o da figura 1.

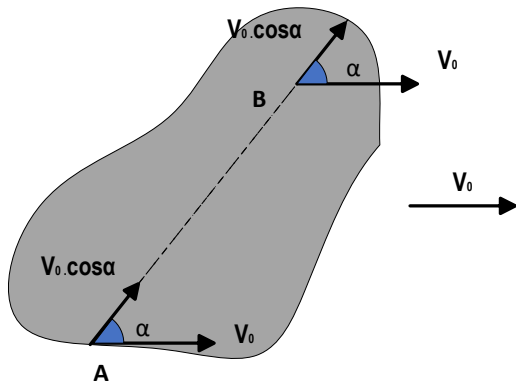
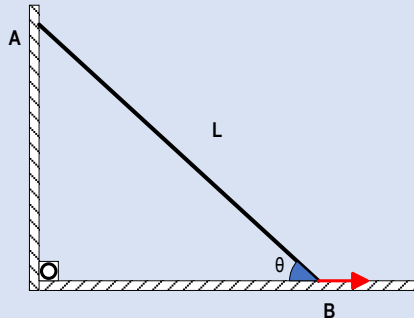


Figura 8

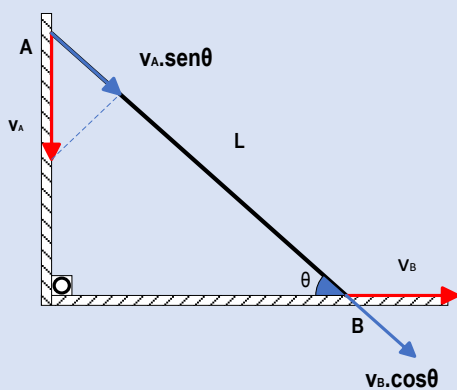
Para duas partículas ligadas a um corpo rígido, sempre as componentes das velocidades ao longo da linha que passa pelos pontos têm a mesma velocidade.

$$v_{rel.AB} = 0$$

EXEMPLO 01: Determine o valor da velocidade v_A .



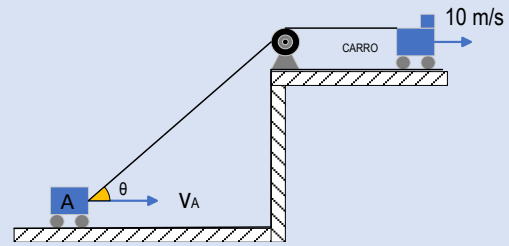
Resolução:



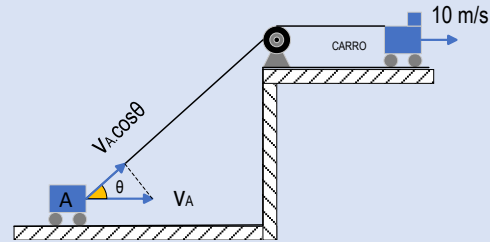
$$v_A \cdot \sin \theta = v_B \cdot \cos \theta$$

$$v_A = \frac{v_B \cdot \cos \theta}{\sin \theta}$$

EXEMPLO 02: Determine o valor da velocidade v_A . $\theta = 30^\circ$.



Resolução:

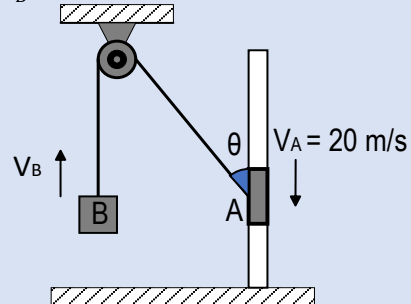


$$v_A \cdot \cos \theta = v_c$$

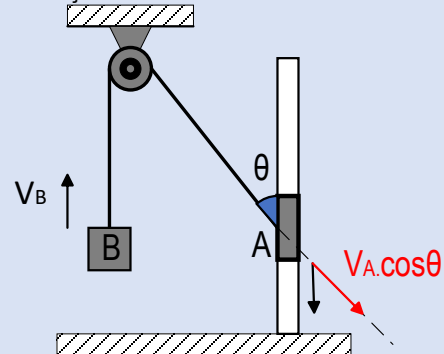
$$v_A = \frac{10}{\cos \theta}$$

$$v_A = \frac{20}{\sqrt{3}} \text{ m/s}$$

EXEMPLO 03: Determine o valor da velocidade v_B . $\theta = 60^\circ$



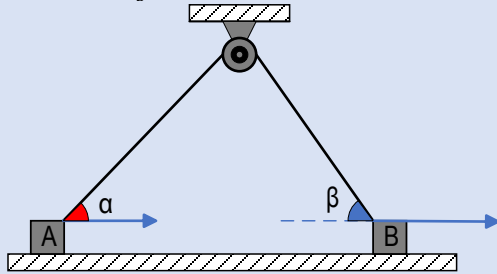
Resolução:



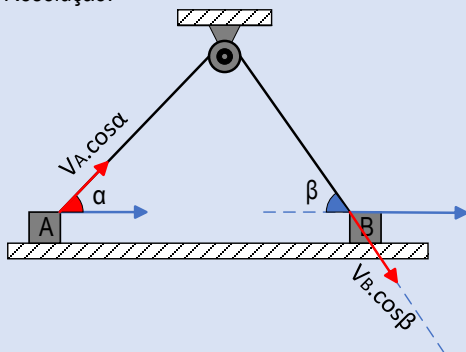
$$v_B = v_A \cdot \cos \theta$$

$$v_B = 10 \text{ m/s}$$

EXEMPLO 04: Determine o valor da velocidade v_A .
Onde $v_B = \frac{8m}{s}$; $\alpha = 45^\circ$ e $\beta = 30^\circ$.



Resolução:



$$v_A \cdot \cos \alpha = v_B \cos \beta$$

$$v_A = v_B \cdot \cos \beta / \cos \alpha$$

$$v_A = 4\sqrt{6} \text{ m/s}$$

7. Vínculo - Método do trabalho das forças internas.

Considere como sistema de estudo apenas os blocos e o fio.

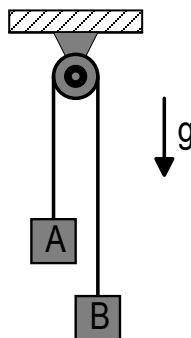


Figura 9

O sistema e:

- Fio
- Os blocos

Forças internas do sistema:

T (tensão)

Forças externas do sistema:

- $m_A g$
- $m_B g$
- T_c (tensão no cabo)

Coloque as forças e os respectivos deslocamentos

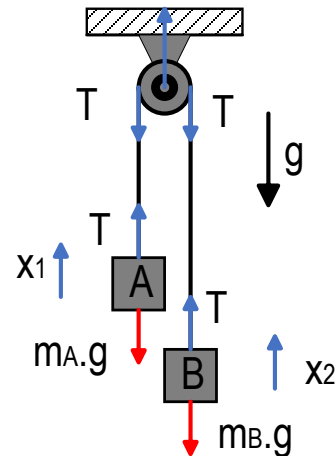


Figura 10

Então o trabalho total das forças internas

$$\sum \tau_{int} = 0$$

$$T \cdot x_1 - T \cdot x_2 = 0$$

$$x_1 = x_2$$

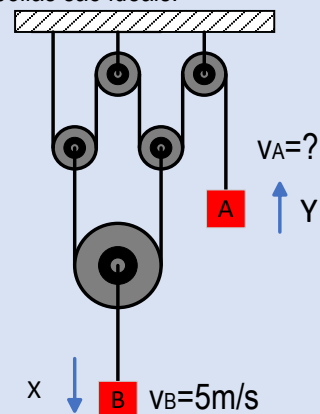
Derivando em relação ao tempo

$$d_1 = d_2$$

E

$$a_1 = a_2$$

Exemplo 05: Determine a velocidade do bloco A. Todas as polias são ideais.



Resolução:

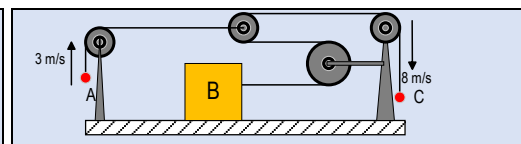
$$\sum \tau_{int} = 0$$

$$T \cdot y - 4 \cdot T x = 0$$

$$y = 4x$$

$$v_A = 4 \cdot v_B$$

$$v_A = 20 \text{ m/s}$$



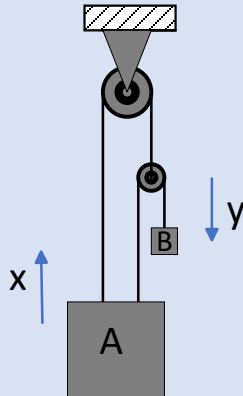
Resolução:

$$\sum \tau_{int} = 0$$

$$v_B = v_C - 2v_A$$

$$v_B = 2 \text{ m/s}$$

Exemplo 6: se $v_A = 3 \text{ m/s}$, determine v_B .



Resolução:

$$\sum \tau_{int} = 0$$

$$-T \cdot y + 3 \cdot T \cdot x = 0$$

$$y = 3x$$

$$v_B = 9 \text{ m/s}$$

8. LEIS DE NEWTON COM VÍNCULOS GEOMÉTRICOS - POLIAS MÓVEIS

Caso a)

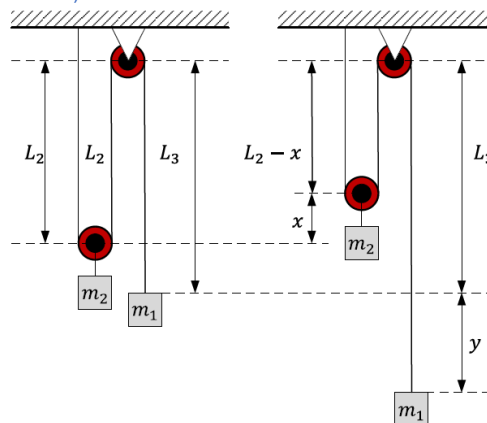


Figura 11

Considerando-se o fio inextensível, temos:

$$L_{INICIAL} = L_{FINAL}$$

$$2 \cdot L_2 + L_3 = 2 \cdot (L_2 - x) + L_3 + y$$

$$y = 2 \cdot x$$

Diferenciando-se em relação ao tempo, obtemos a relação entre as velocidades instantâneas:

$$\frac{dy}{dt} = 2 \cdot \frac{dx}{dt} \therefore v_1 = 2 \cdot v_2$$

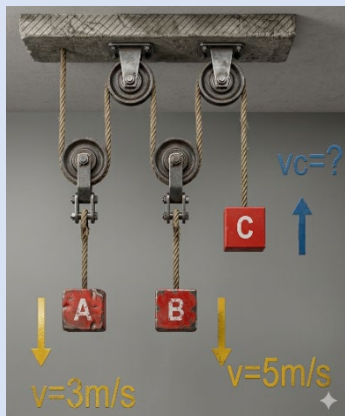
De forma análoga, temos:

$$a_1 = 2 \cdot a_2$$

Façamos:

$$\begin{cases} a_2 = a \\ a_1 = 2a \end{cases}$$

Exemplo 7: Determine a velocidade do bloco C.



Resolução:

$$\sum \tau_{int} = 0$$

$$z = 2y + 2x$$

$$v_C = 16 \text{ m/s}$$

Exemplo 8: Determine a velocidade v_B ?

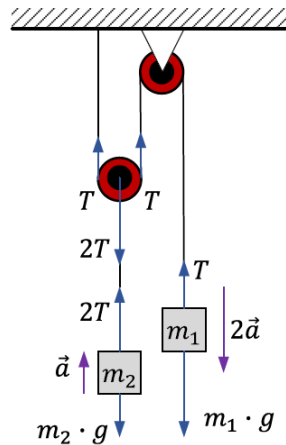


Figura 12

Escrevendo a Segunda Lei de Newton, para cada bloco:

$$\begin{cases} m_1 \cdot g - T = m_1 \cdot 2a \rightarrow 2m_1 \cdot g - 2T = 4m_1 \cdot a \\ 2T - m_2 \cdot g = m_2 \cdot a \end{cases}$$

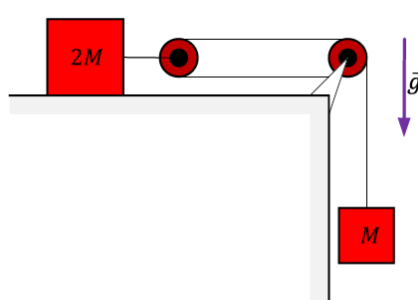
Adicionando-se as equações anteriores, obtemos:

$$a = \left[\frac{2m_1 - m_2}{4m_1 + m_2} \right] \cdot g$$

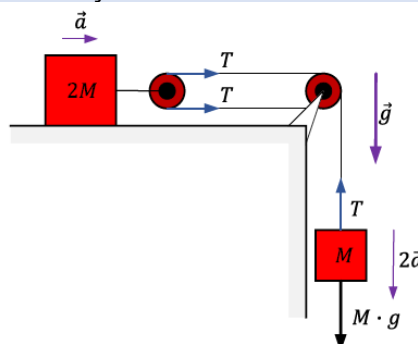
Após simplificações algébricas:

$$T = \left[\frac{3m_1 \cdot m_2 \cdot g}{4m_1 + m_2} \right]$$

EXEMPLO 9: Determine a aceleração dos blocos para o arranjo mostrado nas figuras abaixo. As polias e os fios são ideais.



RESOLUÇÃO COMENTADA:



Para o bloco de massa $2M$ podemos escrever:

$$2T = 2M \cdot a \therefore T = M \cdot a$$

Para o bloco de massa M :

$$Mg - T = M \cdot (2a)$$

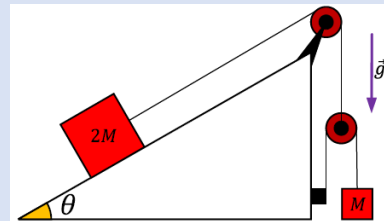
Resolvendo-se o sistema de equações, obtemos:

$$Mg - Ma = M \cdot (2a)$$

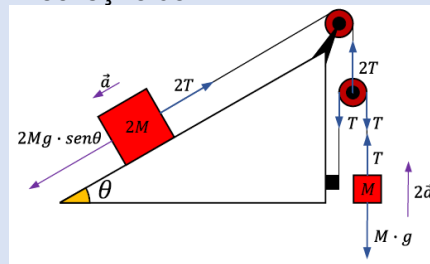
$$Mg = 3Ma$$

$$a = \frac{g}{3}$$

EXEMPLO RESOLVIDO 10: Determine a aceleração dos blocos para o arranjo mostrado nas figuras abaixo. As polias e os fios são ideais.



RESOLUÇÃO COMENTADA:



Para o bloco de massa $2M$ podemos escrever:

$$2Mg \cdot \text{sen}\theta - 2T = 2M \cdot a$$

Para o bloco de massa M :

$$T - Mg = M \cdot (2a)$$

$$2T - 2Mg = 4M \cdot a$$

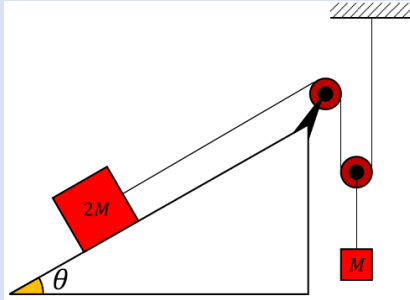
Resolvendo-se o sistema de equações, obtemos:

$$\begin{cases} 2Mg \cdot \text{sen}\theta - 2T = 2M \cdot a \\ 2T - 2Mg = 4M \cdot a \end{cases}$$

$$2Mg \cdot (\text{sen}\theta - 1) = 6M \cdot a$$

$$a = \frac{g}{3} \cdot (\text{sen}\theta - 1)$$

EXEMPLO RESOLVIDO 11: Determine a aceleração dos blocos para o arranjo mostrado nas figuras abaixo. As polias e os fios são ideais.



RESOLUÇÃO COMENTADA:

Para o bloco de massa $2M$ podemos escrever:

$$2Mg \cdot \sin\theta - T = 2M \cdot (2a)$$

$$4Mg \cdot \sin\theta - 2T = 8M \cdot a$$

Para o bloco de massa M :

$$2T - Mg = Ma$$

Resolvendo as equações anteriores obtemos:

$$a = \frac{g}{9} \cdot (4\sin\theta - 1)$$

Nestes sistemas, o vínculo geométrico é o fato de que o comprimento do fio longo que interliga as caixas A e C permanece invariável entre quaisquer dois instantes t e $t + dt$. Assim, podemos escrever: O comprimento do fio no instante t vale:

$$L_A + L_B + L_B + L_C = L_A + 2 \cdot L_B + L_C = K$$

O comprimento do fio no instante $t + dt$ vale:

$$L'_A + 2 \cdot L'_B + L'_C = K$$

Subtraindo as equações, membro a membro, obteremos a relação entre os deslocamentos escalares de cada caixa no intervalo de tempo infinitesimal dt :

$$(L'_A - L_A) + 2 \cdot (L'_B - L_B) + (L'_C - L_C) = K - K$$

$$dL_A + 2 \cdot dL_B + dL_C = 0 \Rightarrow$$

$$dL_B = -\left(\frac{dL_A + dL_C}{2}\right) \Rightarrow$$

$$|dL_B| = \frac{|dL_A| + |dL_C|}{2}$$

Caso não haja rotações

$$|a_B| = \frac{|a_A| + |a_C|}{2}$$

Caso b)

Considere os sistemas mostrados nas figuras a baixo

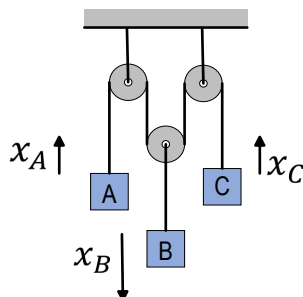


Figura 13

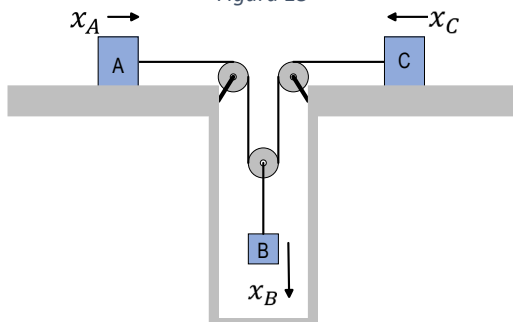
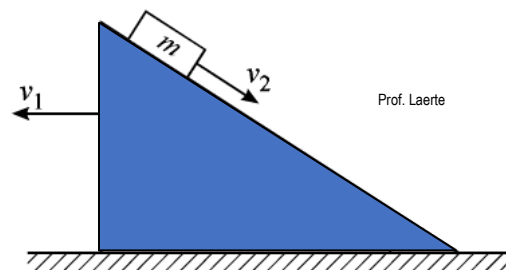


Figura 14

Caso c) Restrições de cunha

Até agora, discutimos o movimento de blocos conectados por cordas, sendo essas cordas conduzidas por polias conectadas de diversas maneiras possíveis. Aqui, discutiremos a relação entre o movimento de dois ou mais corpos que estão em contato e são responsáveis pelo movimento uns dos outros. Primeiro, consideremos um caso muito simples, mostrado na Figura. Nessa situação, um bloco triangular de massa M pode se mover livremente sobre o solo, e uma massa m pode se mover livremente sobre a superfície inclinada de M . O bloco M está restrito a se mover somente ao longo do solo horizontal, enquanto m também está restrito a se mover somente ao longo da superfície inclinada de M , em relação a ele.



Prof. Laerte

Se M estiver se movendo para a esquerda com velocidade v_1 , por exemplo, e m estiver

descendo pela superfície inclinada com velocidade v_2 , então podemos afirmar que a velocidade resultante de M é v_1 . Entretanto, m também está se movendo para a esquerda junto com M . Assim, sua velocidade resultante é dada pela soma vetorial de v_1 e v_2 , conforme mostrado na Figura:

$$v_m = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + 2v_1v_2 \cos \theta}$$

A mesma expressão também pode ser obtida utilizando as componentes horizontal e vertical da velocidade da pequena massa m . Nesse caso, m está se movendo ao longo da superfície inclinada com velocidade v_2 , em relação a M , e também está se movendo junto com M para a esquerda com velocidade v_1 . Portanto, temos:

A velocidade horizontal de m em relação ao solo é:

$$v_x = v_2 \cos \theta - v_1$$

A velocidade vertical de m em relação ao solo é:

$$v_y = v_2 \sin \theta$$

A velocidade resultante de m é:

$$v_m = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

Substituindo as componentes:

$$v_m = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + 2v_1v_2 \cos \theta}$$

Na Figura 15, vemos um prisma reto de base triangular isósceles, apoiado sobre dois cubos idênticos. Quando o prisma é abandonado do repouso, ele passa a descer verticalmente, percorrendo uma distância vertical y , ao mesmo tempo dt , em que cada cubo percorre uma distância horizontal x . (Figura 16)

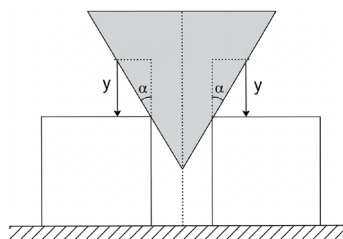


Figura 15

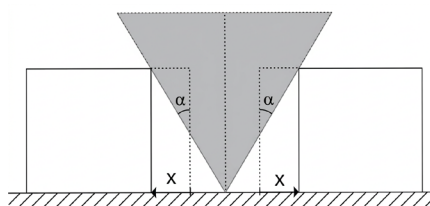


Figura 16

Da geometria da figura, é fácil ver que:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{x}{y} \Rightarrow x = y \cdot \operatorname{tg} \alpha \quad (\text{eq. 1})$$

Usando a regra prática de derivação, podemos substituir x por V_x e y por V_y em eq.1, visto que $\operatorname{tg} \alpha$ é uma constante real:

$$V_x = V_y \cdot \operatorname{tg} \alpha \quad (\text{eq. 2})$$

A expressão acima relaciona a velocidade dos cubos (V_x) com a velocidade de descida (V_y) do prisma, num mesmo instante do movimento.

Finalmente, empregando, mais uma vez, a regra prática de derivação, podemos substituir V por a :

$$a_x = a_y \cdot \operatorname{tg} \alpha \quad (\text{eq. 3})$$

A expressão acima relaciona a aceleração dos cubos (a_x) com a aceleração de descida (a_y) do prisma em qualquer instante do movimento. Mais uma vez, enfatizamos que as expressões eq. 1, eq. 2 e eq. 3 só podem ser determinadas a partir desses argumentos geométricos.

Caso d) CORPOS RÍGIDOS DESLIZANDO – CASO AVANÇADO (Por Renato Brito)

Considere a situação da Figura 17, em que uma caixa se encontra apoiada sobre a superfície inclinada de um prisma, que pode se mover ao longo de uma superfície horizontal.

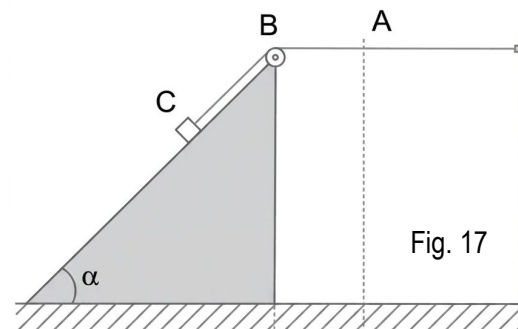


Fig. 17

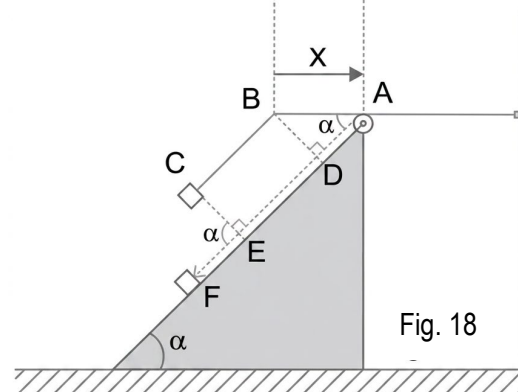


Fig. 18

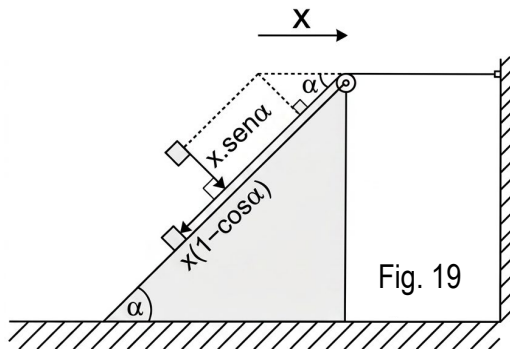


Fig. 19

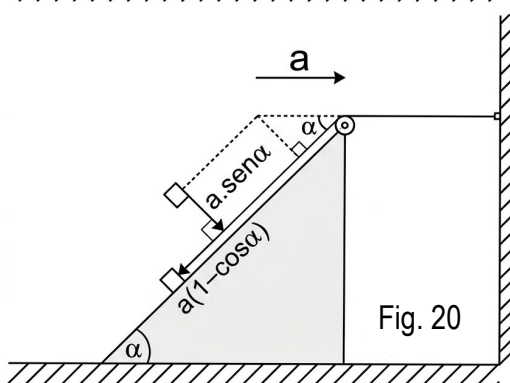


Fig. 20

A caixa encontra-se conectada à parede vertical por meio de um fio inextensível, que passa por uma polia com dimensões desprezíveis. Se o sistema for abandonado a partir do repouso, o prisma adquirirá uma aceleração horizontal $\vec{a}$ para a direita, no referencial da Terra (inercial).

A seguir, determinará a aceleração da caixa em relação à Terra, em função da aceleração a do prisma. Seja L o comprimento do trecho ABC do fio na Figura 17. A geometria da Figura 18 permite escrever:

$$L = AB + BC = x + BC \Rightarrow$$

$$BC = DE = L - x \quad (\text{eq. 1})$$

No $\triangle ABD$:

$$AD = x \cdot \cos \alpha \quad (\text{eq. 2})$$

e

$$BD = CE = x \cdot \sin \alpha \quad (\text{eq. 3})$$

Quando o prisma se desloca em uma distância x para a direita (Figura 18), o trecho ABC do fio assume o formato AF , embora o seu comprimento permaneça constante. Assim, podemos escrever (Figura 18):

$$L = AD + DE + EF = x \cdot \cos \alpha + (L - x) + EF$$

$$L = x \cdot \cos \alpha + (L - x) + EF \Rightarrow$$

$$EF = x - x \cdot \cos \alpha \Rightarrow$$

$$EF = x \cdot (1 - \cos \alpha) \quad (\text{eq. 4})$$

Do exposto, concluímos que, sempre que o prisma se deslocar x para a direita, a caixa sobre a rampa se

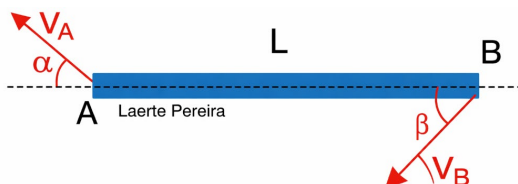
deslocará $x \cdot \sin \alpha$ na direção CE (Figura 19) e $x \cdot (1 - \cos \alpha)$ na direção EF , deslocamentos esses sempre tomados em relação à Terra. Finalmente, da regra prática de derivação, trocando x por v e, em seguida, v por a nas expressões eq. 2 e eq. 3, podemos dizer que:

Conclusão

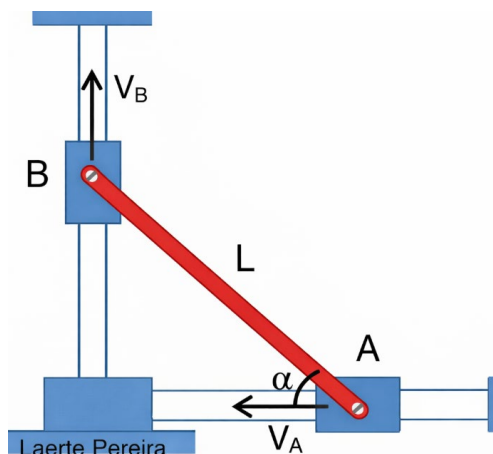
Se o prisma (Figura 20) apresentar uma aceleração horizontal $\vec{a}$ para a direita, no referencial da Terra, a caixa apresentará as acelerações $a \cdot \sin \alpha$ na direção CE e $a \cdot (1 - \cos \alpha)$ na direção EF , todas em relação à Terra (referencial inercial).

Exercícios - Parte 2

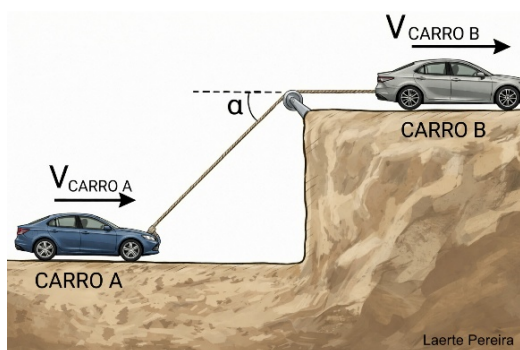
1. A haste rígida AB da figura executa movimento de rotação e translação. Qual a relação entre as velocidades V_A e V_B ?



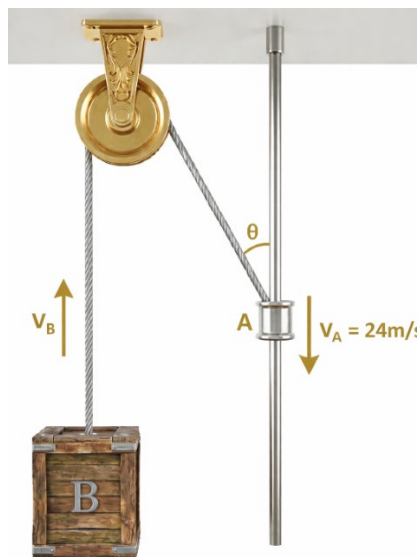
2. No sistema abaixo, sendo $V_A = 24 \text{ m/s}$, determine V_B no instante em que $\alpha = 37^\circ$. ($\sin 37^\circ = 0,60$, $\cos 37^\circ = 0,80$)



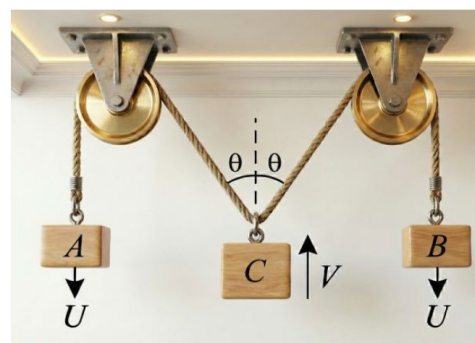
3. Na figura abaixo, se a velocidade do carro B vale $V_B = 60 \text{ km/h}$, qual a velocidade do carro A no instante em que $\alpha = 37^\circ$? Dados: $\sin \alpha = 0,60$, $\cos \alpha = 0,80$



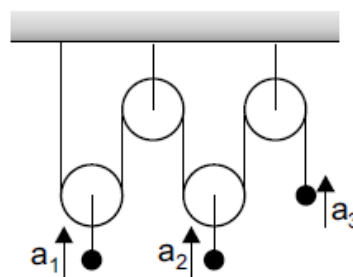
4. Na figura abaixo, o cursor A desliza para baixo com velocidade constante $V_A = 24 \text{ m/s}$. determine a velocidade V_B do bloco B no instante em que $\alpha = 37^\circ$



5. Na figura a seguir, no instante em que A e B descem com velocidades $U = 12 \text{ m/s}$, a caixa C sobe com que velocidade V ? $\alpha = 37^\circ$

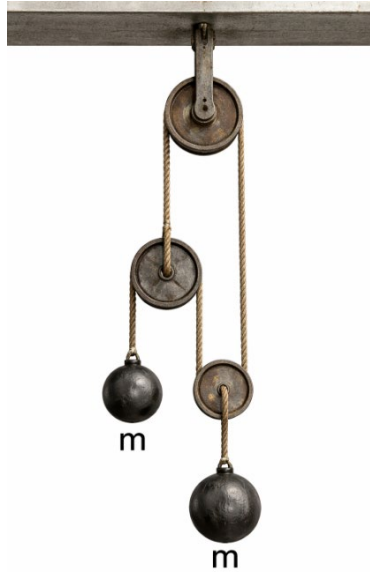


6. Para a máquina de Atwood mostrada abaixo, encontre o vínculo entre as acelerações indicadas na figura.

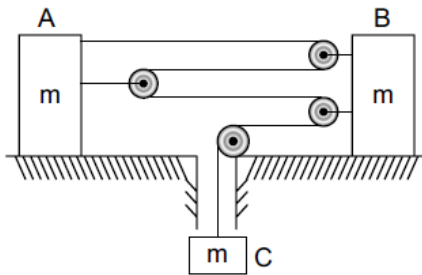


- a) $a_3 = -a_1 - a_2$
- b) $a_3 = -2a_1 - 2a_2$
- c) $a_3 = -4a_2$
- d) $2a_3 = -a_1 - a_2$
- e) $4a_3 = -a_1 - a_2$

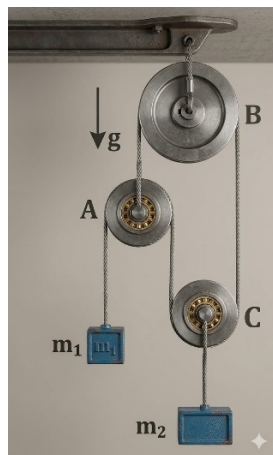
7. Encontre a aceleração das duas massas na máquina de Atwood mostrada abaixo.



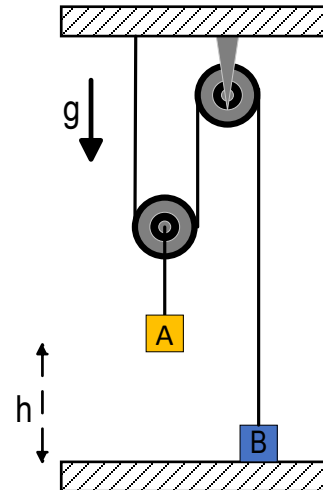
8. Na figura, todas as superfícies são consideradas com atrito desprezível. Determine a aceleração do bloco B.



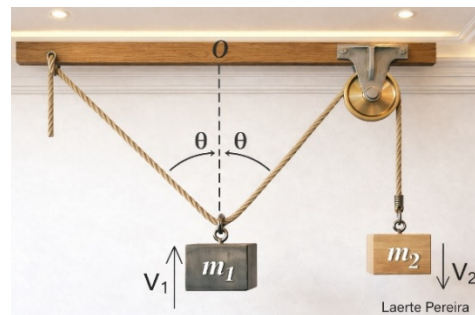
9. Determine a aceleração dos pesos no sistema desenhado. As massas das roldanas, da corda e a fricção podem ser desprezadas. Em que direção girarão as polias quando os pesos se movem? Determine ainda a tração na corda que envolve as polias.



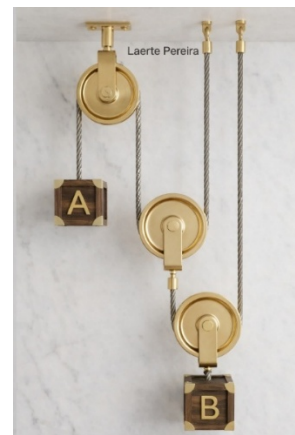
10. A Figura mostra um sistema formado por dois blocos A e B, de massas iguais a $4M$ e M , respectivamente, conectados por fios e polias ideais num local em que a gravidade vale $g = 10 \text{ m/s}^2$. Se o sistema é abandonado a partir do repouso, com o bloco A a uma altura $h = 80 \text{ cm}$ do solo, qual a velocidade do bloco B quando A atingir o solo?



11. Na figura abaixo, se a velocidade do bloco 2 vale $V_2 = 18 \text{ m/s}$, determine a velocidade V_1 do bloco 1 no instante em que $\theta = 53^\circ$. $\sin \theta = 4/5$



12. Considere o sistema representado na figura. No instante em que A sobe com velocidade $V_A = 32 \text{ cm/s}$, o bloco B desce com que velocidade?



13. No instante mostrado na figura, o bloco A sobe com velocidade 10 m/s enquanto B desce com velocidade 3 m/s. Nesse mesmo instante o bloco C está subindo ou descendo? Com qual velocidade?



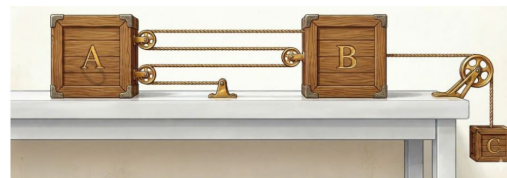
14. No instante mostrado na figura, o bloco C possui velocidade $V_C = 8 \text{ m/s} \leftarrow$ e o bloco B tem velocidade $V_B = 2 \text{ m/s} \downarrow$. O bloco A está subindo ou descendo? Com qual velocidade?



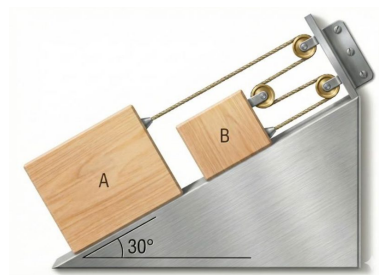
15. Na figura abaixo, no instante em que B se afasta de A com velocidade relativa de 5 m/s, qual a velocidade de cada bloco em relação à Terra?



16. Na figura abaixo, no instante em que C se move para baixo com velocidade $V_C = 8 \text{ m/s}$, o bloco A se move com qual velocidade?



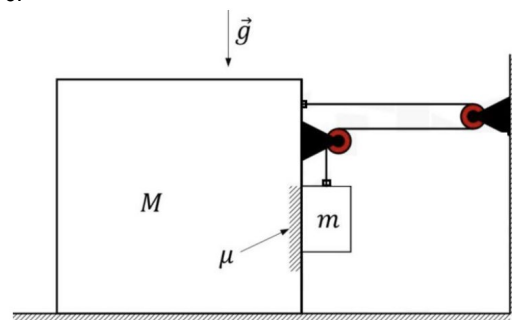
17. No sistema da figura, considere que A e B se movem com velocidades constantes por causa do atrito. A distância que separa A e B inicialmente vale 2 m. Se B está descendo com velocidade $V_B = 10 \text{ cm/s}$, em quanto tempo os blocos colidirão?



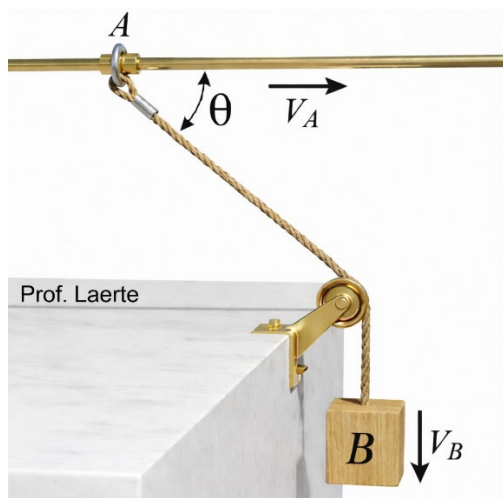
18. Na figura abaixo, a velocidade relativa entre A e B vale $V_{AB} = 15 \text{ cm/s}$. Se $V_A = 12 \text{ cm/s}$, determine o valor de V_B .



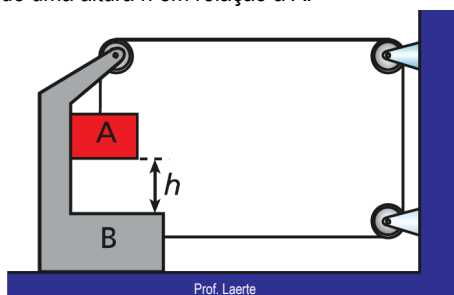
19. (RÚSSIA) No sistema mostrado na figura, o corpo de massa pode deslizar sem atrito sobre um plano horizontal. O coeficiente de atrito entre os corpos é igual a. Determine a aceleração do corpo. Despreze as massas m das polias e do fio inextensível. A aceleração da gravidade é.



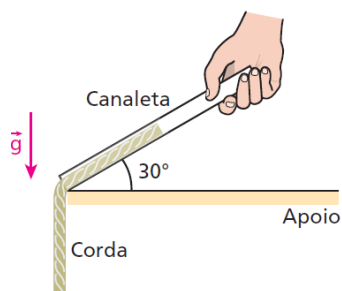
20. Na figura a seguir, a caixa B desce com velocidade $V_B = 20 \text{ cm/s}$, o anel A possui qual velocidade nesse mesmo instante?
 $\theta = 60^\circ$



21. No sistema representado na figura, não há atritos, o fio é inextensível e tem peso desprezível. No local, a intensidade da aceleração da gravidade vale g . Ignorando a influência do ar, calcule o intervalo de tempo que o corpo B (de massa m) leva para atingir a base do corpo A (de massa M), quando é abandonado de uma altura h em relação a A.



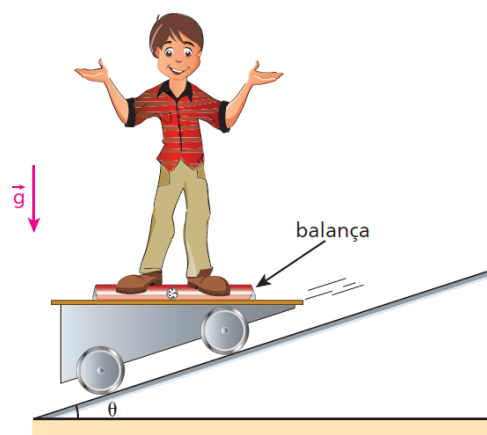
22. Uma corda flexível, homogênea, de seção transversal constante e de comprimento igual a L será posta a deslizar no interior de uma canaleta perfeitamente lisa, inclinada de um ângulo $\theta = 30^\circ$ em relação à horizontal, conforme representa a figura. Na situação, a influência do ar é desprezível e a aceleração da gravidade tem intensidade $g = 10 \text{ m/s}^2$.



No instante em que o comprimento pendente na vertical for igual a $\frac{L}{2}$, a intensidade da aceleração da corda:

- a) valerá $2,5 \text{ m/s}^2$;
- b) valerá $5,0 \text{ m/s}^2$;
- c) valerá $7,5 \text{ m/s}^2$;
- d) valerá 10 m/s^2 ;
- e) estará indeterminada, pois não foi dado o valor numérico de L .

23. Um garoto realizou o seguinte experimento: conseguiu uma balança dessas utilizadas em banheiros, colocou-a sobre a plataforma horizontal de um carrinho dotado de pequenas rodas, de modo que este foi posto a deslizar para baixo ao longo de uma rampa inclinada de um ângulo θ , como representa a figura. O garoto, cuja massa é de 56 kg , ficou surpreso ao observar que, durante seu movimento em conjunto com o carrinho, a balança indicou apenas 42 kg .

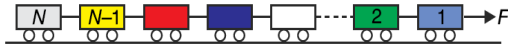


Desprezando-se os atritos resistentes ao movimento do carrinho e adotando-se $|\vec{g}| = 10,0 \text{ m/s}^2$, responda:

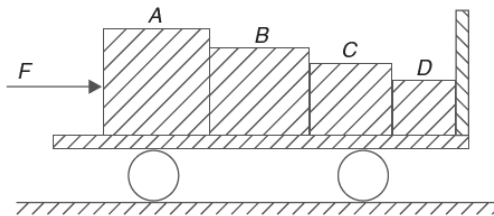
- a) Qual o sentido da força de atrito atuante nos pés do garoto durante o movimento? Para a esquerda ou para a direita? Justifique.
- b) Qual o valor do ângulo θ ?

24. N carrinhos idênticos estão conectados uns aos outros por meio de fios de massa desprezível. Uma

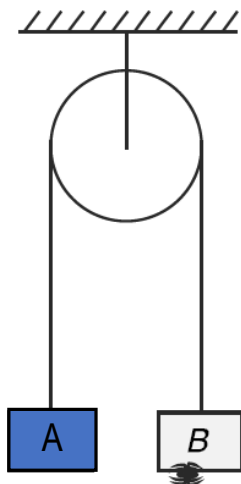
força de tração F é aplicada ao primeiro carrinho, e o sistema se move sem atrito sobre um plano horizontal. A tensão no fio que conecta o 4º e o 5º carrinhos é duas vezes a tensão no fio que conecta o 8º e o 9º carrinhos. Determine o número total de carrinhos (N) e a tensão no último fio.



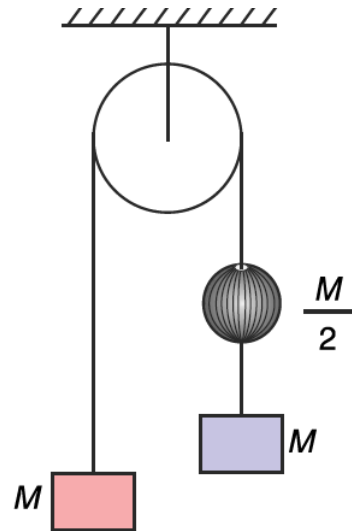
25. Um carrinho de brinquedo tem massa de 4 kg e está sobre uma superfície horizontal lisa. Quatro blocos A , B , C e D , de massas 2 kg, 2 kg, 1 kg e 1 kg, respectivamente, foram colocados sobre o carrinho. Uma força horizontal de $F = 40$ N é aplicada ao bloco A . Determine a força de contato entre o bloco D e a parede vertical frontal do carrinho.



26. Na disposição mostrada na figura, o sistema está em equilíbrio. A massa do bloco A é M , e a massa do inseto agarrado ao bloco B é m . A polia e a corda são leves. O inseto perde o contato com o bloco B e começa a cair. Depois de quanto tempo o inseto e o bloco B estarão separados por uma distância L entre eles?



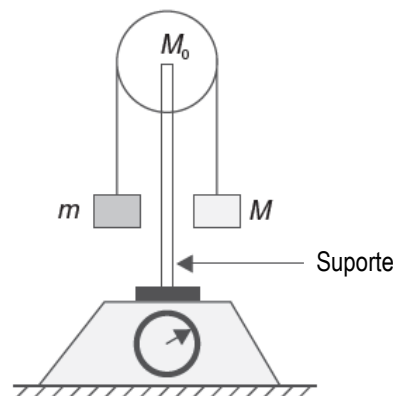
27. Dois blocos de massas iguais, M cada um, estão conectados às duas extremidades de uma corda de massa desprezível, que passa por uma polia de massa desprezível. Em um dos lados da corda há uma esfera de massa $\frac{M}{2}$.



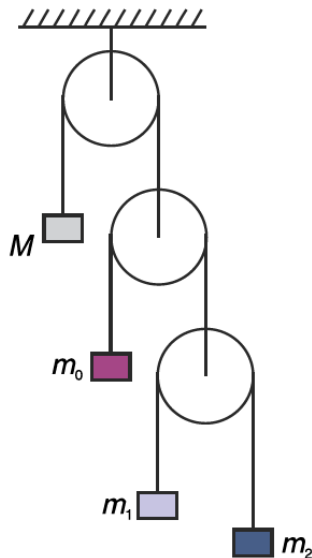
a) Quando o sistema é liberado a partir do repouso, a esfera continua permanecendo em repouso enquanto os dois blocos aceleram. Determine a aceleração dos blocos.

b) Determine a aceleração dos dois blocos se for observado que a esfera está deslizando para baixo com velocidade constante em relação à corda.

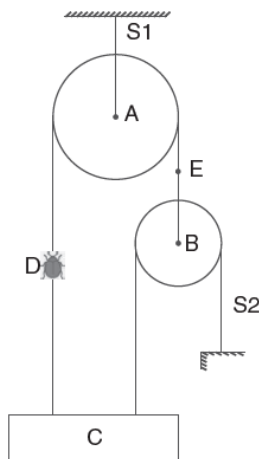
28. Uma polia está montada em um suporte que se encontra sobre uma balança. A massa combinada do suporte e da polia é M_0 . Um fio leve passa sobre a polia lisa, e duas massas m e M ($M > m$) estão conectadas às suas extremidades. Determine a leitura indicada pela balança quando as duas massas são liberadas para se mover.



29. No arranjo dado, todas as cordas e polias são leves. Quando o sistema foi lançado, se observou que M e m_0 não se movem. Determine o valor das massas M e m_0 em termos de m_1 e m_2 . Determine a aceleração de todas as massas se a corda for cortada apenas acima de m_2 .



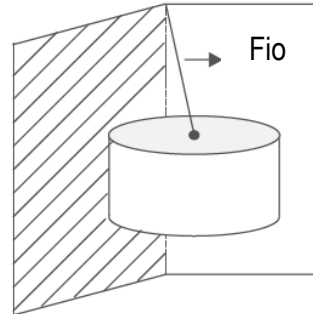
30. O sistema mostrado na figura está em equilíbrio. As polias A e B têm massa M cada uma, e o bloco C tem massa $2M$. As cordas são leves. Há um inseto D, de massa $\frac{M}{2}$, sentado no meio da corda direita. O inseto não se move.



- Por simples inspeção, diga se a tensão na corda S1 é igual, maior ou menor que $\frac{9}{2}Mg$.
- Determine a tensão na corda S2 e na corda S1.
- Determine a tensão em S2 se o inseto voar e pousar no ponto E da corda.

31. Um bloco desliza por um plano inclinado sem atrito, formando um ângulo θ com a horizontal. Para qual valor do ângulo θ a componente horizontal da aceleração do bloco é máxima? Determine essa aceleração horizontal máxima.

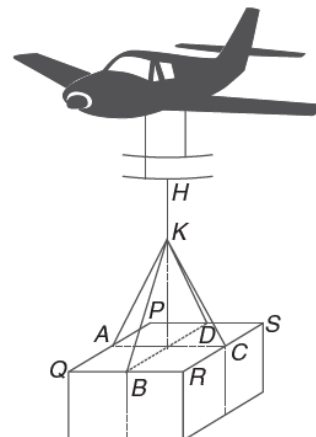
32. Um cilindro de massa M e raio r está suspenso no canto de uma sala. O comprimento do fio é duas vezes o raio do cilindro. Determine a tensão no fio e a força normal exercida por cada parede sobre o cilindro, considerando que as paredes são lisas.



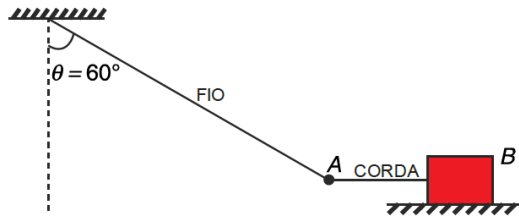
33. Um helicóptero de massa $M = 15\,000\text{ kg}$ está içando uma caixa cúbica de massa $m = 2\,000\text{ kg}$. O helicóptero está subindo com uma aceleração de $a = 1,2\text{ m/s}^2$.

As quatro cordas estão amarradas nos pontos médios dos lados da face quadrada PQRS da caixa. As cordas são idênticas e formam um nó em K. Outra corda KH conecta o nó ao helicóptero. Despreze a massa de todas as cordas e considere $g = 10\text{ m/s}^2$. O comprimento de cada corda AK, BK, CK e DK é igual ao comprimento da aresta do cubo.

- Determine a tensão T na corda AK.
- Determine a tensão T_0 na corda KH.
- Determine a força (F) exercida pela atmosfera sobre o helicóptero. Considere que a atmosfera exerce uma força desprezível sobre a caixa.
- Se as quatro cordas forem amarradas nos pontos P, Q, R e S, em vez de A, B, C e D, como as grandezas T , T_0 e F se modificarão? Elas aumentarão ou diminuirão? Considere que o comprimento das quatro cordas idênticas permaneça o mesmo.



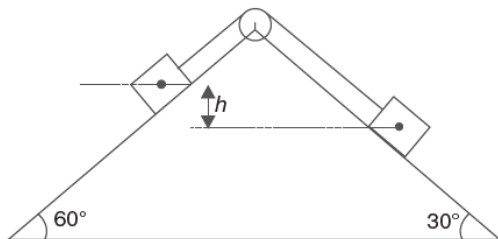
34. Um pêndulo possui uma esfera conectada a um fio leve. A esfera A está em equilíbrio na posição mostrada. A corda está na horizontal e conectada a um bloco B , que se encontra apoiado sobre uma superfície áspera. O bloco B está prestes a deslizar quando $\theta = 60^\circ$.



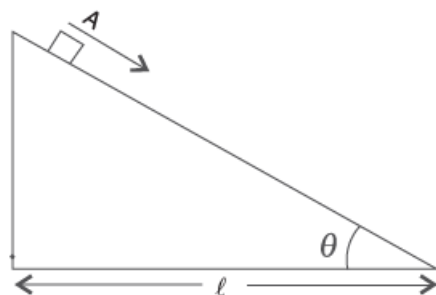
a) É possível haver equilíbrio se θ fosse 70° ?

b) Para $\theta = 60^\circ$, calcule a razão entre a tensão no fio do pêndulo imediatamente após a corda ser cortada e a tensão no fio antes de a corda ser cortada.

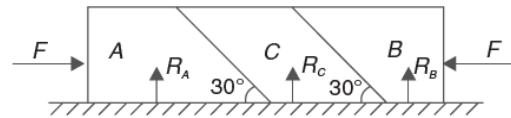
35. Dois blocos de massas iguais foram colocados sobre duas faces de uma cunha fixa, conforme mostrado na figura. Os blocos são liberados a partir da posição em que o centro de um deles está a uma altura h acima do centro do outro bloco. Determine o tempo após o qual os centros dos dois blocos estarão no mesmo nível horizontal. Não há atrito em nenhuma parte do sistema.



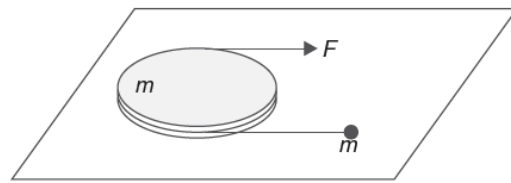
36. Um pequeno corpo A começa a deslizar a partir do topo de uma cunha, cuja base é igual a ℓ . O coeficiente de atrito entre o corpo e a superfície da cunha é $\mu = 1,0$. Para qual valor do ângulo θ o tempo de deslizamento será mínimo?



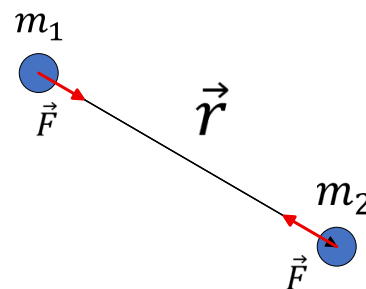
37. Três blocos A , B e C , cada um de massa m , são colocados sobre uma mesa horizontal lisa. Também não há atrito entre as superfícies de contato dos blocos. Uma força horizontal F é aplicada em cada um dos blocos A e B , conforme mostrado. Determine a razão entre as forças normais exercidas pela mesa sobre os três blocos, isto é, $R_A : R_B : R_C$. Considere:



38. Um disco de massa m está apoiado horizontalmente sobre uma mesa lisa. Um fio leve passa pela metade de sua circunferência, conforme mostrado na figura. Uma das extremidades do fio está presa a uma partícula de massa m , enquanto a outra extremidade está sendo puxada por uma força F . Não há atrito entre o disco e o fio. Determine a aceleração da extremidade do fio à qual a força está sendo aplicada.



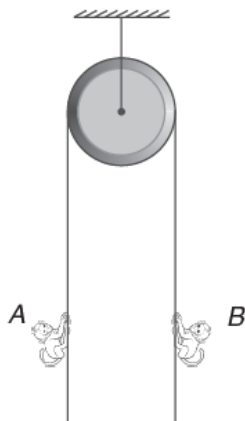
39. Duas partículas de massas m_1 e m_2 estão no espaço, separadas pelo vetor $\vec{r}$. A única força que as duas partículas experimentam é a atração gravitacional mútua. A força exercida por m_1 sobre m_2 é $\vec{F}$. Prove que: $\mu \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{F}$ em que: $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ é conhecida como **massa reduzida** do sistema formado pelas duas partículas.



40. Dois macacos A e B estão segurando os dois lados de uma corda leve que passa sobre uma polia lisa. As massas dos dois macacos são $m_A = 8 \text{ kg}$ e $m_B = 10 \text{ kg}$, respectivamente. Use $g = 10 \text{ m/s}^2$

a) O macaco A segura a corda firmemente, e B desce com uma aceleração $a_r = 2 \text{ m/s}^2$ em relação à corda. Determine o peso que A sente em seu próprio corpo.

b) Qual é o peso experimentado pelos dois macacos se A segura a corda firmemente e B desce com uma aceleração $a_r = 4 \text{ m/s}^2$ em relação à corda?



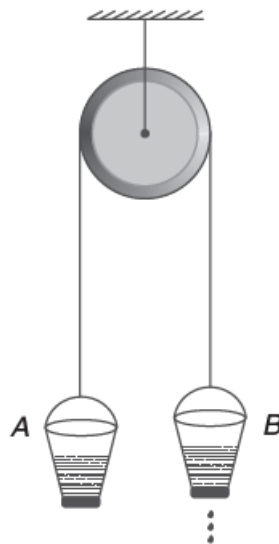
41. Duas partículas estranhas A e B , no espaço, não exercem força uma sobre a outra quando estão separadas por uma distância maior que $x_0 = 1,0 \text{ m}$. Quando estão a uma distância menor que x_0 , elas se repelem ao longo da linha que as une. A força de repulsão é constante e não depende da distância entre as partículas. Essa força repulsiva produz uma aceleração de 6 m/s^2 em A e de 2 m/s^2 em B quando as partículas estão separadas por uma distância menor que x_0 . Em um experimento, a partícula B é lançada em direção a A , com velocidade de 2 m/s , a partir de uma grande distância, de modo a atingir A frontalmente. A partícula A está inicialmente em repouso, e o sistema formado pelas duas partículas não sofre nenhuma força externa.

a) Determine a razão entre a massa de A e a massa de B .

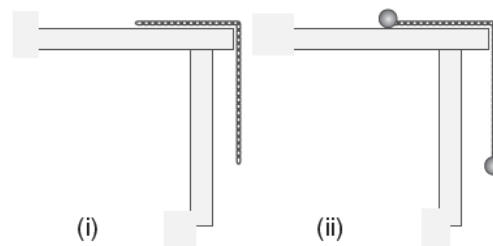
b) Determine a distância mínima entre as partículas durante o movimento subsequente.

c) Determine a velocidade final das duas partículas.

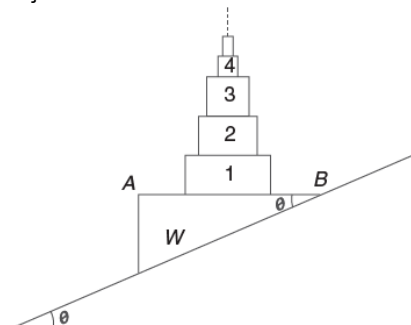
42. Uma corda leve, passando sobre uma polia lisa, sustenta dois baldes idênticos em suas extremidades. A massa de cada balde vazio é M , e cada um deles contém uma massa M de areia. O sistema estava em equilíbrio quando surgiu um pequeno vazamento no balde B (considere esse instante como $t = 0$). A areia deixa o balde a uma taxa constante de $\mu \text{ kg/s}$. Suponha que as partículas de areia que deixam o balde não tenham velocidade relativa em relação a ele — isto é, não há força impulsiva sobre o balde, como ocorre quando os gases de escape deixam um foguete. Determine a velocidade (V_0) dos dois baldes no instante em que B estiver completamente vazio.



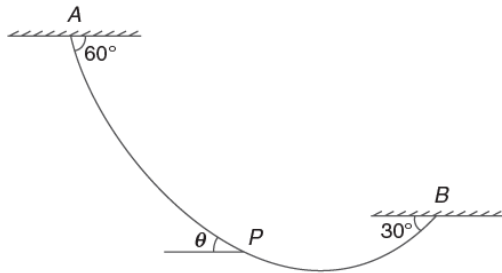
43. Uma corrente está sobre uma mesa lisa, com metade de seu comprimento pendurada sobre a borda da mesa figura 1. Se a corrente for liberada, ela escorregará da mesa no tempo t_1 . Agora, duas pequenas esferas idênticas são presas às duas extremidades da corrente, e o sistema é liberado figura 2. Dessa vez, a corrente levou um tempo t_2 para escorregar da mesa. Qual dos tempos é maior: t_1 ou t_2 ?



44. Uma cunha triangular W , de massa M , é colocada sobre um plano inclinado, com sua face AB na horizontal. A inclinação do plano é θ . Sobre a superfície horizontal plana da cunha, há uma pilha infinita de blocos retangulares. Os blocos 1, 2, 3, 4, ... têm massas $M, \frac{M}{2}, \frac{M}{4}, \frac{M}{8}, \dots$, respectivamente. Todas as superfícies são lisas. Determine a força de contato entre os blocos 1 e 2 depois que o sistema for liberado a partir do repouso. Determine também a aceleração da cunha.



45. Uma corrente uniforme de massa $M = 4,8 \text{ kg}$ está pendurada em um plano vertical, conforme mostrado na figura.



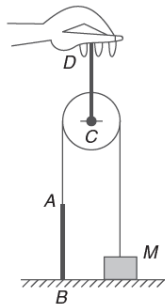
a) Mostre que a componente horizontal da tensão é a mesma em toda a corrente.

b) Determine a tensão na corrente no ponto P , onde a corrente forma um ângulo $\theta = 15^\circ$ com a horizontal.

c) Determine a massa do segmento AP da corrente. Considere:

$$g = 10 \text{ m/s}^2, \cos 15^\circ = 0,96, \sin 15^\circ = 0,25$$

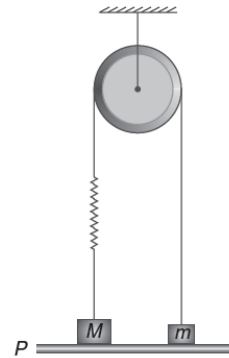
46. No sistema mostrado na figura, AB e CD são cordas elásticas idênticas, ambas com constante elástica K . A corda conectada ao bloco de massa M é inextensível e sem massa. A polia também não possui massa. Inicialmente, as cordas estão apenas esticadas, sem tensão. A extremidade D da corda CD é deslocada gradualmente para cima. Determine o deslocamento vertical da extremidade D no instante em que o bloco deixa o chão.



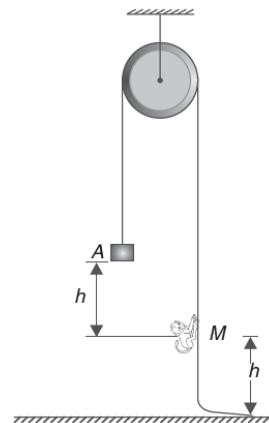
47. Na configuração mostrada na figura, a polia, a mola e o fio são ideais. A mola está esticada, e os dois blocos estão em contato com uma plataforma horizontal P . Quando a plataforma é gradualmente deslocada 2 cm para cima, a tensão no fio se torna nula. Se a plataforma for gradualmente deslocada 2 cm para baixo a partir de sua posição original, um dos blocos perderá o contato com a plataforma. Considere $M = 4 \text{ kg}$ e $m = 2 \text{ kg}$.

a) Determine a constante elástica (k) da mola.

b) Se a plataforma continuar a se mover para baixo depois que um dos blocos perder o contato, o outro bloco também perderá o contato? Considere que a plataforma se move muito lentamente.



48. Na configuração mostrada na figura, um macaco de massa M mantém a si próprio e o bloco A em repouso segurando firmemente a corda. A corda é leve e a polia é ideal. As alturas do macaco e do bloco A em relação ao chão são h e $2h$, respectivamente [$h = 2,5 \text{ m}$].



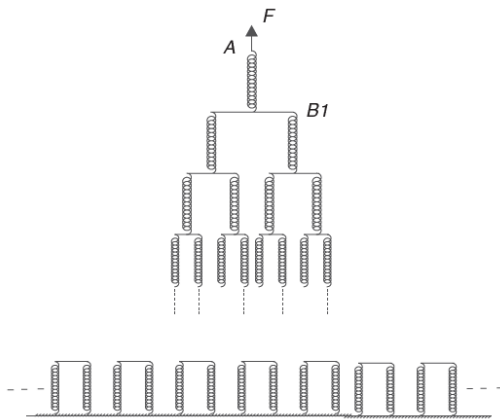
a) O macaco solta a corda e desliza para baixo até o chão. A que altura em relação ao solo estará o bloco A no instante em que o macaco atingir o chão?

b) Outro bloco, de massa igual à do bloco A , é fixado ao bloco A , e o sistema é liberado. O macaco decide manter-se a uma altura h acima do chão e permite que a corda deslize por sua mão. Com que velocidade o bloco atingirá o chão?

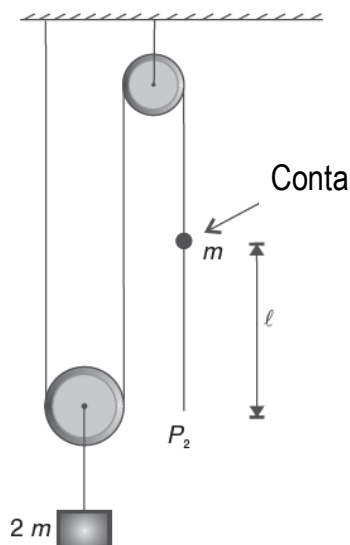
c) Na situação descrita em (b), o macaco decide impedir que o bloco atinja o chão. O macaco permanece à altura h até que o bloco passe por ele. No instante em que o bloco passa pelo macaco, ele começa a subir pela corda. Determine a aceleração mínima do macaco em relação à corda, para que o bloco não consiga atingir o chão. Você acha que um macaco consegue subir com tal aceleração? $g = 10 \text{ m/s}^2$

49. A figura mostra uma torre infinita de molas idênticas, cada uma com constante elástica k . As barras de conexão e todas as molas não possuem massa. Todas as molas estão relaxadas, e a fileira inferior de molas está fixada a um piso horizontal. A extremidade livre da mola superior é puxada para cima por uma força constante F . No equilíbrio, determine:

- O deslocamento da extremidade livre da mola superior em relação à sua posição relaxada.
- O deslocamento da barra superior B_1 em relação à sua posição inicial relaxada.

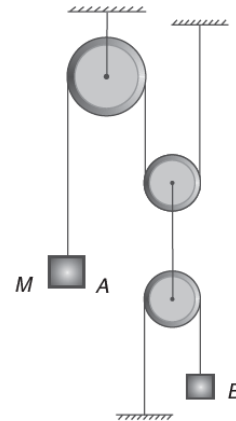


50. No sistema mostrado na figura, uma pequena esfera de massa m pode deslizar sobre a corda. Há atrito entre a esfera e a corda. O bloco tem massa igual ao dobro da massa da esfera. O sistema é liberado a partir do repouso, com um comprimento l da corda pendurado abaixo da esfera. Calcule a distância percorrida pelo bloco antes que a esfera escape da corda. Considere que a corda e a polia não possuem massa.



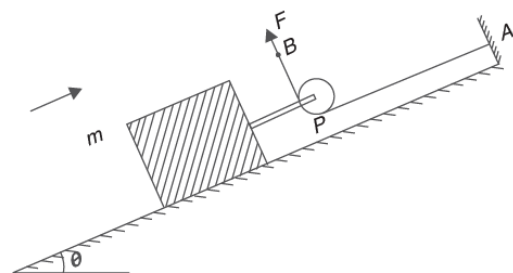
51. Na configuração mostrada na figura, todas as polias não possuem massa, e as cordas são inextensíveis e leves. O bloco A tem massa M .

- Se o sistema permanecer em repouso após ser liberado, determine a massa do bloco B.
- Se a massa do bloco B for o dobro do valor encontrado no item (a), calcule a aceleração do bloco A.



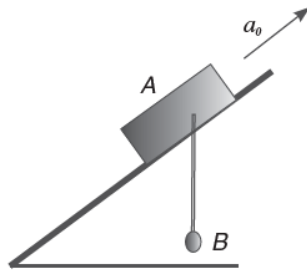
52. Na figura mostrada, a polia e a corda são ideais, isto é, não possuem massa, e o plano inclinado é liso. O segmento AP da corda é paralelo ao plano inclinado, enquanto o segmento PB é perpendicular ao plano. A extremidade da corda é puxada por uma força constante F .

- Se o bloco estiver subindo o plano inclinado com aceleração positiva, mantendo contato com o plano, então o ângulo θ deverá ser menor que θ_0 . Determine θ_0 .
- Se $\theta = \frac{\theta_0}{2}$, determine a aceleração máxima com que o bloco pode subir o plano sem perder contato com o plano inclinado.



53. Um bloco A é obrigado a subir um plano inclinado de inclinação θ com aceleração constante a_0 , conforme mostrado na figura. Uma pequena esfera B, suspensa ao bloco A por meio de um fio leve e inextensível, é mantida na posição vertical e se desloca juntamente com o bloco. Determine o módulo

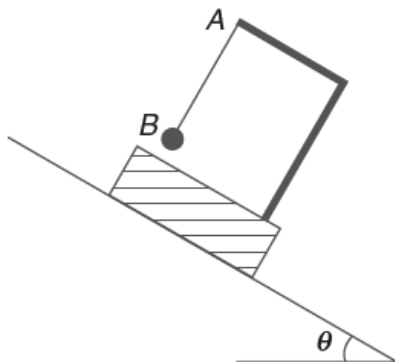
da aceleração do bloco A em relação à esfera imediatamente após a esfera ser solta.



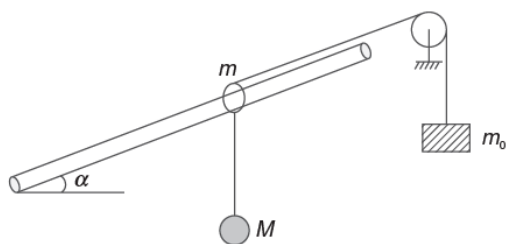
54. Um bloco é colocado sobre um plano inclinado de inclinação θ . Há uma estrutura rígida em forma de L , fixada ao bloco. Um fio de prumo — uma esfera presa a um fio — está conectado à extremidade A da estrutura. O sistema é liberado sobre o plano inclinado. Determine o ângulo que o fio de prumo formará com a vertical, em sua posição de equilíbrio, em relação ao bloco, quando:

a) o plano inclinado for liso;

b) houver atrito e a aceleração do bloco for igual à metade do seu valor quando o plano inclinado é liso.



55. Uma haste lisa é fixada formando um ângulo α com a horizontal. Um pequeno anel de massa m pode deslizar ao longo da haste. Um fio, que sustenta uma pequena esfera de massa M , está preso ao anel. Para manter o sistema em equilíbrio, outro fio é preso ao anel e sustenta, em sua extremidade, uma carga de massa m_0 . O fio é paralelo à haste no trecho entre o anel e a polia.

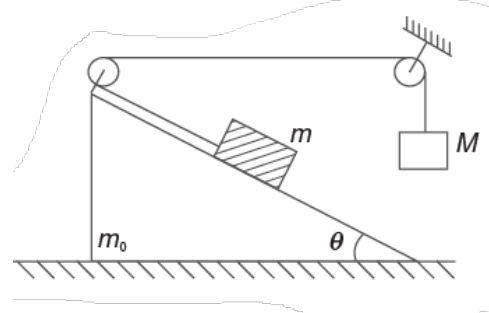


Todos os fios e a polia são de massa desprezível.

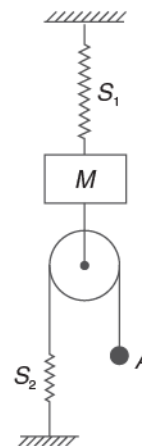
a) Determine m_0 para que o sistema permaneça em equilíbrio.

b) Determine a aceleração da esfera M imediatamente após o fio que sustenta m_0 ser cortado.

56. No sistema mostrado na figura, todas as superfícies são lisas, e as cordas e polias são leves. O ângulo da cunha é: $\theta = \sin^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)$. Quando o sistema é liberado a partir do repouso, observa-se que a cunha de massa m_0 não se move. Determine $\frac{M}{m}$.



57. No sistema mostrado na figura, as duas molas S_1 e S_2 possuem, cada uma, constante elástica k . A polia, as molas e os fios são todos de massa desprezível. Inicialmente, o sistema está em equilíbrio, com a mola S_1 esticada e a mola S_2 relaxada. A extremidade A do fio é puxada lentamente para baixo por uma distância L . Por qual distância o bloco de massa M se desloca?

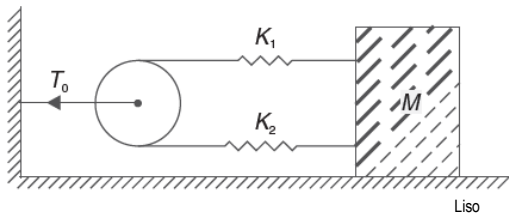


58. Na figura mostrada, a polia, os fios e as molas têm massa desprezível. O bloco é deslocado para a direita por uma distância x_0 , a partir da posição em que as duas molas estão relaxadas. O bloco é liberado a partir dessa posição.

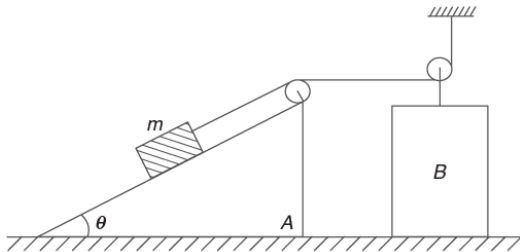
a) Determine a aceleração do bloco imediatamente após ele ser liberado.

b) Determine a tensão (T_0) no suporte que mantém a polia presa à parede, imediatamente após o bloco ser liberado.

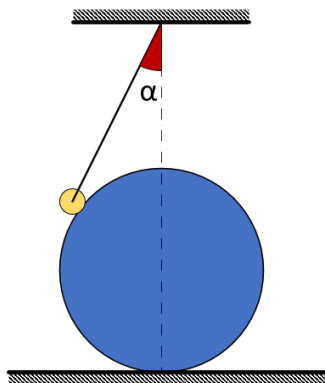
Considere que não há atrito.



59. No sistema mostrado na figura, todas as superfícies são lisas, e ambas as polias não possuem massa. O bloco que está sobre a superfície inclinada da cunha A tem massa m . As massas de A e B são, respectivamente: $M = 4m$ e $M_0 = 2m$. Determine a aceleração da cunha A quando o sistema é liberado a partir do repouso.

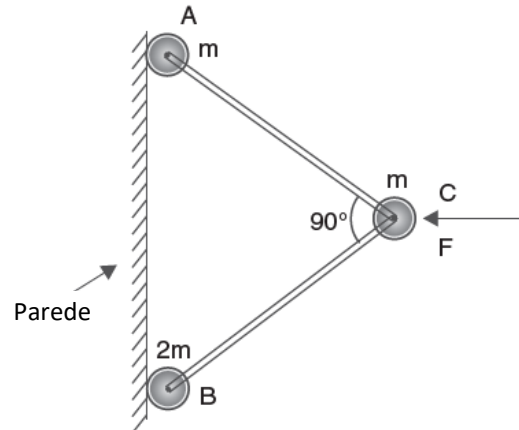


60. Uma esfera de massa M está em repouso sobre um piso horizontal. Uma extremidade de um fio leve está presa a um ponto situado verticalmente acima do centro da esfera. A outra extremidade do fio está conectada a uma pequena partícula de massa m , que está em repouso sobre a esfera. O fio forma um ângulo $\alpha = 30^\circ$ com a vertical. Determine a aceleração da esfera imediatamente após ela ser liberada. Não há atrito em nenhuma parte do sistema.

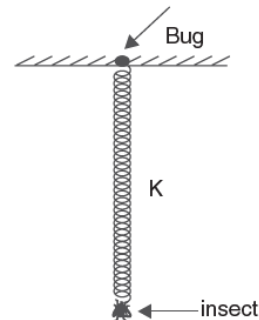


61. Três pequenos discos estão conectados por duas hastes idênticas e sem massa, conforme mostrado na figura. As hastes são articuladas aos discos, de modo

que o ângulo entre elas possa variar livremente. O sistema é colocado sobre uma superfície horizontal lisa, com os discos A e B encostando em uma parede lisa, e com o ângulo ACB igual a 90° . Uma força F é aplicada ao disco C, em uma direção perpendicular à parede. Determine a aceleração do disco B imediatamente após a força começar a atuar. As massas dos discos são: $m_A = m$, $m_B = 2m$, $m_C = m$ (A parede é perpendicular ao plano da figura.)



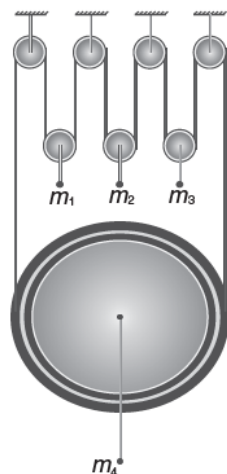
62. Uma mola sem massa, de constante elástica K e comprimento natural ℓ_0 , está pendurada no teto. Um inseto de massa m está apoiado na extremidade inferior da mola, e o sistema encontra-se em equilíbrio. O inseto começa a subir lentamente pela mola para comer um inseto que está no teto. Suponha que o inseto suba sem escorregar sobre a mola e que: $K = \frac{mg}{\ell_0}$. Determine o comprimento da mola quando o inseto estiver a uma distância igual a $\frac{1}{4}$ de sua distância original até o inseto situado no teto.



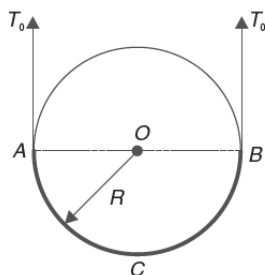
63. No sistema mostrado na figura, todas as polias são de massa desprezível, e o fio é inextensível e leve.

a) Após o sistema ser liberado, determine a aceleração da massa m_1 .

b) Se $m_1 = 1 \text{ kg}$, $m_2 = 2 \text{ kg}$ e $m_3 = 3 \text{ kg}$, qual deve ser o valor da massa m_4 para que ela acelere para baixo?



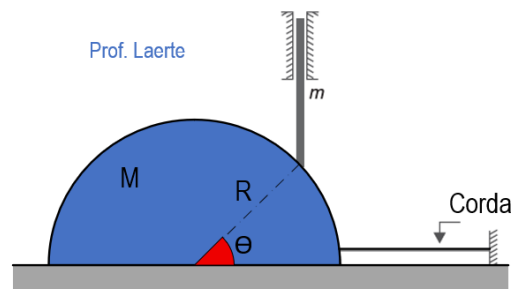
64. Um cilindro lizo está fixo, com seu eixo na direção horizontal. O raio do cilindro é R . Uma corda uniforme ACB , de densidade linear de massa λ , possui comprimento exatamente igual a πR e é mantida na forma semicircular, em um plano vertical, ao redor do cilindro, conforme mostra a figura. Duas cordas auxiliares, de massa desprezível, estão ligadas às extremidades A e B da corda principal. Essas cordas são puxadas verticalmente para cima por forças de módulo T_0 , mantendo a corda em contato com o cilindro.



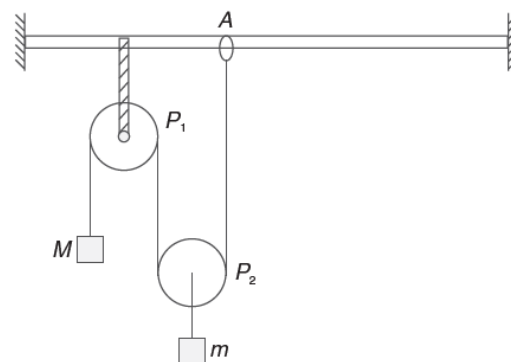
- Determine o menor valor de T_0 para que a corda não perca o contato com o cilindro em nenhum ponto.
- Se T_0 for reduzida ligeiramente abaixo do valor mínimo encontrado no item (a), em que ponto a corda perderá o contato com o cilindro?

65. Um hemisfério de massa M e raio R repousa sobre uma mesa horizontal lisa. Uma haste vertical de massa m é mantida entre duas paredes-guia lisas, apoiadas sobre o hemisfério, conforme mostrado na figura. Não há atrito entre a haste e o hemisfério. Uma corda horizontal, presa ao hemisfério, mantém o sistema em repouso.

- Determine a tensão no fio.
- Determine a aceleração do hemisfério imediatamente após o fio ser cortado.

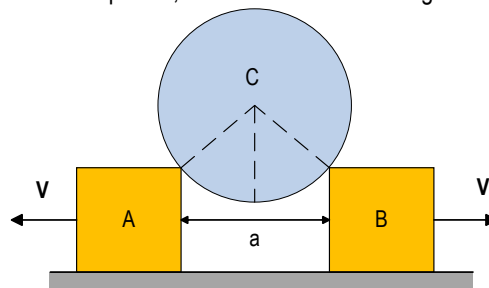


66. O arranjo mostrado na figura está em equilíbrio, com todas as cordas na posição vertical. A extremidade A da corda está presa a um anel que pode deslizar lentamente sobre uma haste horizontal. A polia P_1 está rigidamente fixa, mas P_2 pode se mover livremente. Uma massa m está presa ao centro da polia P_2 por meio de um fio. As polias e as cordas têm massa desprezível.



- Qual bloco se moverá para cima à medida que A for deslocado lentamente para a direita?
- O bloco de massa m terá deslocamento horizontal?
- É possível que, para uma determinada posição de A , M não tenha aceleração, mas m tenha aceleração? Se isso ocorrer quando a corda de P_2 até A formar um ângulo θ com a vertical, determine a aceleração de m nesse instante.

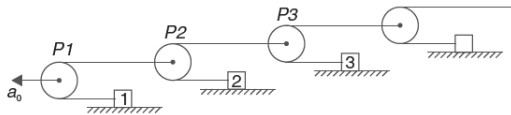
67. Uma esfera lisa, de massa $M = 2 \text{ kg}$, está apoiada sobre dois blocos idênticos A e B , conforme mostrado na figura. Os blocos são afastados com a mesma velocidade horizontal $V = 1 \text{ m/s}$, em sentidos opostos, conforme mostrado na figura.



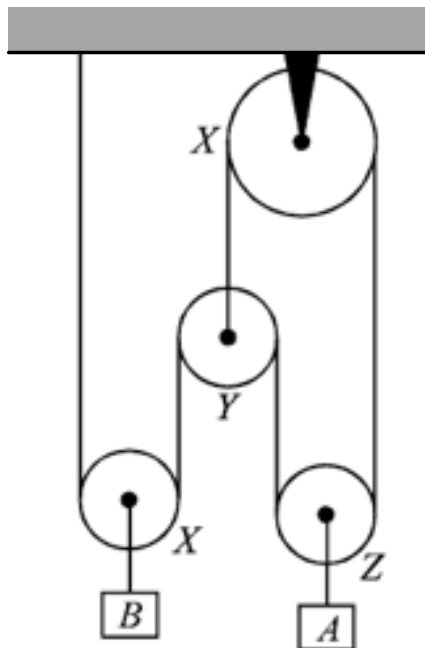
a) Determine a força normal exercida por cada um dos blocos sobre a esfera no instante em que a distância entre os blocos é: $a = \sqrt{2}R$, sendo: $R = 1,0 \text{ m}$ o raio da esfera.

b) Qual força deve ser aplicada a cada um dos dois blocos, quando: $a = \sqrt{2}R$, para que eles não tenham aceleração? Considere que a superfície horizontal é lisa.

68. Na figura, todas as polias ($P_1, P_2, P_3, \dots$) são de massa desprezível, e todos os blocos (1, 2, 3, ...) são idênticos, cada um com massa m . O sistema é constituído por um número infinito de polias e blocos. As cordas são leves e inextensíveis, e as superfícies horizontais são lisas. A polia P_1 é movimentada para a esquerda com uma aceleração constante a_0 . Determine a aceleração do bloco 1. Considere que as cordas permanecem horizontais.



69. A Figura mostra um sistema de quatro polias com duas massas A e B . Determine, em um determinado instante:

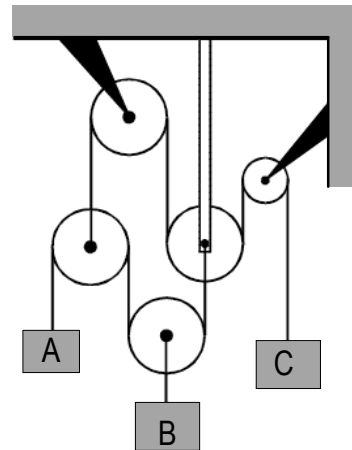


a) A velocidade do bloco A quando o bloco B está subindo com velocidade de 1 m/s e a polia Y está subindo com velocidade de 2 m/s .

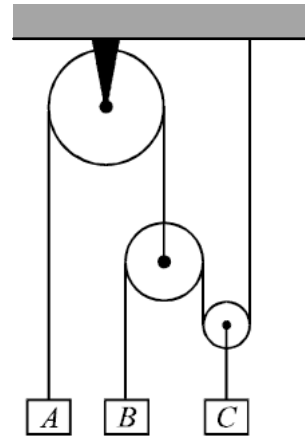
b) A aceleração do bloco A quando o bloco B está subindo com aceleração de 3 m/s^2 e a polia Y está descendo com aceleração de 1 m/s^2 .

70. Encontre a relação entre as acelerações das três massas mostradas nas Figuras.

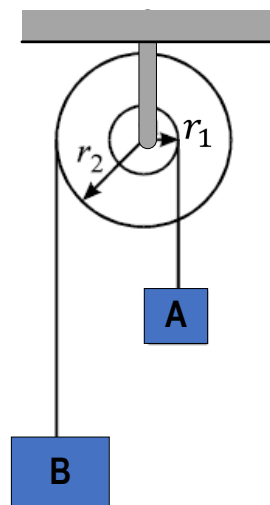
A)



B)

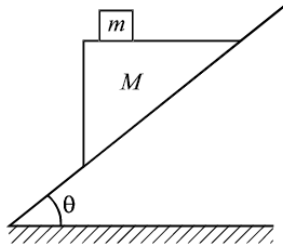


71. Considere a situação mostrada na Figura. Determine a relação de restrição entre as velocidades dos blocos A e B .

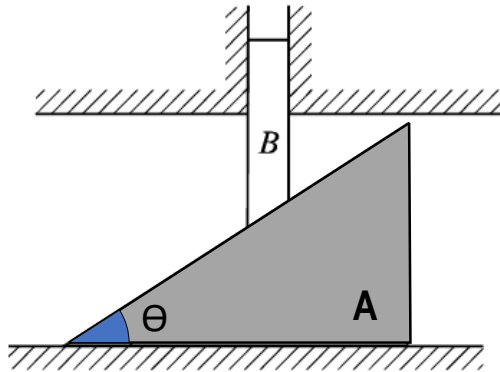


72. Na situação mostrada na Figura, se a massa M estiver descendo ao longo do plano inclinado com

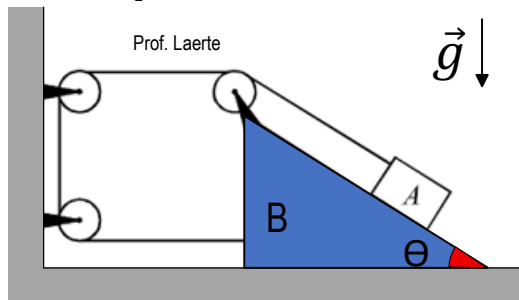
uma aceleração de 5 m/s^2 e m estiver se movendo horizontalmente para a direita em relação a M , com uma aceleração de 3 m/s^2 , determine a aceleração resultante de m .



73. Determine a relação entre as acelerações da cunha A e da barra B , apoiada sobre a cunha A . A barra B está restrita a se mover verticalmente por meio de dois cantos fixos na parede, conforme mostrado na Figura.



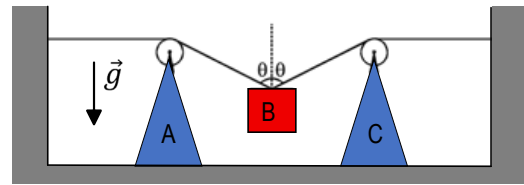
74. A Figura mostra um bloco A restrito a deslizar ao longo do plano inclinado da cunha B , conforme mostrado. O bloco A está preso a uma corda que passa por três polias ideais e está conectada à cunha B . Se a cunha for puxada para a direita com uma aceleração a_1 :



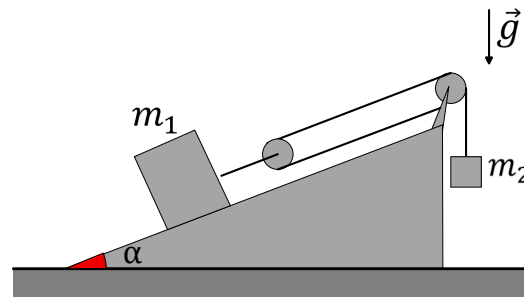
- Determine a aceleração do bloco em relação à cunha.
- Determine a aceleração do bloco em relação ao solo.

75. Determine a velocidade do bloco B quando as cunhas A e C estão se movendo uma em direção à outra, ambas com velocidade v , e as cordas

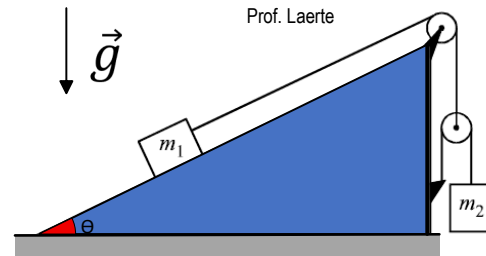
conectadas ao bloco formam um ângulo θ com a vertical, conforme mostrado na Figura.



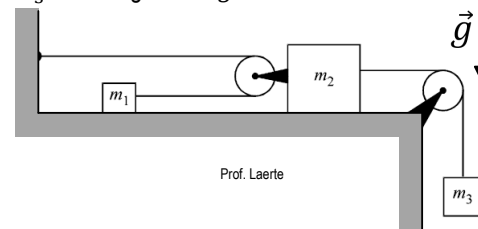
76. Determine a aceleração das massas m_1 e m_2 , que se movem para baixo ao longo do plano inclinado liso. A corda e a polia são de massas desprezíveis e não há atrito.



77. Determine a aceleração do corpo de massa m_2 , no arranjo mostrado na figura, sabendo que a massa m_2 é η vezes maior que a massa m_1 e que o ângulo formado pelo plano inclinado com a horizontal é igual a θ . As massas das polias e das cordas, assim como o atrito, são consideradas desprezíveis.

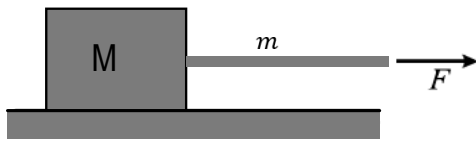


78. Determine as tensões nas duas cordas e as acelerações dos blocos na Figura, considerando que o atrito é desprezível. As polias são de massa desprezível e sem atrito, $m_1 = 200 \text{ g}$, $m_2 = 500 \text{ g}$ e $m_3 = 400 \text{ g}$. Adote $g = 10 \text{ m/s}^2$.



79. Um bloco de massa M é puxado sobre uma superfície horizontal sem atrito por uma corda de massa m , conforme mostrado na Figura. Uma força

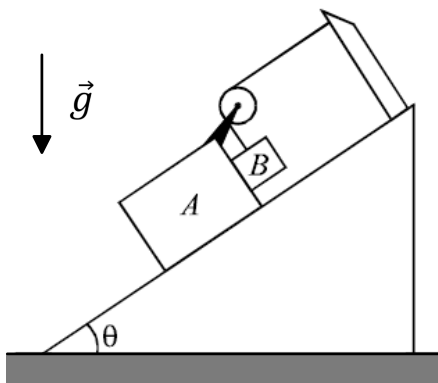
horizontal F é aplicada a uma das extremidades da corda.



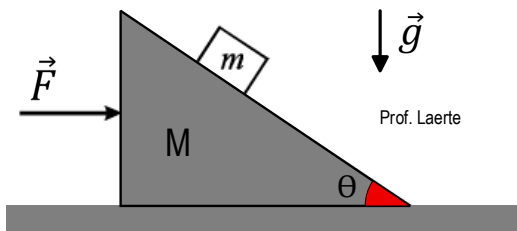
a) Determine a força que a corda exerce sobre o bloco.

b) Determine a tensão na corda em seu ponto médio.

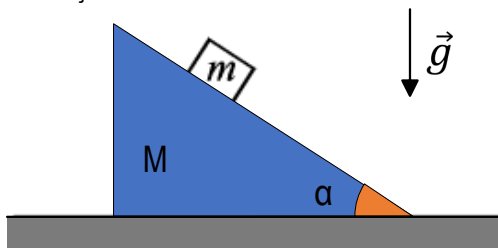
80. Um bloco A , de massa M , está sobre uma superfície inclinada, e um pequeno peso B , de massa m , está preso a uma corda, conforme mostrado na Figura. Determine a aceleração dos blocos A e B depois que o sistema for liberado a partir do repouso.



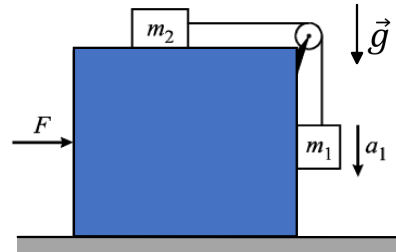
81. A Figura mostra um bloco de massa m colocado sobre uma cunha de massa M , apoiada sobre uma superfície lisa. Qual é o valor da força F que deve ser aplicada sobre M para que, durante o movimento, m permaneça em repouso sobre sua superfície?



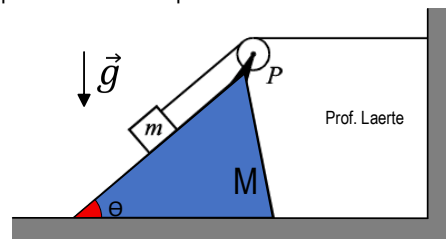
82. A Figura mostra um bloco de massa m colocado sobre uma cunha inclinada de massa M . Se o sistema for liberado a partir do repouso, determine as acelerações de m e M .



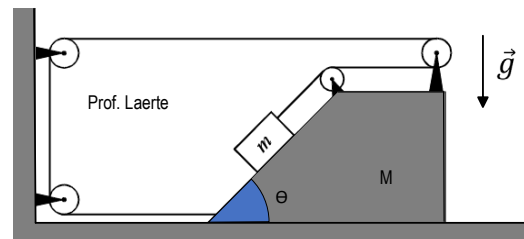
83. A Figura mostra um bloco grande, de massa M , que sustenta dois pequenos blocos de massas m_1 e m_2 , conectados por uma corda leve e inextensível. Uma força F atua sobre M , de modo que o bloco m_1 desliza para baixo com uma aceleração a_1 . Determine a força F aplicada sobre M e também a aceleração de M . Considere que todas as superfícies são sem atrito.



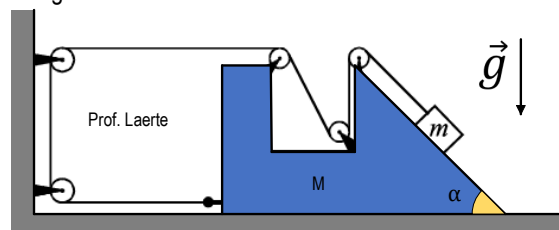
84. Na Figura, um bloco de massa m está sobre a face inclinada lisa de uma cunha de massa M , cuja inclinação em relação à horizontal é θ . A cunha está apoiada sobre um plano horizontal liso. Supondo que a polia seja lisa e que a corda seja leve e inextensível, determine a aceleração de M , considerando que M e m permanecem sempre em contato.



85. A Figura mostra um bloco de massa M sustentando uma barra de massa m por meio de um sistema de polias. Se o sistema for liberado a partir do repouso, determine a aceleração do bloco M e a tensão nas cordas.



86. Determine a aceleração da massa m , mostrada na figura.

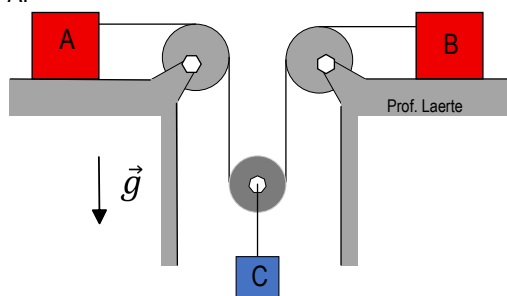


87. Deseja-se suspender uma pedra de massa m desde o solo até uma altura H . Para isso, amarra-se a pedra a uma corda de massa desprezível e puxa-se verticalmente pela extremidade livre. Sabendo-se que a corda suporta uma tração máxima T sem se partir, determine o tempo mínimo que será gasto para suspender essa pedra, de forma que ela deve atingir a altura final H em repouso. Considere g a gravidade local.

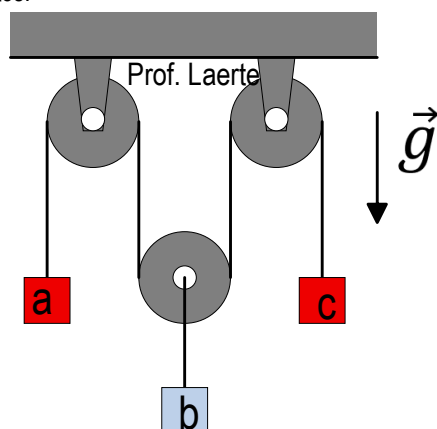
88. No sistema representado na figura, os fios e as polias são ideais, não há atrito e as massas dos blocos A, B e C são respectivamente iguais a 15 kg, 10 kg e 24 kg. A aceleração da gravidade tem módulo 10 m/s^2 . Sendo a_A , a_B e a_C os módulos das acelerações dos blocos A, B e C, respectivamente, determine:

a) os valores de a_A , a_B e a_C ;

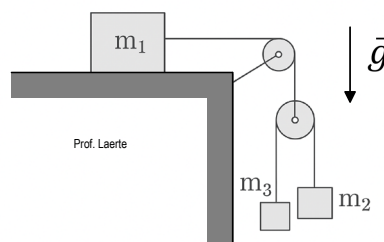
b) o módulo da tração no fio que está ligado ao bloco A.



89. A figura mostra duas polias fixas ao teto e uma polia móvel, todas de massas desprezíveis. Se as massas das caixas a , b e c valem, respectivamente, 3 kg, 2 kg e 1 kg, o prof. Laerte pede para você determinar as acelerações de cada uma das caixas, indicando o sentido. Adote $g = 10 \text{ m/s}^2$ e despreze atritos.



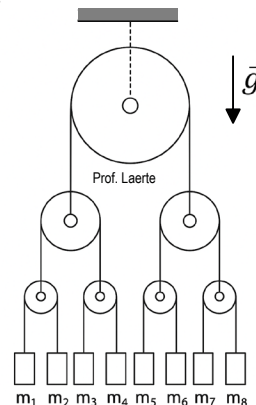
90. Na figura, os fios e polias são ideais e as massas m_1 , m_2 e m_3 valem respectivamente m , $2m$ e m . Se a gravidade local vale g , pede-se determinar a aceleração de cada caixa.



91. Na figura, todos os fios e polias são ideais. Supondo conhecidas todas as massas $m_1, m_2, m_3, \dots, m_8$ de todos os blocos, bem como a gravidade local g , determine:

a) a tração em cada um dos fios conectados diretamente aos blocos;

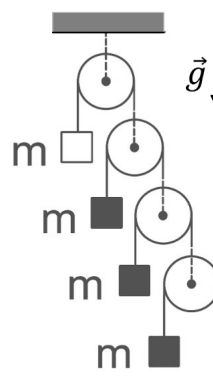
b) a aceleração de cada um dos 8 blocos.



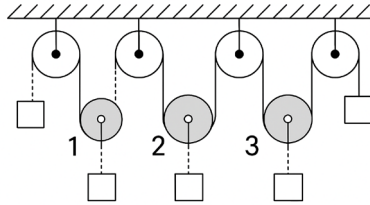
92. O sistema da figura é composto por infinitas caixas de mesma massa m sucessivamente conectadas através de fios e polias ideais. Se a gravidade local vale g , utilizando a ideia da questão anterior (o conceito de inércia equivalente) determine:

A) a aceleração da primeira caixa de cima (caixa branca);

B) a tração no fio que prende a primeira polia de cima ao teto.

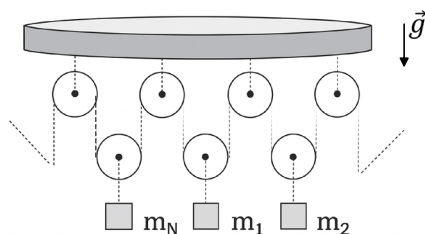


93. A figura mostra um sistema composto por 3 polias móveis (polias cinzas) e $3 + 2 = 5$ caixas idênticas de mesma massa m conectadas por fio e polias ideais. Se o sistema contivesse N polias móveis e, portanto, $N + 2$ caixas de mesma massa m , qual seria a aceleração de cada caixa? A gravidade local vale g .

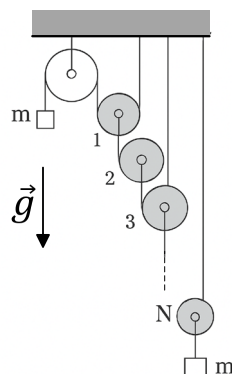


94. A figura mostra um sistema composto por N polias fixas suspensas ao longo de uma grande argola circular horizontal. Um conjunto de N polias móveis está suspenso ao conjunto de polias fixas através de um único fio ideal que dá a volta em todo o percurso circular (looping). N caixas de massas $m_1, m_2, m_3, \dots, m_N$ estão presas às N polias móveis suspensas pelo fio.

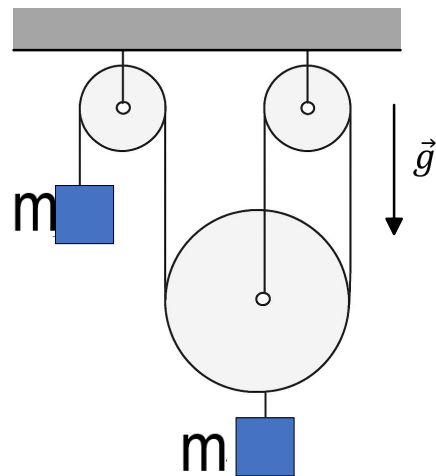
- Qual a aceleração a_i da i -ésima caixa de massa m_i ?
- Se apenas a massa de uma das caixas for nula ($m_k = 0$), qual aceleração ela irá adquirir? E as outras $N - 1$ caixas?
- Se $N - 1$ caixas forem idênticas e tiverem massa muito menor do que a caixa remanescente, que aceleração as caixas vão adquirir?



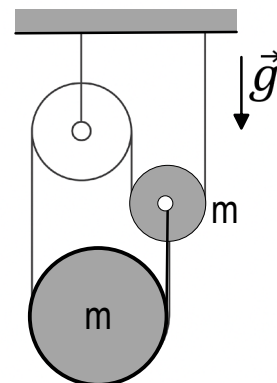
95. A figura mostra um sistema composto por 1 polia fixa e um conjunto de N polias móveis (cinzas) ideais. Determine as acelerações dos blocos em função de N e g .



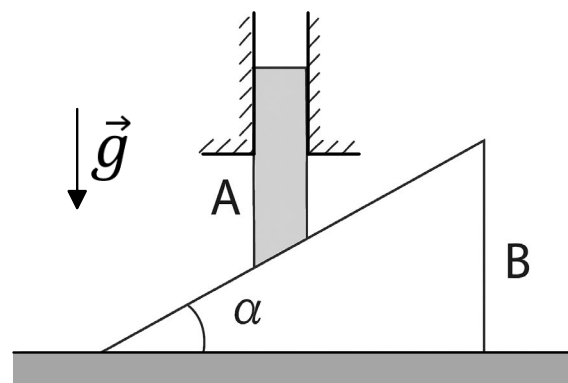
96. A figura mostra uma máquina de Atwood com duas massas iguais a m . O eixo da polia inferior tem duas extremidades de cordas presas a ele. Determine a aceleração de cada caixa. A gravidade local vale g .



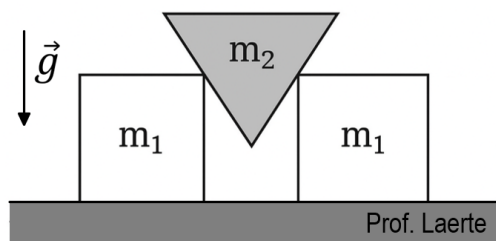
97. Na máquina de Atwood da figura, as duas polias inferiores (destacadas em cinza) têm massa m cada uma. O fio ideal escorrega ao redor das polias sem nenhum atrito (portanto, não você não precisa se preocupar com a inércia rotacional das polias). Se a gravidade local vale g , determine as acelerações das polias móveis (destacadas em cinza).



98. Determine a aceleração da barra A e da cunha B na figura abaixo, sabendo que a razão entre as massas m_B e m_A vale η , a gravidade local vale g e todos os atritos são desprezíveis.



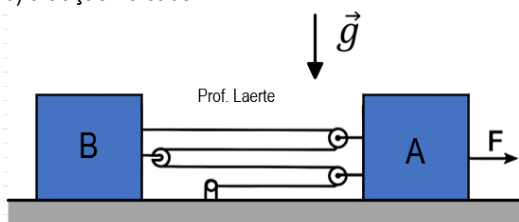
99. Sejam dois cubos idênticos de mesma massa $m_1 = 3 \text{ kg}$ e uma cunha de massa $m_2 = 2 \text{ kg}$ e seção triangular equilátera simetricamente posicionada entre eles. Desprezando-se todos os atritos, pede-se determinar a aceleração vertical adquirida pela cunha, quando o sistema for abandonado a partir do repouso ($g = 10 \text{ m/s}^2$).



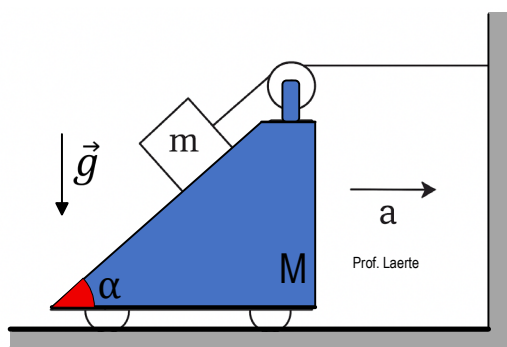
100. A figura mostra dois blocos A e B de massas $m_A = 8 \text{ kg}$ e $m_B = 6 \text{ kg}$, puxados por uma força de intensidade $F = 56 \text{ N}$ sobre um solo liso. O prof. Laerte pede que você determine:

a) a aceleração de cada bloco;

b) a tração no cabo.

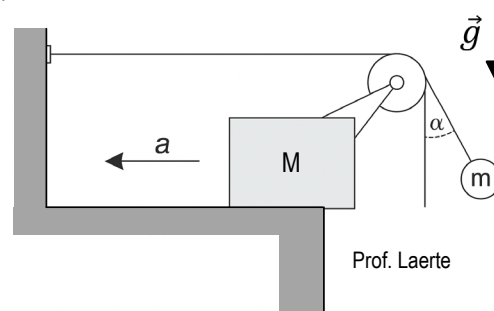


101. Na figura, as massas m da caixa e M da cunha, assim como o ângulo α da rampa, são conhecidos. Todos os fios são ideais e os atritos são desprezíveis. Pede-se determinar a aceleração adquirida pela cunha.

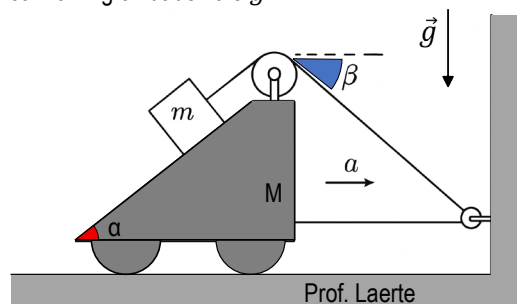


102. Na figura, após o pêndulo ser abandonado do repouso, o bloco acelera para a esquerda de forma que a inclinação α do pêndulo com a vertical permaneça constante. O prof. Laerte pede que você determine a massa do bloco e a sua aceleração, em função da massa da bola m , da gravidade local g e

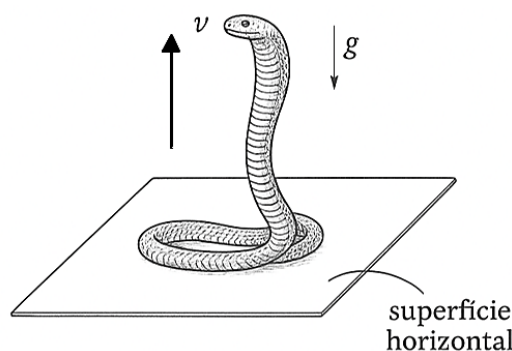
do ângulo α . Todos os atritos são desprezíveis; fios e polias são ideais.



103. Na figura, as massas m do bloco e M da cunha, assim como os ângulos α e β , são todos conhecidos. Todos os fios são ideais e os atritos são desprezíveis. Pede-se determinar a aceleração adquirida pela cunha. A gravidade vale g .



104. Uma cobra de comprimento L tem massa m distribuída uniformemente. Se começa a se elevar com velocidade constante v para saltar, que valor tem a força com que pressiona a superfície enquanto tenta saltar?

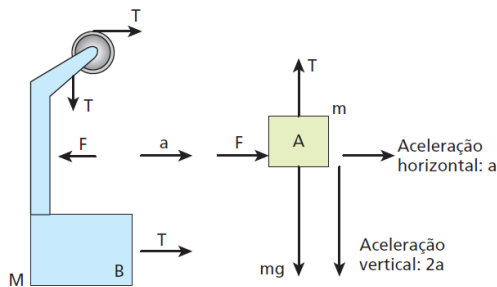


- A) $m \left(g + \frac{v^2}{2L} \right)$
- B) $\frac{m}{2} \left(2g + \frac{v^2}{L} \right)$
- C) $m \left(g - \frac{v^2}{L} \right)$
- D) $m \left(g + \frac{v^2}{L} \right)$
- E) $m \left(2g - \frac{v^2}{2L} \right)$

Gabarito – parte 2

1. 60 cm/s
2. $V_A = 100 \text{ km/h}$, $V_B = 160 \text{ km/h}$
3. $V_A = 40 \text{ cm/s}$,
4. 20 m/s
5. 15 m/s
11. $V_A = 40 \text{ m/s}$, $V_B = 20 \text{ m/s}$
12. 8 cm/s
13. Desce com 4 m/s
14. Subindo com 12 m/s
15. $V_A = 10 \text{ m/s}$ $V_B = 15 \text{ m/s}$
16. 6 m/s
17. 4 s
- 18.
- 19.
20. $V_A = 40 \text{ cm/s}$.

21. Resolução do Laerte:



Movimento horizontal do corpo A:

$$F = m \cdot a \quad (I)$$

Movimento horizontal do corpo B:

$$2T - F = M \cdot a \quad (II)$$

Substituindo (I) em (II):

$$2T - m \cdot a = M \cdot a$$

$$T = \frac{m + M}{2} a \quad (III)$$

Movimento vertical do corpo A:

$$m \cdot g - T = 2m \cdot a \quad (IV)$$

Substituindo (III) em (IV):

$$m \cdot g - \left(\frac{m + M}{2} \right) a = 2m \cdot a$$

$$m \cdot g = \left(2m + \frac{m + M}{2} \right) a$$

$$a = \frac{2m}{5m + M} g$$

Observando que a aceleração vertical do corpo A tem intensidade igual ao dobro da aceleração horizontal do conjunto A + B, temos:

$$a_A = 2a$$

$$a_A = \frac{4m}{5m + M} g$$

MUV:

$$\Delta s = v_0 t + \frac{a}{2} t^2$$

$$h = \frac{4m}{2(5m + M)} g t^2$$

$$t = \sqrt{\frac{(5m + M)h}{2mg}}$$

Resposta:

$$t = \sqrt{\frac{(5m + M)h}{2mg}}$$

22. Resolução:

2ª Lei de Newton para a corda toda:

$$M_{\text{total}} a = m_x g + (M_{\text{total}} - m_x) g \sin 30^\circ$$

$$KLa = Kxg + K(L - x) \frac{g}{2}$$

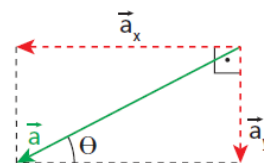
$$a = \frac{g}{2L} \cdot (x + L)$$

Para $g = 10 \text{ m/s}^2$ e $x = \frac{L}{2}$, temos:

$$a = \frac{10}{2L} \left(\frac{L}{2} + L \right) \Rightarrow a = 7,5 \text{ m/s}^2$$

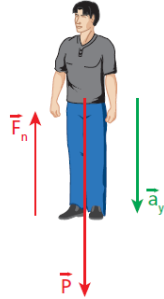
Resposta: c

23. a) A aceleração vetorial, $\vec{a}$, do garoto é paralela à rampa e dirigida para baixo. Essa aceleração admite uma componente horizontal $\vec{a}_x$, dirigida para a esquerda e uma componente vertical $\vec{a}_y$, dirigida para baixo, conforme representa o esquema a seguir:



Devido à aceleração $\vec{a}_x$, o corpo do garoto requer uma força de atrito nesta mesma direção e sentido, isto é, horizontal e dirigida para a esquerda.

b)



(I) Cálculo de $|\vec{a}|$:

$$F_{\text{res}} = P_t \Rightarrow ma = mgsen\theta$$

$$a = gsen\theta \quad (I)$$

(II) Cálculo de $|\vec{a}_y|$:

$$P - F_N = ma_y$$

$$mg - m_{ap}g = ma_y$$

$$10,0(56 - 42) = 56a_y$$

Da qual:

$$a_y = 2,5 \text{ m/s}^2$$

(III) Cálculo de θ :

$$a_y = asen\theta \quad (II)$$

Substituindo I em II, vem:

$$a_y = gsen\theta \cdot sen\theta \Rightarrow a_y = gsen^2\theta$$

$$2,5 = 10,0 \cdot sen^2\theta \Rightarrow sen^2\theta = 0,25$$

$$sen\theta = 0,50 \Rightarrow \theta = 30^\circ$$

24. resolução:

A aceleração é:

$$a = \frac{F}{Nm}$$

em que m é a massa de cada carrinho.

Seja T_1 a tensão entre o 4º e o 5º carrinhos.

Considerando o movimento dos últimos $(N - 4)$ carrinhos, temos:

$$(N - 4)ma = T_1 \quad (1)$$

De modo semelhante, a tensão entre o 8º e o 9º carrinhos (T_2) pode ser determinada considerando o movimento dos últimos $(N - 8)$ carrinhos:

$$(N - 8)ma = T_2 \quad (2)$$

De acordo com o enunciado:

$$T_1 = 2T_2$$

Logo:

$$(N - 4)ma = 2(N - 8)ma$$

$$N - 4 = 2N - 16$$

$$N = 12$$

A tensão no último fio é:

$$T = ma = \frac{F}{N}$$

Portanto:

$$T = \frac{F}{N}$$

Como $N = 12$:

$$T = \frac{F}{12}$$

25. A aceleração de todo o sistema é:

$$a = \frac{F}{m_A + m_B + m_C + m_D + m_{\text{carrinho}}}$$

$$a = \frac{40}{2 + 2 + 1 + 1 + 4}$$

Por que o carrinho acelera? Isso ocorre devido à força que D exerce sobre ele.

$$\therefore N_D = m_{\text{carrinho}} \cdot a = 4 \cdot 4 = 16 \text{ N}$$

26 Resolução:

Massa de A :

$$m_A = M$$

Massa de B :

$$m_B = M - m$$

A aceleração de B depois que o inseto cai é:

$$a_B = \left(\frac{m_A - m_B}{m_A + m_B} \right) g \quad (\uparrow)$$

$$a_B = \frac{mg}{2M - m}$$

A aceleração do inseto é:

$$g \quad (\downarrow)$$

Os dois objetos se separam com uma aceleração relativa de:

$$a = g + \frac{mg}{2M - m} = \frac{2Mg}{2M - m}$$

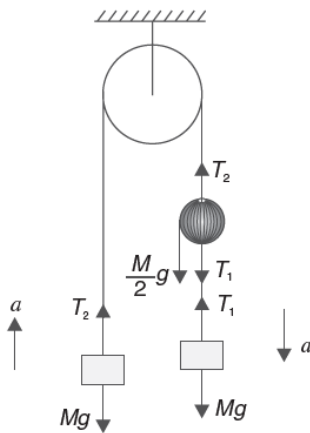
Portanto:

$$\frac{1}{2}at^2 = L$$

$$\left(\frac{Mg}{2M - m} \right) t^2 = L$$

$$t = \sqrt{\frac{(2M - m)L}{Mg}}$$

27. Resolução:



a) A força de atrito entre a esfera e a corda faz com que a tensão varie na corda, nos dois lados da esfera. Para a esfera:

$$T_2 = T_1 + \frac{Mg}{2} \quad (1)$$

Para os blocos:

$$T_2 - Mg = Ma \quad (2)$$

$$Mg - T_1 = Ma \quad (3)$$

Somando (2) e (3):

$$T_2 - T_1 = 2Ma$$

Usando (1):

$$\frac{Mg}{2} = 2Ma \Rightarrow a = \frac{g}{4}$$

b) Nesse caso, a aceleração da esfera é igual à aceleração dos dois blocos.

Na solução acima, a equação (1) passa a ser:

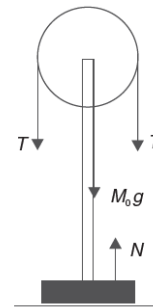
$$\frac{Mg}{2} + T_1 - T_2 = \frac{M}{2}a$$

As outras duas equações permanecem iguais.

Resolvendo as três equações, obtemos:

$$a = \frac{g}{5}$$

28. Resolução do Laerte:



Para o movimento das duas massas, podemos escrever:

$$Mg - T = Ma \quad (1)$$

$$T - mg = ma \quad (2)$$

Resolvendo:

$$T = \frac{2Mmg}{M + m}$$

Agora, consideremos o equilíbrio do sistema formado pelo suporte e pela polia.

N = força normal entre o suporte e a balança

N = leitura da balança

$$N = 2T + M_0g$$

Substituindo o valor de T :

$$N = \frac{4Mmg}{M + m} + M_0g$$

29. A tensão no fio que conecta m_1 e m_2 é:

$$T = \frac{2m_1m_2}{m_1 + m_2} g$$

$\therefore m_0g = 2T$ (para o equilíbrio de $|m_0|$)

$$\Rightarrow m_0 = \frac{4m_1m_2}{m_1 + m_2}$$

Para o equilíbrio de M :

$$Mg = 4T$$

$$M = \frac{8m_1m_2}{m_1 + m_2}$$

30. Resolução do Laerte:

a) Peso do sistema:

$$\text{Peso do sistema} = \frac{9}{2}Mg$$

O suporte da corda S_2 aplica uma força para baixo (T_2).

Portanto, a tensão em S_1 é:

$$\text{Tensão em } S_1 = \frac{9}{2}Mg + T_2$$

b) Para a polia B :

$$2T_2 + Mg = T'_1 \quad (1)$$

Para o inseto:

$$T'_1 + \frac{M}{2}g = T_1 \quad (2)$$

Para C :

$$T_1 + T_2 = 2Mg \quad (3)$$

Resolvendo:

$$T_2 = \frac{Mg}{2}$$

Tensão em S_1 :

$$\text{Tensão em } S_1 = \frac{9}{2}Mg + T_2 = 5Mg$$

c) As equações são:

$$2T_2 + Mg = T'_1 \quad (1)$$

$$T'_1 + \frac{M}{2}g = T_1 \quad (2)$$

$$T_1 + T_2 = 2Mg \quad (3)$$

Somando as equações (1), (2) e (3):

$$3T_2 = \frac{Mg}{2}$$

$$T_2 = \frac{Mg}{6}$$

31. Resolução do Laerte:

$$a = g \sin \theta$$

$$a_x = g \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{2} g \sin 2\theta$$

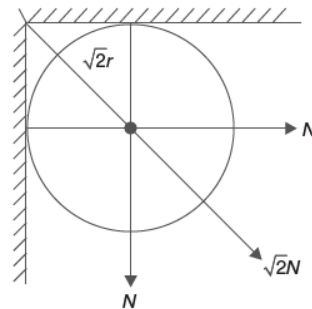
$$\therefore (a_x)_{\text{máx}} = \frac{g}{2}$$

Quando:

$$2\theta = 90^\circ$$

$$\theta = 45^\circ$$

32. O fio forma um ângulo de:



$$\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}r}{2r}\right) = 45^\circ$$

com a vertical.

Se N é a força normal exercida por cada parede sobre o cilindro:

$$\sqrt{2}N = \frac{T}{\sqrt{2}}$$

E:

$$Mg = \frac{T}{\sqrt{2}}$$

Logo:

$$T = \sqrt{2} Mg$$

E:

$$N = \frac{Mg}{\sqrt{2}}$$

33. Resolução do Laerte:

Considerando o helicóptero + a caixa como nosso sistema:

$$F - (M + m)g = (M + m)a$$

$$\therefore F = (M + m)(g + a)$$

$$F = 17\,000 \cdot 11,2 = 190\,400 \text{ N}$$

Para o helicóptero isoladamente:

$$F - Mg - T_0 = Ma$$

$$T_0 = F - Mg - Ma$$

$$T_0 = 190\,400 - 15\,000 \cdot 11,2$$

$$T_0 = 22\,400 \text{ N}$$

Além disso:

$$T_0 = 4T \cos \theta \quad (1)$$

Como:

$$\cos \theta = \frac{\sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}}{a}$$

temos:

$$T_0 = 4T \cdot \frac{\sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}}{a}$$

$$T_0 = 2\sqrt{3} T$$

$$\therefore T = \frac{22\,400}{2\sqrt{3}} = 6467 \text{ N}$$

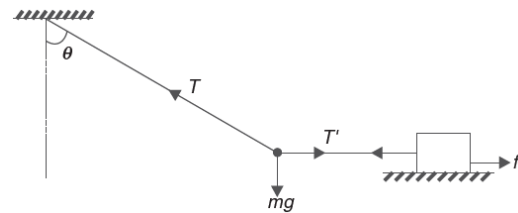
Se as cordas forem fixadas em PQRS, o valor de $\cos \theta$ na equação (1) diminuirá.

$\therefore T$ aumentará

T_0 e F não se modificarão

34. Resolução do Laerte:

a)



$$T \cos \theta = mg \quad (1)$$

$$T' \sin \theta = T' \quad (2)$$

$[T' = f_{\text{máx}}$ quando o bloco está prestes a deslizar]

Quando θ aumenta, T também aumenta, de acordo com a equação (1).

A partir da equação (2), T' também aumentará, fazendo com que o bloco deslize.

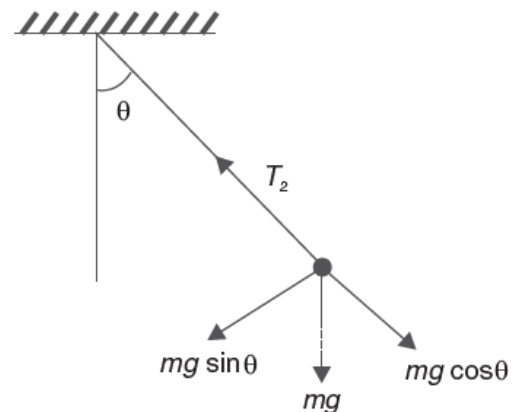
Portanto, **não é possível haver equilíbrio quando $\theta = 70^\circ$.**

b) Antes de a corda ser cortada, a tensão no fio é, de acordo com a equação (1):

$$T_1 = \frac{mg}{\cos 60^\circ} = 2mg$$

Depois que a corda é cortada, a tensão no fio é:

$$T_2 = mg \cos 60^\circ = \frac{mg}{2}$$



Logo:

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{\frac{mg}{2}}{2mg} = \boxed{\frac{1}{4}}$$

35. Resolução do Laerte:

Aceleração dos dois blocos

$$a = \frac{mg \sin 60^\circ - mg \sin 30^\circ}{3m} = \left(\frac{\sqrt{3} - 1}{4} \right) g$$

Se os dois blocos percorrerem uma distância x ao longo dos respectivos planos inclinados no tempo t :

$$x = \frac{1}{2}at^2$$

Os centros dos dois blocos estarão na mesma altura quando:

$$x \sin 60^\circ + x \sin 30^\circ = h$$

$$\therefore x \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \right) = h$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{3}-1}{4} \right) g t^2 \left(\frac{\sqrt{3}+1}{4} \right) = h$$

$$\therefore t^2 = \frac{16h}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)g} = \frac{8h}{g}$$

$$\therefore \boxed{t = 2\sqrt{2} \sqrt{\frac{h}{g}}}$$

36. Resolução do Laerte:

$$t = \sqrt{\frac{2s}{a}} = \sqrt{\frac{2\ell \sec \theta}{g(\sin \theta - \mu \cos \theta)}}$$

$$t = \sqrt{\frac{2\ell}{g(\sin \theta \cos \theta - \mu \cos^2 \theta)}}$$

Esse tempo é mínimo quando o valor de

$$z = \sin \theta \cos \theta - \mu \cos^2 \theta$$

é máximo.

$$\frac{dz}{d\theta} = 0$$

o que resulta em:

$$\boxed{\theta = 62,5^\circ}$$

37. Resolução do Laerte:

$$F = \frac{mg}{2\sqrt{3}}$$

Para A:

$$F = N_1 \sin 30^\circ = \frac{N_1}{2} \quad (1)$$

E:

$$R_A = mg + N_1 \cos 30^\circ$$

$$R_A = mg + 2 \left(\frac{mg}{2\sqrt{3}} \right) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$R_A = \frac{3}{2}mg \quad (2)$$

Para B:

$$F = N_2 \sin 30^\circ = \frac{N_2}{2}$$

$$\Rightarrow N_2 = 2F = \frac{mg}{\sqrt{3}} \quad (3)$$

E:

$$R_B = mg - N_2 \cos 30^\circ$$

$$R_B = mg - \frac{mg}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$R_B = \frac{mg}{2}$$

Para C:

$$N_1 \sin 30^\circ = N_2 \sin 30^\circ$$

$$\Rightarrow N_1 = N_2 = \frac{mg}{\sqrt{3}} \quad [\text{da equação (3)}]$$

E:

$$R_C + N_1 \cos 30^\circ = N_2 \cos 30^\circ + mg$$

$$R_C = mg$$

Portanto:

$$R_A : R_B : R_C = \frac{3}{2} : \frac{1}{2} : 1 = \boxed{3:1:2}$$

38. Resolução do Laerte:

Para a polia:

$$2F = ma$$

Para a partícula:

$$F = ma'$$

Portanto:

$$a = 2a' = \frac{2F}{m}$$

A aceleração do ponto de aplicação da força é:

$$2a + a' = \frac{5a}{2} = \frac{5F}{m}$$

39. Resolução do Laerte:

Seja $\vec{F}_{12}$ a força exercida sobre m_1 por m_2 :

$\vec{F}_{21}$ = força exercida sobre m_2 por m_1

$$m_1 \frac{d^2 \vec{r}_1}{dt^2} = \vec{F}_{12}$$

$$m_2 \frac{d^2 \vec{r}_2}{dt^2} = \vec{F}_{21}$$

$$\frac{d^2 \vec{r}_2}{dt^2} - \frac{d^2 \vec{r}_1}{dt^2} = \frac{\vec{F}_{21}}{m_2} - \frac{\vec{F}_{12}}{m_1}$$

$$\frac{d^2 (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)}{dt^2} = \frac{\vec{F}_{21}}{m_2} + \frac{\vec{F}_{21}}{m_1} \quad [\because \vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}]$$

Como:

$$\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

temos:

$$\therefore \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) \vec{F}_{21}$$

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}$$

Portanto:

$$\mu \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{F}_{21}$$

40. Resolução do Laerte:

a) Força resultante sobre B na direção para baixo:

$$20 \text{ N}$$

Tensão na corda:

$$80 \text{ N}$$

A permanecerá em repouso e sentirá seu peso verdadeiro.

b) **Dica:** Considere a aceleração de A como a , na direção para baixo. Então, a aceleração da corda no ponto em que B a segura será a . Isso significa que a aceleração de B é $(4 - a)$, na direção para baixo (a corda está escorregando de sua mão). Escreva as equações do movimento para os dois macacos e resolva.

41. Resolução do Laerte:

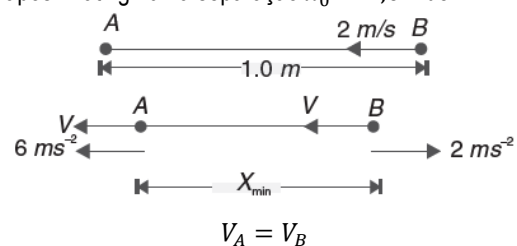
a) Pela terceira lei de Newton, as partículas exercem forças iguais e opostas uma sobre a outra.

$$\therefore m_A a_A = m_B a_B$$

$$\frac{m_A}{m_B} = \frac{a_B}{a_A} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

b) Até $x = x_0$, A permanece em repouso e B move-se uniformemente.

As duas partículas estarão mais próximas quando tiverem a mesma velocidade. Seja esse instante t_1 , após B atingir uma separação $x_0 = 1,0$ m de A .



$$V_A = V_B$$

$$0 + 6t_1 = 2 - 2t_1$$

$$\Rightarrow t_1 = \frac{1}{4} \text{ s}$$

$$\therefore V_A = V_B = V \text{ (digamos)} = 6 \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{2} \text{ m/s}$$

Sejam X_A e X_B os deslocamentos de A e B , respectivamente, no instante t_1 .

$$X_A = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot t_1^2 = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{3}{16} \text{ m}$$

$$X_B = 2t_1 - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot t_1^2 = \frac{2}{4} - \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{7}{16}$$

$$\therefore x_{\min} = 1,0 + X_A - X_B = 0,75 \text{ m}$$

c) As partículas continuam a se repelir até que a distância entre elas se torne igual a 1,0 m. Seja esse instante t , após elas atingirem a separação mínima.

$$\left(\frac{3}{2}t + \frac{1}{2} \cdot 6t^2\right) - \left(\frac{3}{2}t + \frac{1}{2} \cdot 2t^2\right) = 0,25$$

$$\Rightarrow t = \frac{1}{\sqrt{8}}$$

Portanto, as velocidades finais são:

$$V_A = \frac{3}{2} + 6 \cdot \frac{1}{\sqrt{8}} = \left(\frac{3}{2} + \frac{3}{\sqrt{2}}\right) \text{ m/s}$$

$$V_B = \frac{3}{2} - 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{8}} = \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \text{ m/s}$$

42. Resolução do Laerte:

Tempo necessário para esvaziar o balde B

$$t_0 = \frac{M}{\mu}$$

Massa do balde B no instante t :

$$m_B = 2M - \mu t$$

Portanto, a aceleração no instante t é:

$$a = \left(\frac{m_A - m_B}{m_A + m_B}\right) g$$

$$a = \left[\frac{2M - (2M - \mu t)}{2M + 2M - \mu t}\right] g$$

$$a = \frac{\mu t}{4M - \mu t} g$$

Se v é a velocidade dos baldes no instante t , então:

$$\frac{dv}{dt} = \left(\frac{\mu t}{4M - \mu t}\right) g$$

$$\int_0^{V_0} dv = -g \int_0^{t_0} \frac{4M - \mu t}{4M - \mu t} dt + \frac{4Mg}{\mu} \int_0^{t_0} \frac{dt}{4M - \mu t}$$

$$V_0 = -gt_0 - \frac{4Mg}{\mu} [\ln(4M - \mu t)]_0^{t_0}$$

$$V_0 = -gt_0 - \frac{4Mg}{\mu} [\ln(4M - \mu t_0) - \ln(4M)]$$

Como:

$$\mu t_0 = M$$

temos:

$$V_0 = -gt_0 - \frac{4Mg}{\mu} [\ln(3M) - \ln(4M)]$$

$$V_0 = -gt_0 + \frac{4Mg}{\mu} \ln\left(\frac{4}{3}\right)$$

Finalmente, como $t_0 = \frac{M}{\mu}$:

$$V_0 = \frac{Mg}{\mu} \left[4 \ln\left(\frac{4}{3}\right) - 1\right]$$

43. Resolução do Laerte:

Seja m a massa da corrente e L o seu comprimento.

A massa por unidade de comprimento da corrente é $= \frac{m}{L}$. Quando uma parte da corrente de comprimento x está pendurada, a aceleração da corrente será igual a:

$$a = \frac{\left(\frac{m}{L}\right) x g}{m} = \frac{gx}{L}$$

Inicialmente, quando $x = \frac{L}{2}$, a aceleração é igual a $\frac{g}{2}$, mas depois ela aumenta.

Depois que massas idênticas M são presas às extremidades da corrente, a aceleração no instante em que um comprimento x da corrente está pendurado será:

$$a' = \frac{\left(\frac{m}{L}\right) x g + Mg}{m + 2M} = \frac{gx}{L} \left[\frac{m + \frac{ML}{x}}{m + 2M}\right]$$

Para decidir se a é maior ou menor que a' , suponha que:

$$a > a'$$

Então:

$$1 > \left[\frac{m + \frac{ML}{x}}{m + 2M}\right]$$

$$\Rightarrow m + 2M > m + \frac{ML}{x}$$

$$\Rightarrow 2x > L$$

o que é verdadeiro.

Portanto, **a corrente sem as esferas escorregará da mesa mais rapidamente.**

$$t_1 < t_2$$

44. Resolução do Laerte:

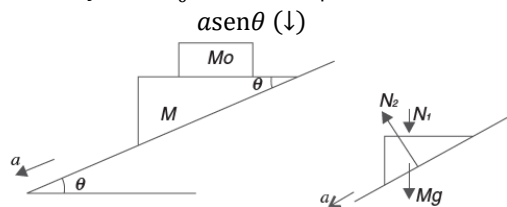
Seja a a aceleração da cunha para baixo ao longo do plano inclinado.

A soma das massas de todos os blocos retangulares é:

$$\begin{aligned} M_0 &= M + \frac{M}{2} + \frac{M}{4} + \frac{M}{8} + \dots \\ &= M \left[1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots \right] \\ &= M \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{2}} \right) = 2M \end{aligned}$$

Para determinar a , podemos considerar o sistema conforme mostrado abaixo.

A aceleração de M_0 será $asen\theta$ para baixo:

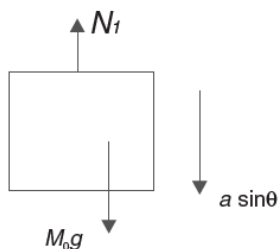


Para a cunha:

$$N_2 = (N_1 + Mg) \cos \theta \quad (1)$$

$$(N_1 + Mg) \sin \theta = Ma \quad (2)$$

Para M_0 :



$$M_0 g - N_1 = M_0 a \sin \theta$$

$$2Mg - N_1 = 2Ma \sin \theta \quad (3)$$

Multiplicando a equação (3) por $\sin \theta$ e somando-a à equação (2):

$$3Mg \sin \theta = Ma(1 + 2\sin^2 \theta)$$

Portanto:

$$a = \frac{3g \sin \theta}{1 + 2\sin^2 \theta}$$

A aceleração dos blocos retangulares é:

$$= a \sin \theta \quad (\downarrow)$$

$$a_{\text{blocos}} = \frac{3g \sin^2 \theta}{1 + 2\sin^2 \theta} \quad (\downarrow)$$

A massa de todos os blocos retangulares, exceto o bloco 1, é M . Substituímos os blocos 2,3,4,5, ... por um único bloco de massa M .

Considerando o movimento dessa massa M :

$$Mg - N_{12} = Ma \sin \theta$$

Portanto:

$$N_{12} = Mg - \frac{3Mg \sin^2 \theta}{1 + 2\sin^2 \theta}$$

$$N_{12} = \frac{Mg[1 - \sin^2 \theta]}{1 + 2\sin^2 \theta}$$

$$N_{12} = \frac{Mg \cos^2 \theta}{1 + 2\sin^2 \theta}$$

Logo, a força de contato entre os blocos 1 e 2 é:

$$N_{12} = \frac{\cos^2 \theta}{1 + 2\sin^2 \theta}$$

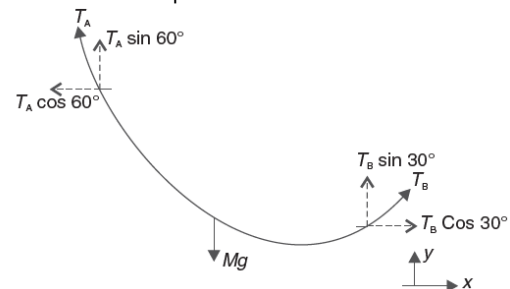
45. Resolução do Laerte:

a)

Se considerarmos o equilíbrio horizontal de qualquer segmento da corrente, podemos mostrar facilmente que a componente horizontal da tensão é a mesma em todos os pontos.

b)

Considerando o equilíbrio de toda a corrente:



$$T_A \cos 60^\circ = T_B \cos 30^\circ$$

(componente X da tensão em todos os pontos)

$$\therefore T_A = \sqrt{3} T_B \quad (1)$$

Além disso:

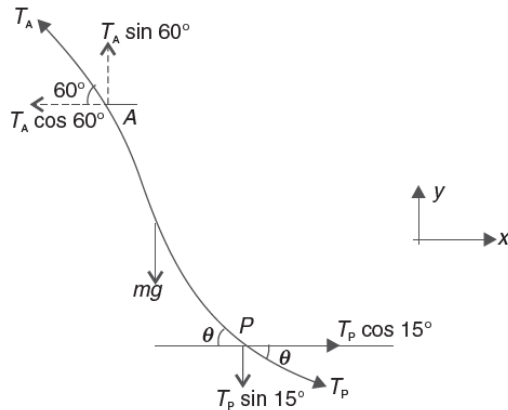
$$T_A \sin 60^\circ + T_B \sin 30^\circ = Mg$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} T_A + \frac{T_A}{2\sqrt{3}} = Mg \quad [\text{usando (1)}]$$

$$\therefore T_A = \frac{\sqrt{3}Mg}{2}$$

$$T_B = \frac{Mg}{2}$$

Considerando o equilíbrio do segmento AP:



A componente horizontal da tensão deve ser a mesma em todos os pontos.

$$\therefore T_P \cos 15^\circ = T_A \cos 60^\circ$$

$$\therefore T_P \cdot 0,96 = \frac{\sqrt{3}}{4} Mg \quad [M = 4,8 \text{ kg } g = 10 \text{ m/s}^2]$$

$$T_P = 21,65 \text{ N}$$

c)

Considerando o equilíbrio vertical de AP:

$$mg + T_P \sin 15^\circ = T_A \sin 60^\circ$$

$$mg = \frac{3}{4} Mg - 21,65 \times \sin 15^\circ$$

$$m = \frac{3}{4} \cdot 4,8 - \frac{21,65}{10} \cdot 0,25 = \frac{14,4 - 2,165}{4} = 3,05 \text{ kg}$$

$$\boxed{m = 3,05 \text{ kg}}$$

46 Resolução do Laerte:

O bloco começará a subir quando a tensão na corda se tornar maior que Mg .

A tensão na corda é igual à tensão na corda AB:

$$Mg = Kx_1$$

em que x_1 é a extensão da corda AB. Portanto:

$$x_1 = \frac{Mg}{K}$$

Se AB sofrer uma extensão x_1 , a polia se moverá para cima uma distância:

$$\frac{x_1}{2}$$

A tensão na corda CD é igual ao dobro da tensão na corda:

$$Kx_2 = 2Mg$$

em que x_2 é a extensão da corda CD. Assim:

$$x_2 = \frac{2Mg}{K}$$

Portanto, a extremidade D se moverá para cima uma distância igual a:

$$x_2 + \frac{x_1}{2}$$

Substituindo os valores de x_1 e x_2 :

$$\frac{2Mg}{K} + \frac{Mg}{2K}$$

$$\boxed{\frac{5Mg}{2K}}$$

47 Resolução do Laerte:

a) De acordo com o enunciado, o fio perde a tensão quando a plataforma sobe 2 cm.

Isso significa que a extensão inicial da mola era de 4 cm. (Por quê?)

No instante em que o bloco de massa m perde o contato, a extensão da mola é de 8 cm.

$$k(8 \text{ cm}) = mg$$

$$\therefore k = \frac{2 \times 10 \text{ N}}{8 \text{ cm}} = 2,5 \text{ N/cm}$$

b) Não. O bloco de massa m permanecerá em equilíbrio. Ele se moverá gradualmente para cima, de modo que a mola não se estenda mais.

48. Resolução do Laerte:

a) A massa do bloco A é igual à massa do macaco. A tensão é, na verdade, a força de atrito entre as mãos do macaco e a corda. Como as forças sobre o macaco e sobre o bloco são idênticas, eles terão a mesma aceleração.

Portanto, quando o macaco cair uma distância h , o bloco também cairá uma distância h .

Logo, o bloco estará a uma altura h acima do chão no instante em que o macaco atingir o solo.

$$h = 2,5 \text{ m}$$

b) Para manter o macaco em repouso:

$$T = Mg$$

Portanto, a aceleração do bloco para baixo é dada por:

$$2Ma = 2Mg - T$$

$$\therefore a = \frac{g}{2} = 5 \text{ m/s}^2$$

A velocidade do bloco no instante em que ele atingir o chão é:

$$V^2 = 0 + 2a(2h)$$

$$V = \sqrt{2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 2,5}$$

$$V = 5\sqrt{2} \text{ m/s}$$

c) No instante em que o bloco passa pelo macaco, sua velocidade para baixo é:

$$V_0 = \sqrt{2ah} = \sqrt{gh} = 5\sqrt{2} \text{ m/s}$$

Depois disso, o bloco deve retardar-se com aceleração:

$$a = 5 \text{ m/s}^2$$

para parar após percorrer uma distância adicional h .

A tensão na corda aumenta para T' , de modo que:

$$T' - 2Mg = 2M \frac{g}{2}$$

$$T' = 3Mg$$

Portanto, a aceleração do macaco para cima será dada por:

$$T' - Mg = Ma$$

$$\therefore a = 2g$$

A corda, do lado do macaco, terá aceleração:

$$\frac{g}{2}$$

na direção para baixo.

Logo, a aceleração do macaco em relação à corda é:

$$2g + \frac{g}{2} = \frac{5g}{2} \quad (\uparrow)$$

$$a_{\text{macaco/corda}} = 25 \text{ m/s}^2 \text{ para cima}$$

49 Resolução do Laerte:

Seja x a extensão da mola superior.

Como a força resultante sobre a barra B_1 deve ser nula — pois ela não possui massa —, as duas molas conectadas abaixo de B_1 sofrerão uma extensão de $\frac{x}{2}$ cada uma.

De maneira semelhante, pode-se concluir que a camada seguinte, formada por quatro molas, terá uma extensão de $\frac{x}{4}$ em cada mola, e assim por diante.

a) Deslocamento do ponto superior A

$$x_A = x + \frac{x}{2} + \frac{x}{4} + \frac{x}{8} + \dots$$

$$x_A = x \left[\frac{1}{1 - \frac{1}{2}} \right]$$

$$x_A = 2x = 2 \frac{F}{K}$$

Portanto:

$$x_A = \frac{2F}{K}$$

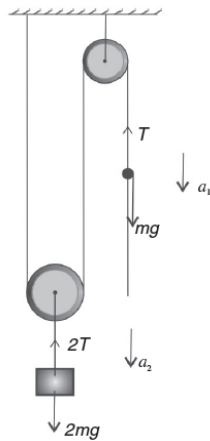
b) Deslocamento de B_1

$$X_{B_1} = 2x - x = x = \frac{F}{K}$$

Portanto:

$$X_{B_1} = \frac{F}{K}$$

50 Resolução do Laerte:



A força de atrito entre a esfera e a corda é igual à tensão na parte da corda que sustenta a esfera. Seja essa tensão T .

Para a esfera

$$mg - T = ma_1 \quad (1)$$

Para o bloco

$$2mg - 2T = 2ma_2$$

$$\Rightarrow mg - T = ma_2 \quad (2)$$

A partir das equações (1) e (2):

$$a_1 = a_2 = a$$

O bloco desce com aceleração a , enquanto a extremidade da corda situada abaixo da esfera se move para cima com aceleração $2a$.

Logo, a aceleração relativa entre a esfera e a extremidade da corda é:

$$3a$$

Portanto:

$$l = \frac{1}{2}(3a)t^2 \quad (3)$$

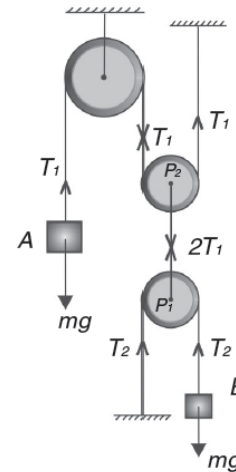
A distância percorrida pelo bloco é:

$$s = \frac{1}{2}at^2$$

Usando a equação (3):

$$s = \frac{l}{3}$$

51 Resolução do Laerte:



a) Para o equilíbrio

$$T_1 = Mg$$

E:

$$T_2 = mg$$

Mas:

$$2T_2 = 2T_1$$

(para o equilíbrio da polia P_1)

$$\therefore m = M$$

Portanto:

$$m = M$$

b) Quando:

$$m = 2M$$

seja a a aceleração de A, para cima.

A aceleração da polia P_2 será: $\frac{a}{2}$ para baixo.

A aceleração de P_1 é igual à aceleração de P_2 : $\frac{a}{2}$ para baixo.

A aceleração de B é:

$$2.\text{aceleração de } P_2 = a$$

para baixo.

Para a polia P_1 :

$$2T_1 = 2T_2$$

$$\Rightarrow T_1 = T_2 \quad (1)$$

Para o bloco A:

$$T_1 - Mg = Ma \quad (2)$$

Para o bloco B:

$$2Mg - T_2 = 2Ma \quad (3)$$

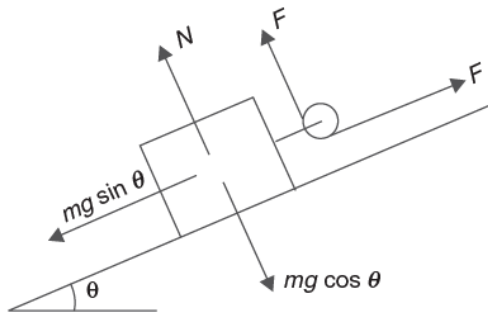
Resolvendo as equações (1), (2) e (3):

$$a = \frac{g}{3}$$

A aceleração do bloco A é:

$$\frac{g}{3} \text{ para cima}$$

52 Resolução do Laerte:



Adotando como sentido positivo o sentido ascendente do plano:

$$F - mg \sin \theta = ma.$$

Logo,

$$a = \frac{F}{m} - g \sin \theta.$$

Para o bloco subir o plano, é necessário que:

$$a > 0.$$

Assim:

$$F > mg \sin \theta.$$

Equação na direção perpendicular ao plano

Como o bloco permanece em contato com o plano, a aceleração perpendicular ao plano é nula.

Portanto:

$$N + F - mg \cos \theta = 0.$$

Assim:

$$N = mg \cos \theta - F.$$

Para que o bloco não perca contato com o plano, deve ser:

$$N \geq 0.$$

Consequentemente:

$$F \leq mg \cos \theta.$$

a) Determinação de θ_0

Para que o bloco suba mantendo contato com o plano, as duas condições devem ser satisfeitas simultaneamente:

$$mg \sin \theta < F \leq mg \cos \theta.$$

Para que exista algum valor possível de F , é necessário que:

$$mg \sin \theta < mg \cos \theta.$$

Cancelando mg :

$$\sin \theta < \cos \theta.$$

Logo:

$$\tan \theta < 1.$$

A condição-limite ocorre quando:

$$\tan \theta_0 = 1.$$

Portanto:

$$\theta_0 = 45^\circ$$

b) Aceleração máxima para $\theta = \frac{\theta_0}{2}$

Como:

$$\theta_0 = 45^\circ,$$

temos:

$$\theta = \frac{45^\circ}{2} = 22,5^\circ.$$

A aceleração é:

$$a = \frac{F}{m} - g \sin \theta.$$

Para maximizar a sem que o bloco perca contato, devemos utilizar o maior valor possível de F . O limite ocorre quando a força normal se anula:

$$N = 0.$$

Da equação normal:

$$mg \cos \theta - F = 0,$$

portanto:

$$F_{\max} = mg \cos \theta.$$

Substituindo na equação do movimento ao longo do plano:

$$a_{\max} = \frac{mg \cos \theta}{m} - g \sin \theta.$$

Logo:

$$a_{\max} = g(\cos \theta - \sin \theta).$$

Para $\theta = 22,5^\circ$:

$$a_{\max} = g(\cos 22,5^\circ - \sin 22,5^\circ)$$

Usando a identidade trigonométrica:

$$\cos 22,5^\circ - \sin 22,5^\circ = \sqrt{2} \cos 67,5^\circ = \sqrt{2 - \sqrt{2}},$$

obtemos:

$$a_{\max} = g\sqrt{2 - \sqrt{2}}$$

Numericamente:

$$\sqrt{2 - \sqrt{2}} \approx 0,765.$$

Portanto:

$$a_{\max} \approx 0,765 g$$

ou, adotando $g = 10 \text{ m/s}^2$: $a_{\max} \approx 7,65 \text{ m/s}^2$

53. Resolução do Laerte:

Adotemos um sistema de eixos com:

- eixo x : horizontal;
 - eixo y : vertical, orientado para cima.
- A aceleração do bloco A é dirigida ao longo do plano inclinado. Portanto, suas componentes são:

$$\vec{a}_A = a_0 \cos \theta \hat{i} + a_0 \sin \theta \hat{j}$$

Logo:

$$a_{Ax} = a_0 \cos \theta$$

e

$$a_{Ay} = a_0 \sin \theta.$$

Restrição imposta pelo fio

No instante da soltura, a esfera B possui a mesma velocidade do bloco A . Assim, a velocidade relativa entre eles é nula:

$$\vec{v}_{B/A} = 0.$$

Como o fio está inicialmente na vertical, a distância entre A e B deve permanecer constante. Portanto, nesse instante, a aceleração relativa não pode possuir componente ao longo do fio:

$$a_{B/A,y} = 0.$$

Consequentemente, as componentes verticais das acelerações de A e B são iguais:

$$a_{By} = a_{Ay} = a_0 \sin \theta.$$

A esfera B está submetida apenas a forças verticais — seu peso e a tensão do fio. Portanto, sua aceleração horizontal é nula:

$$a_{Bx} = 0.$$

Aceleração relativa

A aceleração do bloco A em relação à esfera B é:

$$\vec{a}_{A/B} = \vec{a}_A - \vec{a}_B.$$

Nas componentes:

$$a_{A/B,x} = a_0 \cos \theta - 0 = a_0 \cos \theta$$

e

$$a_{A/B,y} = a_0 \sin \theta - a_0 \sin \theta = 0.$$

Assim, a aceleração relativa é puramente horizontal e seu módulo é:

$$a_{A/B} = a_0 \cos \theta$$

Portanto, imediatamente após a esfera ser solta, o bloco A acelera em relação à esfera com módulo:

$$a_0 \cos \theta$$

54 Resolução do Laerte:

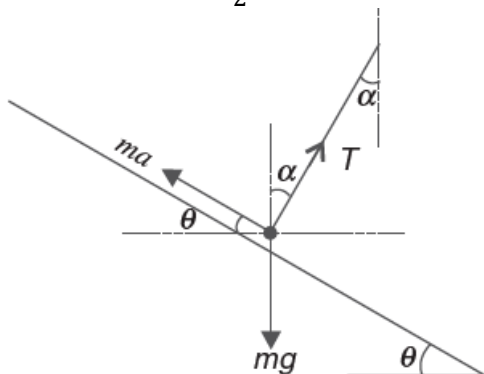
a) O bloco deslizará para baixo com uma aceleração:

$$a = g \sin \theta$$

Para que a esfera tenha a mesma aceleração, o fio deverá ser perpendicular ao plano inclinado. A tensão equilibrará a componente $mg \cos \theta$ do peso, e a esfera terá uma força resultante $mg \sin \theta$ dirigida para baixo ao longo do plano inclinado. Isso significa que o fio formará um ângulo θ com a vertical.

b) A aceleração do bloco é:

$$a = \frac{1}{2} g \sin \theta$$



No referencial do bloco, existe uma força pseudo—ou força de inércia—de módulo ma atuando sobre a esfera.

Considerando o equilíbrio nas direções horizontal e vertical:

$$T \sin \alpha = ma \cos \theta \quad (i)$$

$$T \cos \alpha + m \sin \theta = mg$$

$$\Rightarrow T \cos \alpha = mg - m \sin \theta \quad (ii)$$

Dividindo a equação (i) pela equação (ii):

$$\tan \alpha = \frac{a \cos \theta}{g - a \sin \theta}$$

Substituindo:

$$\tan \alpha = \frac{\frac{1}{2} g \sin \theta \cos \theta}{g - \frac{1}{2} g \sin^2 \theta}$$

Simplificando:

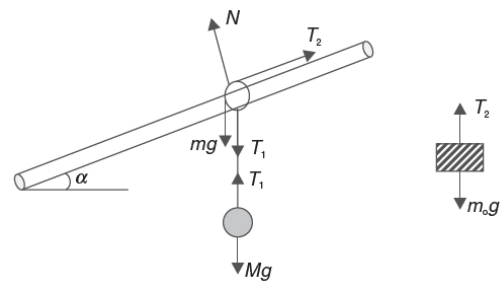
$$\tan \alpha = \frac{\sin \theta \cos \theta}{2 - \sin^2 \theta}$$

Portanto:

$$\alpha = \tan^{-1} \left(\frac{\sin \theta \cos \theta}{2 - \sin^2 \theta} \right)$$

55 Resolução do Laerte:

a) Equilíbrio



$$T_1 = Mg \text{ e } T_2 = m_0 g$$

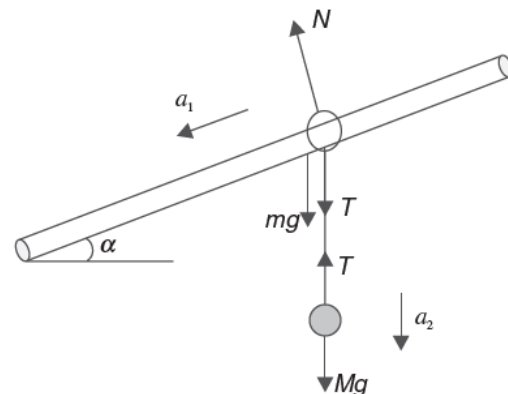
Para o anel:

$$T_2 = (T_1 + mg) \sin \alpha$$

$$\therefore m_0 g = (M + m) g \sin \alpha$$

$$\therefore m_0 = (M + m) \sin \alpha$$

b) Relação entre a_1 e a_2



$$a_1 \sin \alpha = a_2 \quad (1)$$

Para o anel:

$$(T + mg) \sin \alpha = ma_1 \quad (2)$$

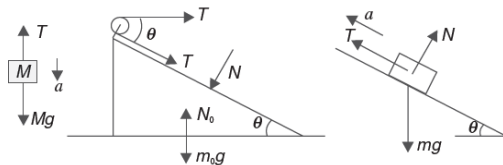
Para a esfera:

$$Mg - T = ma_2 \quad (3)$$

Resolvendo as equações (1), (2) e (3):

$$a_2 = \frac{(M + m)g \sin^2 \alpha}{m + M \sin^2 \alpha}$$

56 Resolução do Laerte:



Para o bloco de massa M :

$$Mg - T = Ma \quad (1)$$

Para o bloco de massa m :

$$T - mg \sin \theta = ma \quad (2)$$

Para a cunha:

$$N - m_0 g = 0 \quad (3)$$

Para o bloco de massa m_0 :

$$T + T \cos \theta = N \sin \theta \quad (4)$$

Na direção horizontal.

Eliminando a entre as equações (1) e (2):

$$\begin{aligned} g - \frac{T}{M} &= \frac{T}{m} - g \sin \theta \\ \therefore T \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{M} \right) &= g(1 + \sin \theta) \\ \therefore T &= \frac{mMg}{m + M} (1 + \sin \theta) \end{aligned}$$

Substituindo esse valor de T e o valor de N obtido na equação (3) na equação (4):

$$\frac{mMg(1 + \sin \theta)}{m + M} (1 + \cos \theta) = mg \cos \theta \sin \theta$$

Portanto:

$$\frac{M}{m + M} = \frac{\cos \theta \sin \theta}{(1 + \sin \theta)(1 + \cos \theta)}$$

Como:

$$\sin \theta = \frac{3}{5}$$

$$\cos \theta = \frac{4}{5},$$

temos:

$$\frac{M}{m + M} = \frac{\frac{4}{5} \cdot \frac{3}{5}}{\left(1 + \frac{3}{5}\right) \left(1 + \frac{4}{5}\right)}$$

$$\frac{M}{m + M} = \frac{\frac{12}{25}}{\frac{8}{5} \cdot \frac{9}{5}} = \frac{\frac{12}{25}}{\frac{72}{25}} = \frac{1}{6}$$

Logo:

$$\frac{M}{m + M} = \frac{1}{6}$$

$$6M = m + M$$

$$5M = m$$

Portanto:

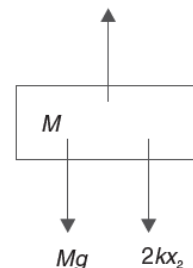
$$\boxed{\frac{M}{m} = \frac{1}{5}}$$

57 Resolução do Laerte:

A extensão inicial da mola S_1 é x_0 :

$$kx_0 = Mg$$

$$k(x_0 + x_1)$$



Seja x_2 a extensão da mola S_2 e x_1 a extensão adicional da mola S_1 , quando o ponto A se desloca para baixo uma distância L :

$$2x_1 + x_2 = L \quad (1)$$

Para o equilíbrio do bloco de massa M :

$$kx_0 + kx_1 = Mg + 2kx_2$$

Mas:

$$kx_0 = Mg$$

Portanto:

$$\therefore x_1 = 2x_2 \quad (2)$$

Resolvendo as equações (1) e (2):

$$x_2 = \frac{L}{5}$$

$$x_1 = \frac{2L}{5}$$

Logo, o bloco de massa M se desloca uma distância igual à extensão da mola S_1 :

$$\boxed{\frac{2L}{5}}$$

58 Resolução do Laerte:

Seja x_1 a deformação da primeira mola.

Seja x_2 a deformação da segunda mola.

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad (1)$$

Além disso:

$$k_1 x_1 = k_2 x_2 \quad (2)$$

Resolvendo as equações (1) e (2):

$$x_1 = \left(\frac{k_2}{k_1 + k_2} \right) (2x_0)$$

Portanto, a tensão nas molas é:

$$T = k_1 x_1 = \frac{2k_1 k_2 x_0}{k_1 + k_2}$$

a)

$$Ma = 2T$$

$$a = \frac{4k_1 k_2 x_0}{(k_1 + k_2)M}$$

b)

$$T_0 = 2T = \frac{4k_1 k_2 x_0}{k_1 + k_2}$$

59 Resolução do Laerte:

Seja a a aceleração de m em relação à cunha A .

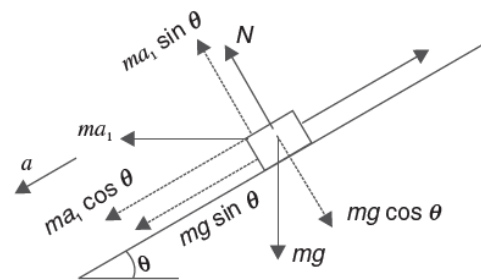
Seja a_1 a aceleração da cunha A para a direita.

Seja a_2 a aceleração do bloco B para a esquerda.

Uma observação cuidadosa permite concluir que:

$$a = a_1 + a_2 \quad (1)$$

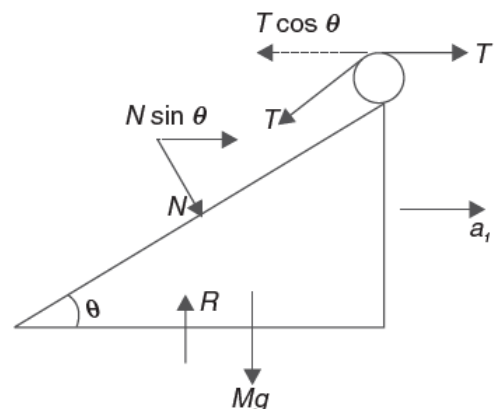
Movimento do bloco m no referencial da cunha A



$$ma_1 \sin \theta + N = mg \cos \theta \quad (2)$$

$$ma_1 \cos \theta + mg \sin \theta - T = ma \quad (3)$$

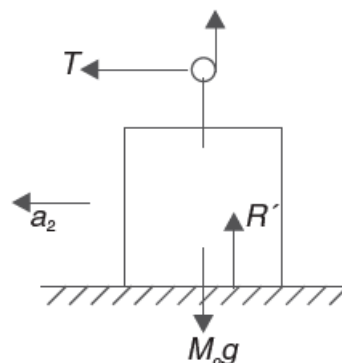
Movimento da cunha A



Escreveremos a equação apenas para o movimento horizontal:

$$T + N \sin \theta - T \cos \theta = Ma_1 \quad (4)$$

Movimento do bloco B



A equação para o movimento horizontal é:

$$T = M_0 a_2 \quad (5)$$

Primeiro, vamos eliminar N entre as equações (2) e (4):

$$ma_1 \sin^2 \theta - T(1 - \cos \theta) = mg \cos \theta \sin \theta - Ma_1$$

$$\Rightarrow a_1 [m \sin^2 \theta + M] - T(1 - \cos \theta) = mg \sin \theta \cos \theta$$

Substituindo:

$$\sin \theta = \frac{3}{5}, \quad \cos \theta = \frac{4}{5}, \quad M = 4m$$

obtemos:

$$ma_1 \left[\frac{9}{25} + 4 \right] - \frac{T}{5} = \frac{12}{25} mg$$

$$\Rightarrow 109ma_1 - 5T = 12mg \quad (6)$$

Substituindo o valor de T obtido na equação (5) nas equações (3) e (6):

$$ma_1 \cos \theta + mg \sin \theta - M_0 a_2 = ma$$

Como:

$$\cos \theta = \frac{4}{5}, \quad \sin \theta = \frac{3}{5}, \quad M_0 = 2m,$$

temos:

$$\frac{4}{5} a_1 + \frac{3}{5} g - 2a_2 = a$$

Usando a equação (1):

$$\frac{4}{5} a_1 + \frac{3}{5} g - 2a_2 = a_1 + a_2$$

Multiplicando por 5:

$$4a_1 - 10a_2 = 5a - 3g \quad (7)$$

Além disso, a equação (6) fornece:

$$109a_1 - 10a_2 = 12g \quad (8)$$

Resolvendo as equações (1), (7) e (8):

$$4a_1 - 10a_2 = 5(a_1 + a_2) - 3g$$

$$\Rightarrow a_1 + 15a_2 = 3g$$

Multiplicando essa equação pela equação (2) e somando-a à equação (8), multiplicada por 3, obtém-se:

$$a_1 = \frac{6g}{47}$$

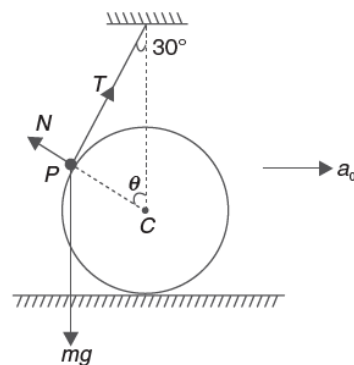
Portanto, a aceleração da cunha A é:

$$a_A = \frac{6g}{47}$$

dirigida para a direita.

60 Resolução do Laerte:

Como a partícula é pequena, o fio será tangente à esfera. $\theta = 60^\circ$ (veja a figura).



Seja a_0 a aceleração da esfera imediatamente após ser liberada.

A partícula terá inicialmente uma aceleração a perpendicular ao fio, em direção a PC . Além disso, a componente de a_0 na direção PC deve ser igual a a .

$$\therefore a = a_0 \cos(90^\circ - \theta) = a_0 \sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2} a_0$$

As forças que atuam sobre a partícula estão indicadas na figura. A equação do movimento ao longo de PC será:

$$mg \cos \theta - N = ma$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} mg - N = \frac{\sqrt{3}}{2} ma_0 \quad (i)$$

A esfera sofre uma força N ao longo de PC . Sua componente horizontal é:

$$N \sin \theta$$

$$\therefore N \frac{\sqrt{3}}{2} = Ma_0$$

$$\Rightarrow N = \frac{2}{\sqrt{3}} Ma_0 \quad (ii)$$

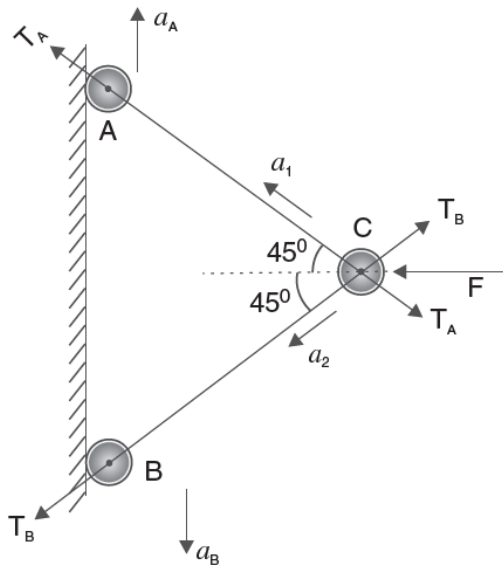
A partir de (i) e (ii):

$$\frac{1}{2} mg = \left(\frac{\sqrt{3}m}{2} + \frac{2M}{\sqrt{3}} \right) a_0$$

Portanto:

$$a_0 = \frac{\sqrt{3}mg}{3m + 4M}$$

61 Resolução do Laerte:



A componente da aceleração de C pode ser considerada ao longo das duas hastes — as hastes são perpendiculares — como a_1 e a_2 .

Como as hastes são rígidas:

$$a_1 = \frac{a_A}{\sqrt{2}}$$

$$a_2 = \frac{a_B}{\sqrt{2}}$$

Para o disco A

$$\frac{T_A}{\sqrt{2}} = ma_A \quad (1)$$

Para o disco B

$$\frac{T_B}{\sqrt{2}} = 2ma_B \quad (2)$$

Para o disco C

$$\frac{F}{\sqrt{2}} - T_A = ma_1 \quad (3)$$

$$\frac{F}{\sqrt{2}} - T_B = ma_2 \quad (4)$$

Utilizando as equações (2) e (4):

$$\frac{F}{\sqrt{2}} - 2\sqrt{2}ma_B = ma_2$$

Como:

$$a_2 = \frac{a_B}{\sqrt{2}},$$

temos:

$$\frac{F}{\sqrt{2}} - 2\sqrt{2}ma_B = m \frac{a_B}{\sqrt{2}}$$

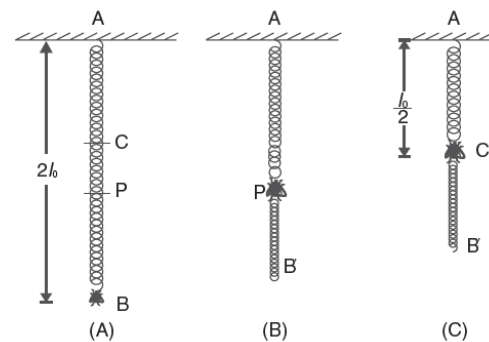
Portanto:

$$\frac{F}{\sqrt{2}} = ma_B \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + 2\sqrt{2} \right)$$

Logo:

$$a_B = \frac{F}{5m}$$

62 Resolução do Laerte:



A deformação inicial da mola é:

$$\frac{mg}{k} = \ell_0$$

pois:

$$k = \frac{mg}{\ell_0}.$$

Portanto, a distância inicial entre o inseto e o inseto situado no teto é:

$$2\ell_0.$$

À medida que o inseto sobe lentamente, a tensão no segmento da mola acima dele não se altera. De fato, a tensão no segmento AP é:

$$T_{AP} = mg.$$

O segmento da mola abaixo do inseto fica relaxado. Isso significa que o comprimento do segmento AP permanece inalterado quando o inseto se desloca de B até P .

Quando o inseto está a $\frac{1}{4}$ de sua distância original até o inseto situado no teto, ele se encontra no ponto C , de modo que:

$$AC = \frac{2\ell_0}{4} = \frac{\ell_0}{2}.$$

Observando as figuras, percebe-se que o segmento AC corresponde a $\frac{1}{4}$ da mola. Portanto, seu comprimento deformado é:

$$AC = \frac{\ell_0}{2}.$$

Assim, o comprimento natural do segmento AC é:

$$\frac{\ell_0}{4}.$$

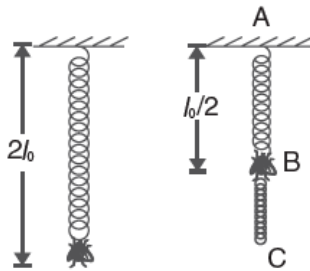
Consequentemente, o comprimento total da mola quando o inseto está no ponto C é:

$$AC + CB = \frac{\ell_0}{2} + \frac{3\ell_0}{4}.$$

Logo:

$$L = \frac{5\ell_0}{4}$$

Solução alternativa



$$kx_0 = mg$$

Seja x_0 a deformação inicial da mola:

$$x_0 = \frac{mg}{mg/\ell_0} = \ell_0.$$

Portanto, a distância inicial entre o inseto e o teto situado no teto é:

$$2\ell_0.$$

Quando o inseto está no ponto B:

$$AB = \frac{2\ell_0}{4} = \frac{\ell_0}{2}.$$

Apenas o trecho AB da mola sustenta o peso do inseto, enquanto o trecho BC permanece sem deformação.

Em outras palavras, o trecho AB comporta-se como uma mola independente que sustenta o inseto.

Seja ℓ_1 o comprimento natural do segmento AB.

A constante elástica do segmento AB é:

$$k_1 = \frac{\ell_0}{\ell_1} k.$$

A deformação do trecho AB é:

$$\frac{\ell_0}{2} - \ell_1.$$

Pela lei de Hooke:

$$k_1 \left(\frac{\ell_0}{2} - \ell_1 \right) = mg.$$

Substituindo $k_1 = \frac{\ell_0}{\ell_1} k$:

$$\frac{\ell_0}{\ell_1} k \left(\frac{\ell_0}{2} - \ell_1 \right) = mg.$$

Como:

$$\ell_0 k = mg,$$

temos:

$$mg \left(\frac{\ell_0}{2\ell_1} - 1 \right) = mg.$$

Cancelando mg :

$$\frac{\ell_0}{2\ell_1} - 1 = 1.$$

Logo:

$$\frac{\ell_0}{2\ell_1} = 2,$$

e, portanto:

$$\frac{\ell_0}{2} = 2\ell_1.$$

Assim:

$$\ell_1 = \frac{\ell_0}{4}.$$

O comprimento total da mola é:

$$L = AB + BC.$$

Como:

$$AB = \frac{\ell_0}{2}$$

$$BC = \ell_0 - \frac{\ell_0}{4},$$

segue que:

$$L = \frac{\ell_0}{2} + \left(\ell_0 - \frac{\ell_0}{4} \right).$$

Portanto:

$$L = \frac{5\ell_0}{4}$$

63 Resolução do Laerte:

a)

Seja T a tensão no fio e sejam a_1 , a_2 , a_3 e a_4 as acelerações das quatro massas, consideradas no sentido para baixo.

O fio possui comprimento fixo, o que implica que a soma dos deslocamentos — e, consequentemente, das acelerações — de todas as quatro massas deve ser nula. Em outras palavras:

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 0 \quad (1)$$

Para m_1

$$m_1 a_1 = m_1 g - 2T$$

Logo:

$$a_1 = g - \frac{2T}{m_1} \quad (2)$$

Uma equação semelhante pode ser escrita para a_2 , a_3 e a_4 . Substituindo todas essas equações em (1), obtemos:

$$4g - 2T \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_3} + \frac{1}{m_4} \right) = 0$$

Portanto:

$$2T = \frac{4g}{\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_3} + \frac{1}{m_4}} = 4mg$$

onde:

$$\frac{1}{m} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_3} + \frac{1}{m_4}$$

A partir da equação (2):

$$a_1 = g - \frac{4mg}{m_1}$$

ou:

$$a_1 = g \left(1 - \frac{4m}{m_1} \right)$$

b)

De modo semelhante:

$$a_4 = g \left(1 - \frac{4m}{m_4} \right)$$

Para que a_4 seja positiva:

$$\frac{4m}{m_4} < 1$$

ou:

$$\frac{4}{m_4} < \frac{1}{m}$$

Como:

$$\frac{1}{m} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_3} + \frac{1}{m_4},$$

temos:

$$\frac{4}{m_4} < \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_3} + \frac{1}{m_4}$$

Substituindo os valores:

$$\frac{4}{m_4} < \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{m_4}$$

Subtraindo $\frac{1}{m_4}$ dos dois lados:

$$\frac{3}{m_4} < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$$

$$\frac{3}{m_4} < \frac{11}{6}$$

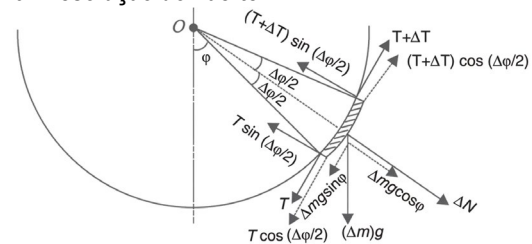
Logo:

$$m_4 > \frac{18}{11} \text{ kg}$$

Portanto, para que a massa m_4 acelere para baixo:

$$m_4 > \frac{18}{11} \text{ kg}$$

64 Resolução do Laerte:



Definição do elemento da corda

Por simetria, basta analisar a metade direita da corda, do ponto C até o ponto B.

Considere um pequeno elemento da corda, situado em uma posição que forma um ângulo φ com a vertical que passa pelo centro O.

- No ponto C, temos $\varphi = 0$.
- No ponto B, temos $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

O comprimento do pequeno elemento é:

$$ds = R d\varphi.$$

Como a densidade linear da corda é λ , a massa desse elemento é:

$$dm = \lambda ds$$

e, portanto,

$$dm = \lambda R d\varphi.$$

O peso do elemento vale:

$$dP = dm \cdot g$$

$$dP = \lambda R g d\varphi.$$

Chamemos de $T(\varphi)$ a tensão na corda no ponto correspondente ao ângulo φ .

Variação da tensão ao longo da corda

Equilíbrio na direção tangencial

Analisemos as forças na direção tangente ao cilindro.

A componente tangencial do peso do elemento é:

$$dP_t = \lambda R g \sin \varphi d\varphi.$$

Essa componente tende a fazer o elemento escorregar para baixo.

As tensões nas extremidades do elemento são ligeiramente diferentes. Se a tensão na extremidade inferior é T , a tensão na extremidade superior é:

$$T + dT.$$

Aplicando o equilíbrio na direção tangencial:

$$(T + dT) - T - \lambda R g \sin \varphi d\varphi = 0.$$

Logo:

$$dT = \lambda R g \sin \varphi d\varphi.$$

Essa é a equação que descreve como a tensão varia ao longo da corda.

Integrando desde o ponto inferior C , onde $\varphi = 0$, até uma posição qualquer φ :

$$\int_{T_C}^{T(\varphi)} dT = \lambda R g \int_0^\varphi \sin u du.$$

Assim:

$$T(\varphi) - T_C = \lambda R g [-\cos u]_0^\varphi.$$

Portanto:

$$T(\varphi) - T_C = \lambda R g (1 - \cos \varphi).$$

Logo:

$$\boxed{T(\varphi) = T_C + \lambda R g (1 - \cos \varphi)}$$

onde T_C é a tensão no ponto mais baixo C .

No ponto B , temos $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Como a corda auxiliar puxa a extremidade B verticalmente para cima, a tensão nesse ponto é T_0 . Portanto:

$$T_0 = T_C + \lambda R g \left(1 - \cos \frac{\pi}{2}\right).$$

Como:

$$\cos \frac{\pi}{2} = 0,$$

segue que:

$$T_0 = T_C + \lambda R g.$$

Logo:

$$\boxed{T_C = T_0 - \lambda R g}$$

Condição para a corda permanecer em contato

A corda só pode permanecer apoiada no cilindro se a força normal exercida pelo cilindro sobre a corda for não negativa.

Em outras palavras:

$$N \geq 0.$$

Consideremos novamente o pequeno elemento da corda.

Forças na direção radial

As tensões nas extremidades produzem uma resultante dirigida para o centro do cilindro. Para um elemento subtendendo um ângulo $d\varphi$, essa resultante tem módulo aproximadamente:

$$T d\varphi.$$

A componente radial para fora do peso do elemento é:

$$dP_r = \lambda R g \cos \varphi d\varphi.$$

Se dN representa a força normal exercida pelo cilindro sobre o elemento, então, na direção radial para fora:

$$dN + \lambda R g \cos \varphi d\varphi = T d\varphi.$$

Portanto:

$$dN = (T - \lambda R g \cos \varphi) d\varphi.$$

Para que haja contato, precisamos de:

$$dN \geq 0.$$

Como $d\varphi > 0$, resulta:

$$T \geq \lambda R g \cos \varphi.$$

Substituindo a expressão da tensão:

$$T_C + \lambda R g (1 - \cos \varphi) \geq \lambda R g \cos \varphi.$$

Reorganizando:

$$T_C + \lambda R g \geq 2\lambda R g \cos \varphi.$$

Mas já sabemos que:

$$T_C + \lambda R g = T_0.$$

Logo, a condição de contato é:

$$\boxed{T_0 \geq 2\lambda R g \cos \varphi}$$

Essa desigualdade deve ser satisfeita para todos os pontos da corda.

Item (a): menor valor de T_0

O maior valor de $\cos \varphi$ ocorre no ponto mais baixo C , onde:

$$\varphi = 0.$$

Nesse ponto:

$$\cos 0 = 1.$$

Portanto, a condição mais exigente é:

$$T_0 \geq 2\lambda R g.$$

Assim, o menor valor possível é:

$$\boxed{T_{0,\min} = 2\lambda R g}$$

Interpretação física

O ponto crítico é o ponto inferior C .

Nesse ponto:

- a tensão tende a puxar a corda para o centro do cilindro;
- o peso da corda tende a afastá-la do centro;
- o cilindro precisa exercer uma força normal para manter o contato.

Se T_0 for exatamente igual a $2\lambda Rg$, a força normal no ponto C será nula. A corda estará no limite de perder o contato.

Item (b): redução de T_0

Suponha agora que T_0 seja reduzida ligeiramente abaixo do valor mínimo:

$$T_0 < 2\lambda Rg.$$

A condição de contato era:

$$T_0 \geq 2\lambda Rg \cos \varphi.$$

No ponto C , temos $\varphi = 0$, então:

$$T_0 \geq 2\lambda Rg.$$

Mas essa desigualdade deixa de ser satisfeita quando:

$$T_0 < 2\lambda Rg.$$

Portanto, a corda perde o contato inicialmente no ponto mais baixo C .

A corda perde o contato no ponto C .

Observação sobre uma redução não infinitesimal

Se T_0 for reduzida de maneira não apenas ligeira, pode existir uma região ao redor de C em que a corda não permanece em contato.

O ponto de separação, medido pelo ângulo φ a partir do ponto inferior C , é obtido impondo a condição-limite:

$$T_0 = 2\lambda Rg \cos \varphi.$$

Assim:

$$\cos \varphi = \frac{T_0}{2\lambda Rg}.$$

Portanto:

$$\varphi = \cos^{-1} \left(\frac{T_0}{2\lambda Rg} \right)$$

Como a figura é simétrica, a separação ocorre em dois pontos simétricos, um em cada lado do ponto C . Porém, quando T_0 é reduzida **ligeiramente** abaixo do valor mínimo, esses pontos se aproximam de C ; no instante inicial da perda de contato, o ponto crítico é exatamente:

C

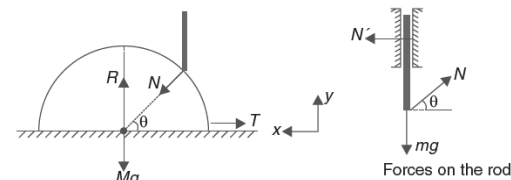
Respostas finais

$$T_{0,\min} = 2\lambda Rg$$

e, se T_0 for reduzida ligeiramente abaixo desse valor:

a corda perde o contato inicialmente no ponto inferior C .

65 Resolução do Laerte:



a) Forças que atuam sobre o hemisfério

Seja:

R = força normal exercida pelo chão sobre o hemisfério;

N = força normal exercida pela haste sobre o hemisfério;

N' = força normal exercida pela parede sobre a haste;

T = tensão na corda.

Para o hemisfério

$$R = Mg + N \sin \theta \quad (1)$$

e

$$T = N \cos \theta \quad (2)$$

Para a haste

$$N' = N \cos \theta \quad (3)$$

e

$$N \sin \theta = mg \quad (4)$$

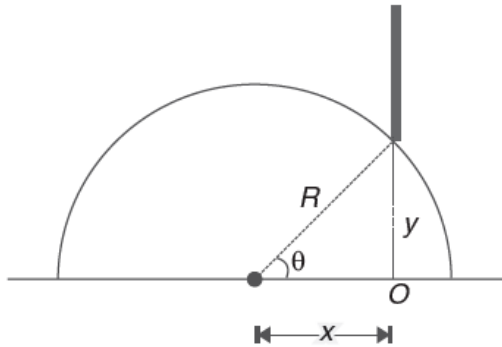
Substituindo o valor de N obtido em (4) na equação (2):

$$T = \frac{mg}{\sin \theta} \cos \theta$$

Logo:

$$T = mg \cot \theta$$

b)



A partir da figura:

$$y^2 + x^2 = R^2$$

Derivando em relação ao tempo:

$$2y \frac{dy}{dt} + 2x \frac{dx}{dt} = 0$$

Portanto:

$$y \frac{dy}{dt} = -x \frac{dx}{dt}$$

O sinal negativo indica que, à medida que x aumenta, y diminui; isto é, a haste se move para baixo.

Vamos desconsiderar o sinal negativo. Derivando novamente em relação ao tempo:

$$\left(\frac{dy}{dt}\right)\left(\frac{dy}{dt}\right) + y \frac{d^2y}{dt^2} = \left(\frac{dx}{dt}\right)\left(\frac{dx}{dt}\right) + x \frac{d^2x}{dt^2}$$

Imediatamente após a corda ser cortada, a velocidade tanto da haste quanto do hemisfério é nula.

Logo:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dx}{dt} = 0$$

Portanto:

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{x}{y} \frac{d^2x}{dt^2}$$

Como:

$$\frac{x}{y} = \cot \theta,$$

temos:

$$a_y = (\cot \theta) a_x \quad (1)$$

em que:

- a_y é a aceleração da haste para baixo;
 - a_x é a aceleração do hemisfério para a esquerda.
- Utilizando o diagrama de forças da parte (a), podemos escrever, para o hemisfério:

$$N \cos \theta = M a_x \quad (2)$$

Para a haste:

$$mg - N \sin \theta = m a_y \quad (3)$$

Resolvendo as equações (1), (2) e (3):

$$a_x = \frac{mg}{M \tan \theta + m \cot \theta}$$

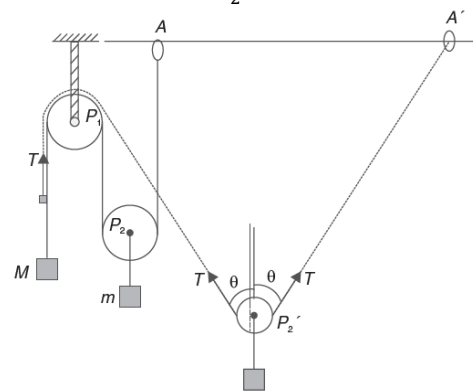
Portanto, a aceleração do hemisfério é:

$$a_{\text{hemisfério}} = \frac{mg}{M \tan \theta + m \cot \theta}$$

dirigida para a esquerda.

66 Resolução do Laerte:

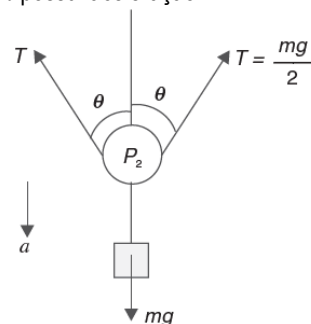
Para o equilíbrio: $M = \frac{m}{2}$



Para que a polia P_2 esteja em equilíbrio horizontal, é necessário que os dois segmentos da corda (P_1P_2 e P_2A') tenham a mesma inclinação em relação à vertical.

Portanto, P_2 se moverá tanto horizontalmente quanto verticalmente.

Sim, é possível que M não tenha aceleração — isto é, que se mova com velocidade constante — enquanto m possui aceleração.



Cálculo da aceleração de m

$$mg - 2T \cos \theta = ma$$

Como, quando M não possui aceleração:

$$T = Mg = \frac{mg}{2},$$

temos:

$$mg - 2\left(\frac{mg}{2}\right)\cos\theta = ma$$

Simplificando:

$$mg - mg\cos\theta = ma$$

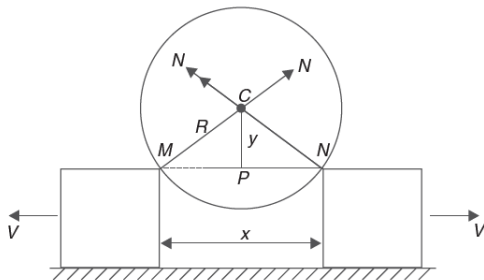
Dividindo ambos os lados por m :

$$g - g\cos\theta = a$$

Logo:

$$a = g(1 - \cos\theta)$$

67 Resolução do Laerte:



Seja:

$$CP = y$$

$$MN = x.$$

Logo:

$$y^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 = R^2$$

Derivando em relação ao tempo:

$$2y\frac{dy}{dt} + \frac{1}{4} \cdot 2x\frac{dx}{dt} = 0$$

Portanto:

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{x}{4y}\frac{dx}{dt}$$

Como:

$$\frac{dx}{dt} = 2v,$$

temos:

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{x}{4y}(2v)$$

$$\therefore \frac{dy}{dt} = -\frac{x}{2y}v \quad (1)$$

Quando:

$$x = a = \sqrt{2}R,$$

temos:

$$MP = \frac{a}{2} = \frac{R}{\sqrt{2}}.$$

Logo:

$$y = \frac{R}{\sqrt{2}}.$$

Nesse instante, a velocidade do centro da esfera é:

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{\sqrt{2}R}{2\left(\frac{R}{\sqrt{2}}\right)}v$$

$$\frac{dy}{dt} = -v.$$

O sinal negativo indica que y está diminuindo.

Aceleração do centro da esfera

Derivando novamente a equação (1):

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{v}{2}\left[\frac{y\frac{dx}{dt} - x\frac{dy}{dt}}{y^2}\right]$$

Portanto, a aceleração do centro C , quando:

$$y = \frac{R}{\sqrt{2}}, \quad x = \sqrt{2}R, \quad \frac{dx}{dt} = 2v,$$

$$a = \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{v}{2}\left[\frac{\left(\frac{R}{\sqrt{2}}\right)(2v) - (\sqrt{2}R)(-v)}{\left(\frac{R}{\sqrt{2}}\right)^2}\right]$$

Simplificando:

$$a = -\frac{v^2}{R}(4\sqrt{2})$$

Como:

$$v = 1 \text{ m/s}$$

$$R = 1 \text{ m},$$

obtemos:

$$a = -\frac{1^2}{1} \cdot 4\sqrt{2}$$

$$a = -4\sqrt{2} \text{ m/s}^2$$

O sinal negativo indica que a aceleração é dirigida para baixo.

Equação das forças sobre a esfera

Para a esfera:

$$Mg - 2N\cos 45^\circ = Ma$$

Substituindo os valores:

$$2 \cdot 10 - N\sqrt{2} = 2 \cdot 4\sqrt{2}$$

Logo:

$$20 - 8\sqrt{2} = N\sqrt{2}$$

Portanto:

$$N\sqrt{2} = 20 - 8\sqrt{2}$$

Dividindo por $\sqrt{2}$:

$$N = 10\sqrt{2} - 8$$

Assim, a força normal exercida por cada bloco sobre a esfera é:

$$N = 10\sqrt{2} - 8 \text{ N}$$

b)

A força horizontal necessária em cada bloco é:

$$\frac{N}{\sqrt{2}}$$

Substituindo o valor de N :

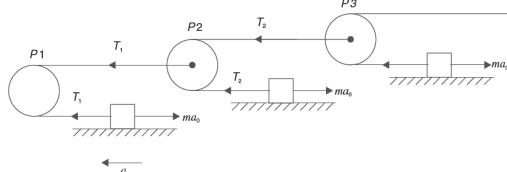
$$\frac{N}{\sqrt{2}} = \frac{10\sqrt{2} - 8}{\sqrt{2}}$$

Logo:

$$\frac{N}{\sqrt{2}} = 5 - 4\sqrt{2} \text{ N}$$

68 Resolução do Laerte:

Consideremos o problema em um referencial que se move para a esquerda com uma aceleração a_0 . Nesse referencial, P_1 está em repouso e todos os blocos sofrem uma força fictícia ma_0 dirigida para a direita.



Claramente:

$$T_1 \propto a_0 \quad (1)$$

Nesse referencial, seja a_1 a aceleração do bloco 1, dirigida para a esquerda.

A polia P_2 se moverá para a direita com uma aceleração a_1 .

Se um observador estiver localizado em um referencial preso à polia P_2 — que se move para a esquerda com uma aceleração $(a_0 - a_1)$ —, ele concluirá, de maneira semelhante, que:

$$T_2 \propto (a_0 - a_1) \quad (2)$$

Portanto:

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{a_0}{a_0 - a_1}$$

Mas a polia não possui massa.

Logo:

$$T_1 = 2T_2$$

Assim:

$$\frac{a_0}{a_0 - a_1} = 2$$

Resolvendo:

$$a_0 = 2(a_0 - a_1)$$

$$a_0 = 2a_0 - 2a_1$$

$$2a_1 = a_0$$

Portanto:

$$a_1 = \frac{a_0}{2}$$

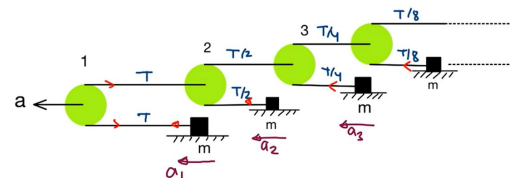
No referencial do solo, a aceleração do bloco 1 será:

$$\frac{3a_0}{2}$$

dirigida para a esquerda.

Outra maneira de resolver:

Método do trabalho virtual



Princípio do trabalho virtual

$$\sum \vec{T} \cdot \vec{v} = 0$$

$$\sum \vec{T} \cdot \vec{a} = 0$$

Aplicando o método do trabalho virtual:

$$-2Ta + Ta_1 + \frac{T}{2}a_2 + \frac{T}{4}a_3 + \frac{T}{8}a_4 + \dots = 0$$

Como:

$$a_1 = \frac{T}{m},$$

$$a_2 = \frac{T/2}{2m},$$

$$a_3 = \frac{T/4}{4m},$$

$$a_4 = \frac{T/8}{8m},$$

temos:

$$-2a + \frac{T}{m} + \frac{1}{2} \frac{T}{2m} + \frac{1}{4} \frac{T}{4m} + \frac{1}{8} \frac{T}{8m} + \dots = 0$$

Simplificando:

$$-2a + \frac{T}{m} \left\{ 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \dots \right\} = 0$$

A expressão entre chaves é uma progressão geométrica infinita, com:

$$a_1 = 1$$

e

$$q = \frac{1}{4}.$$

Portanto:

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \dots = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}}$$

Assim:

$$\frac{T}{m} \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{4}} \right) = 2a$$

Como:

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{3},$$

segue que:

$$\frac{T}{m} \cdot \frac{4}{3} = 2a$$

Logo:

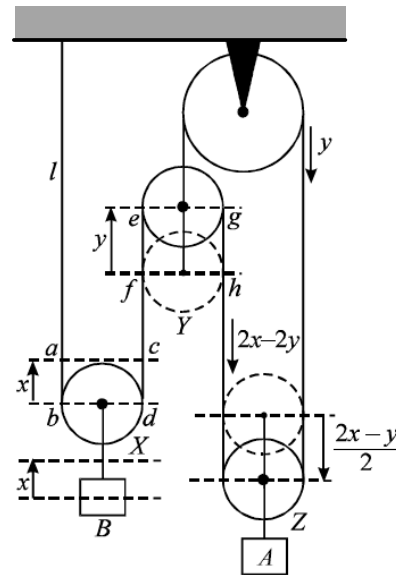
$$T = \frac{3}{2} am$$

Finalmente:

$$a_1 = \frac{T}{m}$$

$$a_1 = \frac{3a}{2}$$

69 Resolução do Laerte:



a) A análise da situação é mostrada na Figura. Suponha que o bloco B, juntamente com a polia Y, suba uma distância x . Isso produzirá uma folga de comprimento ab e cd , sendo:

$$ab + cd = 2x$$

na corda 1.

Simultaneamente, se supusermos que a polia Y suba uma distância y , isso resultará na compensação do comprimento que ficou frouxo por ef e gh , sendo:

$$ef + gh = 2y.$$

Além disso, devido à mesma corda conectada à polia Y, ela subirá uma distância y .

Assim, à esquerda da polia Z, a corda terá uma folga de comprimento:

$$2x - 2y.$$

À direita, sua folga será y , devido ao movimento para cima da polia Y. Portanto, a folga total acima da polia Z será:

$$(2x - 2y) + y = 2x - y.$$

Consequentemente, a polia Z deverá descer uma distância:

$$\frac{2x - y}{2}$$

para tensionar todas as cordas.

Assim, a velocidade da polia Z, ou do bloco A, será:

$$v_A = \frac{2v_B - v_Y}{2}$$

Substituindo os valores:

$$v_A = \frac{2(1) - 2}{2}$$

$$v_A = 0$$

Portanto, o bloco A estará em repouso nesse instante.

(b) Neste caso, é dado que o bloco B está subindo e a polia Y está descendo. A análise apresentada serve para que os estudantes desenvolvam a relação de restrição para o movimento do bloco B , da polia Y e da polia Z , ou do bloco A .

Finalmente, obtém-se:

$$a_A = \frac{-2a_B - a_Y}{2}$$

Substituindo os valores:

$$a_A = \frac{-2(3) - 1}{2}$$

$$a_A = \frac{-7}{2}$$

$$a_A = -3,5 \text{ m/s}^2$$

O sinal negativo indica que a aceleração do bloco A possui sentido oposto ao sentido positivo adotado.

70 Resolução do Laerte:

a)

$$x_A + 2x_B + 2x_C = 0$$

$$\Rightarrow a_A + 2a_B + 2a_C = 0$$

considerando todos os movimentos para baixo.

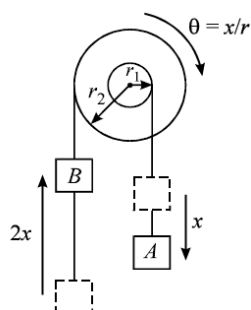
b)

$$2x_A + x_B + 2x_C = 0$$

$$\Rightarrow 2a_A + a_B + 2a_C = 0$$

considerando todos os movimentos para baixo.

71. Resolução do Laerte:



Iniciamos nossa análise pelo bloco B , conforme mostrado na Figura.

Suponha que o bloco B desça uma distância x . A corda 2 subirá a mesma distância x . Devido a esse movimento, a corda 2' descenderá uma distância $x/2$, pois a razão entre os dois raios é $1/2$.

Assim, a redução no comprimento da corda $abcd$ será $x/2$, pois, no lado 2, a corda sobe uma distância x , enquanto, no lado 2', ela desce uma distância $x/2$. Portanto, a polia X deverá subir uma distância $x/4$ para afrouxar a corda 2 + 2' em $x/2$, que é a redução necessária.

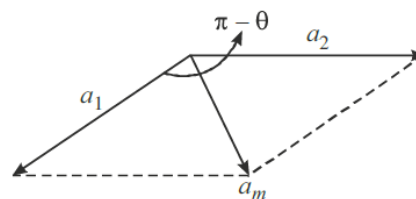
Consequentemente, o bloco A , juntamente com a polia X , subirá uma distância $x/2$.

A mesma relação de restrição existe para as velocidades e acelerações dos blocos A e B .

Assim, a relação de restrição entre as velocidades de A e B é:

$$v_A = \frac{v_B}{3}$$

72. Resolução do Laerte:



Como m também está se movendo para baixo ao longo do plano inclinado junto com M , podemos determinar a aceleração resultante de m utilizando a adição vetorial das duas acelerações que atuam sobre m , conforme mostrado na Figura. Assim, temos:

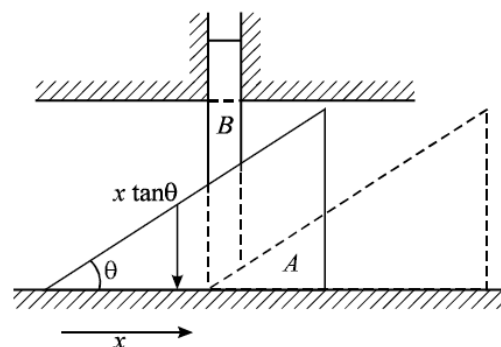
$$a_m = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 - 2a_1a_2 \cos \theta} = 4.35 \text{ m/s}^2$$

73. Resolução do Laerte:

Podemos observar que a barra está restrita a se mover somente na direção vertical, enquanto a cunha pode se mover apenas ao longo do plano horizontal. Se a cunha se mover para a direita uma distância x , a Figura mostra que a barra se moverá verticalmente para baixo uma distância:

$$x \tan \theta$$

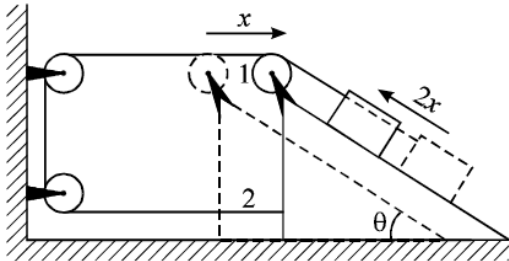
Assim, se a cunha estiver se movendo para a direita com uma aceleração a_1 , a barra descenderá com uma aceleração a_2 , dada por:



[O restante da equação não aparece nas imagens enviadas.]

$$a_2 = a_1 \tan \theta$$

74. Resolução do Laerte:



A análise da situação é mostrada na Figura. Se a cunha for puxada para a direita por uma distância x , podemos observar que os trechos 1 e 2 da corda aumentam em direção à esquerda, totalizando um comprimento $2x$.

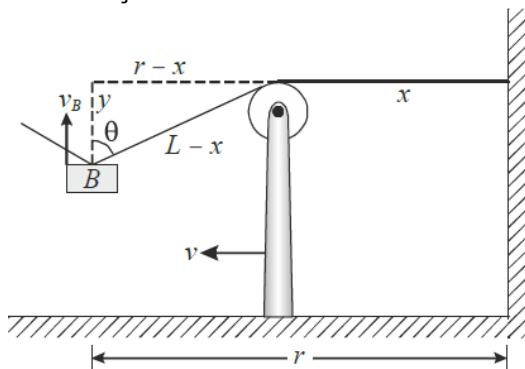
Pelo mesmo comprimento, o bloco A subirá ao longo do plano inclinado em relação à cunha. Portanto, se a aceleração da cunha para a direita for a_1 , a aceleração do bloco A em relação à cunha será $2a_1$. Agora, a aceleração do bloco A em relação ao solo pode ser obtida pela soma vetorial de sua aceleração com a aceleração da cunha, dada por:

$$a_A = (a_1^2 + 4a_1^2 - 4a_1^2 \cos \theta)^{1/2}$$

Logo:

$$a_A = a_1 \sqrt{5 - 4 \cos \theta}$$

75. Resolução do Laerte:



A partir da figura, utilizamos:

$$v = \frac{dx}{dt}$$

$$v_B = -\frac{dy}{dt}$$

Temos:

$$y^2 + (r - x)^2 = (L - x)^2$$

Derivando em relação a t :

$$2y \frac{dy}{dt} - 2(r - x) \frac{dx}{dt} = -2(L - x) \frac{dx}{dt}$$

$$-v_B \cos \theta - v \sin \theta = -v$$

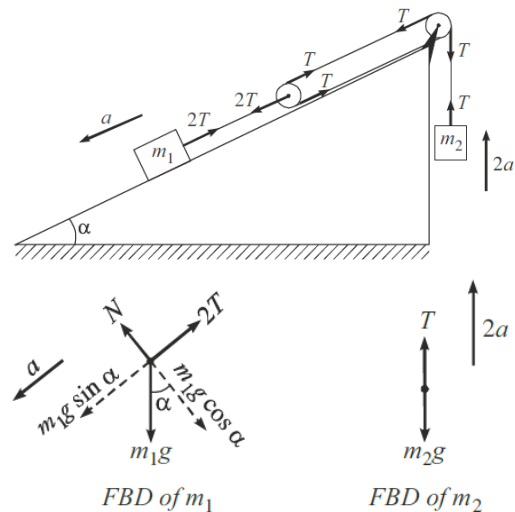
Portanto:

$$v_B = \frac{v(1 - \sin \theta)}{\cos \theta}$$

76. Resolução do Laerte:

Conforme discutido no problema anterior, por observação podemos afirmar que, se a aceleração de m_1 para baixo ao longo do plano for a , então a aceleração de m_2 , verticalmente para cima, será $2a$. Como também é dado que as polias são de massas desprezíveis, a tensão na segunda corda pode ser considerada igual a $2T$, se T for a tensão na primeira corda, conforme mostrado na Figura.

Aqui, podemos escrever diretamente as equações dinâmicas do movimento das duas massas m_1 e m_2 :



Equação do movimento para a massa m_1

$$(2.15) \quad m_1 g \sin \alpha - 2T = m_1 a$$

Equação do movimento para a massa m_2

$$(2.16) \quad T - m_2 g = m_2 (2a)$$

Multiplicando a equação por 2e adicionando-a à equação, obtemos:

$$a = \frac{m_1 \sin \alpha - 2m_2}{m_1 + 4m_2}$$

Portanto, a aceleração das massas é:

$$a = \frac{m_1 \sin \alpha - 2m_2}{m_1 + 4m_2}$$

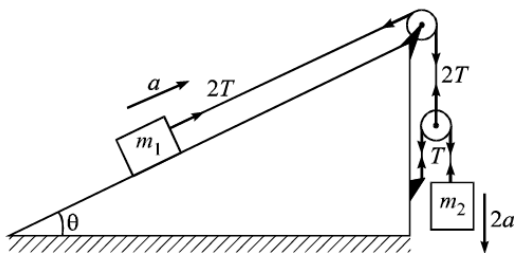
em que a representa a aceleração de m_1 para baixo ao longo do plano inclinado. A aceleração de m_2 possui módulo $2a$ e sentido vertical para cima.

77. Resolução do Laerte:

Aqui, a polia menor é móvel e, por observação, podemos afirmar que a aceleração de m_2 é o dobro da aceleração de m_1 .

Assim, suponhamos que m_1 esteja subindo o plano inclinado com uma aceleração a . Então, a aceleração da massa m_2 , descendo, será $2a$.

Os diagramas de corpo livre de m_1 e m_2 são mostrados na Figura.



As equações dinâmicas podem ser escritas como:

Para a massa m_1 :

$$2T - m_1 g \sin \theta = m_1 a$$

Para a massa m_2 :

$$m_2 g - T = m_2 (2a)$$

Multiplicando a equação por 2 e adicionando-a à outra equação, obtemos:

$$2m_2 g - m_1 g \sin \theta = (m_1 + 4m_2)a$$

Logo:

$$a = \frac{2m_2 g - m_1 g \sin \theta}{m_1 + 4m_2}$$

Como:

$$m_2 = \eta m_1,$$

temos:

$$a = \frac{2g[2\eta - \sin \theta]}{4\eta + 1}$$

Portanto:

$$a = \frac{2g(2\eta - \sin \theta)}{4\eta + 1}$$

Essa é a aceleração de m_1 . A aceleração de m_2 possui módulo $2a$ e é dada por:

$$a_{m_2} = \frac{4g(2\eta - \sin \theta)}{4\eta + 1}$$

dirigida para baixo.

78. Resolução do Laerte:

Pela relação de restrição, temos:

$$a_2 = a_3 = \frac{a_1}{2} = a$$

As equações do movimento são:

$$(1) \quad m_3 g - T_1 = m_3 a$$

$$(2) \quad T_1 - 2T_2 = m_2 a$$

$$(3) \quad T_2 = m_1 (2a)$$

Somando as equações (1) e (2), e adicionando duas vezes a equação (3):

$$(1) + (2) + 2 \times (3)$$

$$\Rightarrow m_3 g = (m_3 + m_2 + 4m_1)a$$

Logo:

$$a = \frac{m_3}{m_3 + m_2 + 4m_1} g$$

Substituindo os valores:

$$a = \frac{400}{1700} g$$

$$a = \frac{4g}{17}$$

$$a = 2,35 \text{ m/s}^2$$

Portanto:

$$a_2 = a_3 = 2,35 \text{ m/s}^2$$

Como:

$$a_1 = 2a,$$

temos:

$$a_1 = 2 \cdot 2,35$$

$$a_1 = 4,7 \text{ m/s}^2$$

Agora, para determinar T_1 :

$$T_1 = m_3 g - m_3 a$$

$$T_1 = 0,4(10 - 2,35)$$

$$T_1 = 3,06 \text{ N}$$

Para determinar T_2 :

$$T_2 = m_1 (2a)$$

$$T_2 = 0,2 \times 2 \times 2,35$$

$$T_2 = 0,94 \text{ N}$$

Respostas

$$a_1 = 4,7 \text{ m/s}^2$$

$$a_2 = a_3 = 2,35 \text{ m/s}^2$$

$$T_1 = 3,06 \text{ N}$$

$$T_2 = 0,94 \text{ N}$$

79. Resolução do Laerte:

A aceleração do bloco e da corda é:

$$a = \frac{F}{M + m}$$

a) Força que a corda exerce sobre o bloco

$$T_1 = Ma = \frac{MF}{M + m}$$

Portanto:

$$T_1 = \frac{MF}{M + m}$$

b) Tensão no ponto médio da corda

$$T_2 = \left(M + \frac{m}{2}\right)a$$

Substituindo:

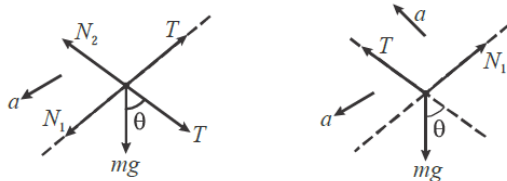
$$T_2 = \left(M + \frac{m}{2}\right)\frac{F}{M + m}$$

Logo:

$$T_2 = \frac{\left(M + \frac{m}{2}\right)F}{M + m}$$

80. Resolução do Laerte:

Se A deslizar para baixo com aceleração a , B se moverá para cima em relação a A , com a mesma aceleração. Desenhamos os diagramas de corpo livre de A e B , conforme mostrado.



Equações do movimento

Utilizamos:

$$N_1 + Mg \sin \theta - T = Ma$$

$$mg \sin \theta - N_1 = ma$$

$$T - mg \cos \theta = ma$$

A partir das equações (1), (2) e (3):

$$(mg \sin \theta - ma) + Mg \sin \theta - (Ma + mg \cos \theta) = Ma$$

$$a(M + 2m) = g[(M + m) \sin \theta - m \cos \theta]$$

Logo:

$$a = \left[\frac{(M + m) \sin \theta - m \cos \theta}{M + 2m} \right] g$$

Assim:

$$a_M = a$$

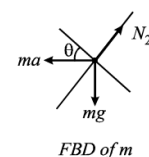
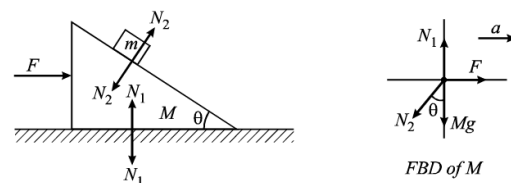
$$a_m = \sqrt{2} a$$

81. Resolução do Laerte:

As forças que atuam nos corpos m e M são mostradas na Figura, juntamente com os diagramas de corpo livre das massas m e M .

Como os dois corpos se movem juntos, podemos determinar diretamente a aceleração do sistema para a direita:

$$a = \frac{F}{m + M}$$



A condição é que o pequeno bloco de massa m permaneça em repouso sobre a superfície inclinada da cunha.

Observe o diagrama de corpo livre de m na Figura. A força ma , orientada para a esquerda, é a força fictícia que atua sobre o bloco, pois seu referencial é a cunha. Como a cunha se move com uma aceleração, analisamos o movimento de m em relação a ela.

Agora, em relação à cunha, m está em repouso ou em equilíbrio. Portanto, podemos equilibrar todas as forças ao longo da tendência de movimento do corpo, isto é, ao longo do plano inclinado, e perpendicularmente a ele, conforme mostrado no diagrama de corpo livre.

Para que m permaneça em repouso, analisando o diagrama de corpo livre de m ao longo do plano:

$$mg \sin \theta = ma \cos \theta$$

ou:

$$a = g \tan \theta$$

Substituindo:

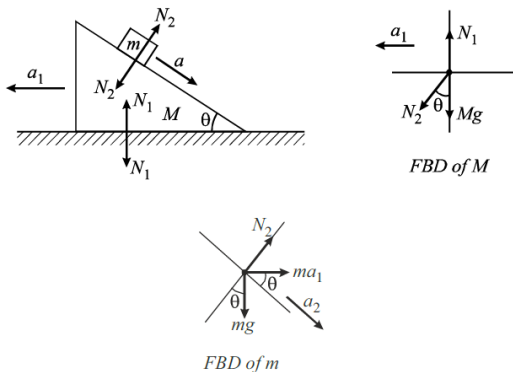
$$\frac{F}{m + M} = g \tan \theta$$

Portanto:

$$F = (m + M)g \tan \theta$$

82. Resolução do Laerte:

A Figura mostra as forças que atuam sobre os corpos e os diagramas de corpo livre de M e m . Devido à reação normal N_1 que atua sobre M , ele se move para a esquerda, enquanto m desliza para baixo. Como M desliza para a esquerda com uma aceleração a_1 , ele se torna um referencial não inercial para m . Por esse motivo, no diagrama de corpo livre de m , aplicamos uma força fictícia ma_1 orientada para a direita. Consideremos que m desliza para baixo com uma aceleração a_2 em relação à cunha. Agora, podemos escrever as equações dinâmicas para os dois corpos.



Equação do movimento para M em relação à Terra
Ao longo do plano

$$N_2 \sin \theta = Ma_1$$

Perpendicularmente ao plano

$$N_1 = Mg + N_2 \cos \theta$$

Equação do movimento para m em relação a M
Ao longo do plano

$$mg \sin \theta + ma_1 \cos \theta = ma_2$$

Perpendicularmente ao plano

$$N_2 = mg \cos \theta - ma_1 \sin \theta$$

A partir das equações, temos:

$$\frac{Ma_1}{\sin \theta} = mg \cos \theta - ma_1 \sin \theta$$

ou

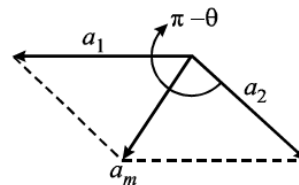
$$a_1 = \frac{mg \cos \theta}{\frac{M}{\sin \theta} + m \sin \theta} = \frac{mg \sin \theta \cos \theta}{M + m \sin^2 \theta}$$

Substituindo o valor de a_1 na equação, obtemos:

$$a_2 = g \sin \theta + \frac{mg \sin \theta \cos^2 \theta}{M + m \sin^2 \theta}$$

A equação fornece a aceleração de M , enquanto a equação fornece a aceleração de m em relação a M . A aceleração resultante de m é a soma vetorial de a_1 e a_2 , pois m também se move com aceleração a_1 para a esquerda, junto com M .

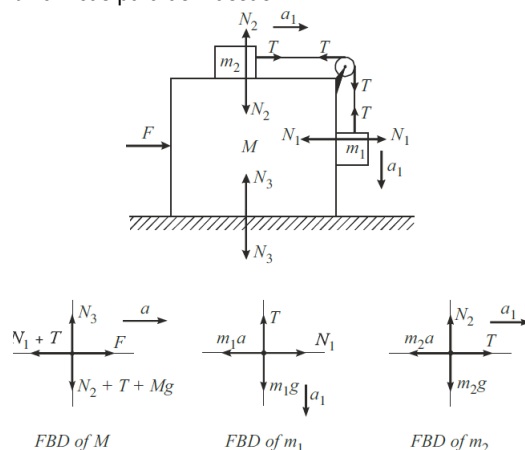
A aceleração resultante de m pode ser obtida pela soma vetorial mostrada na Figura.



$$a_m = [a_1^2 + a_2^2 - 2a_1a_2 \cos \theta]^{\frac{1}{2}}$$

83. Resolução do Laerte:

A Figura mostra as forças que atuam sobre os corpos e os diagramas de corpo livre de M , m_1 e m_2 . Consideremos que a aceleração da massa M sobre o solo seja a . Como a_1 é dada para m_1 no sentido descendente, m_2 também se moverá para a frente com aceleração a_1 , em relação a M . Para resolver o problema, escrevemos as equações dinâmicas para as massas.



Equações do movimento para a massa M

Ao longo do movimento

$$F - N_1 - T = Ma$$

Perpendicularmente ao movimento

$$N_3 = N_2 + T + Mg$$

Equações do movimento para a massa m_1
Ao longo do movimento

$$m_1 g - T = m_1 a_1$$

Perpendicularmente ao movimento

$$N_1 = m_1 a$$

Equação do movimento para a massa m_2

Ao longo do movimento

$$T - m_2 a = m_2 a_1$$

Perpendicularmente ao movimento

$$N_2 = m_2 g$$

Adicionando as equações, obtemos:

$$m_1 g - m_2 a = (m_1 + m_2) a_1$$

ou:

$$a = \frac{m_1}{m_2} g - \left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right) a_1$$

Agora, adicionando as equações, obtemos:

$$F - m_1 a - m_2 a = Ma + m_2 a_1$$

ou:

$$F = m_1 a + (M + m_2) a + m_2 a_1$$

Substituindo o valor de a na expressão acima, obtemos:

$$F = (m_1 + M + m_2) \left(\frac{m_1}{m_2} g - a_1 - \frac{m_1}{m_2} a_1 \right) + m_2 a_1$$

Portanto:

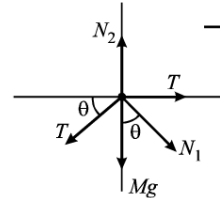
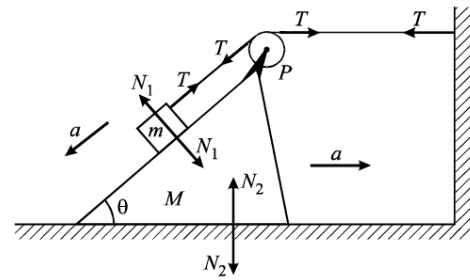
$$F = m_1 g + \frac{(M + m_1)m_1}{m_2} (g - a_1) - (M + 2m_1)a_1$$

84. Resolução do Laerte:

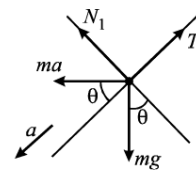
Pode-se demonstrar facilmente, por meio da análise das restrições, que, se a cunha se mover para a direita por uma distância x , a pequena barra percorrerá uma distância igual x ao longo do plano inclinado da cunha. Assim, ambos os corpos se moverão com a mesma aceleração: a cunha para a direita em relação à Terra e a barra para baixo, ao longo do plano inclinado, em relação à cunha.

Como o bloco é analisado em relação à cunha, que constitui um referencial não inercial, uma força fictícia é aplicada sobre a barra para a esquerda, conforme mostrado em seu diagrama de corpo livre.

Agora, escrevemos as equações do movimento de m e M , de acordo com as forças mostradas em seus diagramas de corpo livre na Figura.



FBD of M



FBD of m

Equação do movimento para M

Ao longo do plano

$$T + N_1 \sin \theta - T \cos \theta = Ma$$

As equações do movimento na direção vertical não serão utilizadas aqui, pois não há movimento nessa direção.

Equação do movimento para m

Ao longo do plano

$$ma \cos \theta + mg \sin \theta - T = ma$$

Normal ao plano

$$N_1 + ma \sin \theta = mg \cos \theta$$

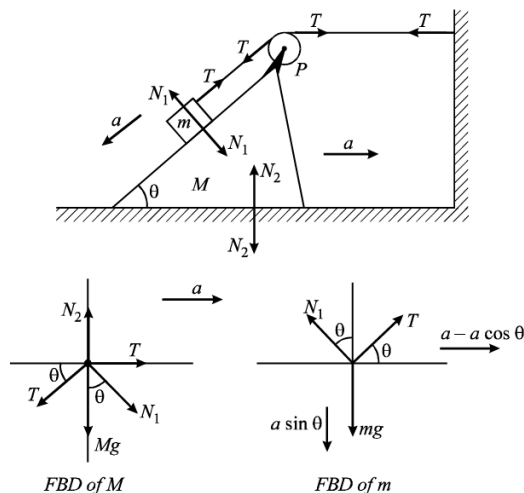
Substituindo os valores de T e N_1 obtidos nas equações na equação, obtemos:

$$a = \frac{mg \sin \theta}{M + 2m(1 - \cos \theta)}$$

Tratamento alternativo

Os problemas dessa categoria também podem ser resolvidos no referencial da Terra, sem utilizar a força fictícia, conforme mostrado a seguir. Entretanto, ainda é aconselhável considerar a aceleração da cunha no referencial da Terra como a_1 e a aceleração da barra em relação à cunha como a_2 . Ao desenhar os diagramas de corpo livre, deve-se ter cuidado com a decomposição das forças. Ao resolver o problema no referencial da Terra, é conveniente decompor as forças nas direções horizontal e vertical e escrever as equações do movimento nessas duas direções.

Os respectivos diagramas de corpo livre são mostrados na Figura.



As equações do movimento para a massa M permanecem as mesmas da equação:

$$T + N_1 \sin \theta - T \cos \theta = Ma$$

As equações do movimento para m são agora escritas nas direções horizontal e vertical, em relação à Terra.

$$T \cos \theta - N \sin \theta = m(a - a \cos \theta)$$

e

$$mg - T \sin \theta - N \cos \theta = ma \sin \theta$$

Resolvendo as equações, obtemos o mesmo resultado:

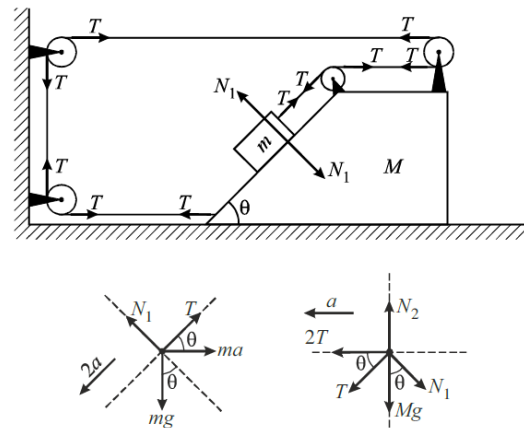
$$a = \frac{mg \sin \theta}{M + 2m(1 - \cos \theta)}$$

Observação

Tenha cuidado ao resolver o problema no referencial da Terra: deve-se considerar a aceleração da massa em relação à sua superfície, que está acelerando, mas escrever as equações nas direções horizontal e vertical em relação à Terra, ou seja, ao solo.

85. Resolução do Laerte:

As forças que atuam sobre o bloco M e a barra m são mostradas na Figura. Primeiramente, podemos estabelecer facilmente a relação de restrição entre as acelerações das massas M e m . Podemos observar que, se M se mover para a esquerda com aceleração a , a barra m se moverá para baixo sobre a superfície inclinada de M , com uma aceleração $2a$ em relação a ele. Os diagramas de corpo livre das massas também são mostrados na Figura.



Equação do movimento para M

$$2T + T \cos \theta - N_1 \sin \theta = Ma$$

Equações do movimento para m

$$mg \sin \theta - T - ma \cos \theta = 2ma$$

e

$$N_1 = mg \cos \theta + ma \sin \theta$$

Resolvendo as equações acima, obtemos:

$$a = \frac{2mg \sin \theta}{M + m(5 + 4 \cos \theta)}$$

e

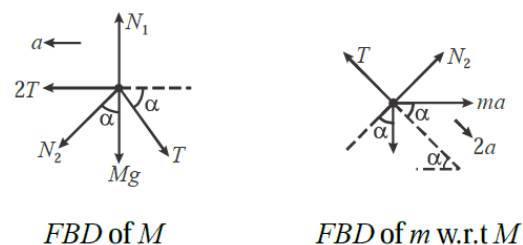
$$T = \frac{mg \sin \theta (M + m + 2m \cos \theta)}{M + m(5 + 4 \cos \theta)}$$

Observação

Assim como no problema anterior, este problema também pode ser resolvido no referencial do solo. Tente resolvê-lo por conta própria.

86. Resolução do Laerte:

Se M deslizar para a esquerda com uma aceleração a , m deslizará para baixo com o dobro da aceleração em relação a M . Os diagramas de corpo livre de m e M são:



Equações do movimento

$$2T + N_2 \sin \alpha - T \cos \alpha = Ma$$

$$N_2 + ma \sin \alpha = mg \cos \alpha$$

$$ma \cos \alpha + mg \sin \alpha - T = 2ma$$

A partir das equações (1), (2) e (3):

$$(ma \cos \alpha + mg \sin \alpha - 2ma)(2 - \cos \alpha)$$

$$+(mg \cos \alpha - ma \sin \alpha) \sin \alpha = Ma$$

$$2ma \cos \alpha + 2mg \sin \alpha - 4ma$$

$$-ma \cos^2 \alpha - mg \sin \alpha \cos \alpha + 2ma \cos \alpha$$

$$+mg \cos \alpha \sin \alpha - ma \sin^2 \alpha = Ma$$

$$a(M + 5m - 4m \cos \alpha) = 2mg \sin \alpha$$

Portanto:

$$a = \frac{2mg \sin \alpha}{M + m(5 - 4 \cos \alpha)}$$

As componentes da aceleração de msão:

$$a_{mx} = 2a \cos \alpha - a$$

$$a_{my} = 2a \sin \alpha$$

Logo:

$$a_m = \sqrt{a_{mx}^2 + a_{my}^2}$$

$$a_m = \sqrt{5 - 4 \cos \alpha} a$$

Assim:

$$a_m = \frac{2mg \sin \alpha \sqrt{5 - 4 \cos \alpha}}{M + m(5 - 4 \cos \alpha)}$$

87. Resolução do Laerte:

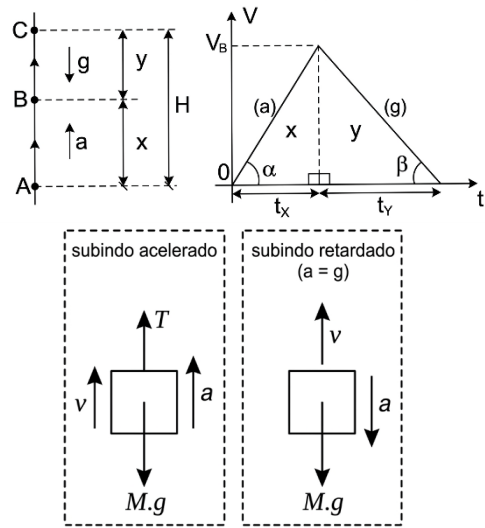
Para se levar uma pedra desde o solo até uma altura vertical H , partindo do repouso e parando ao final do movimento, como se deve proceder para fazê-lo em tempo mínimo? Ora, deve-se impor à pedra a máxima aceleração disponível inicialmente, a fim de que sua velocidade cresça o mais rápido possível e, a partir de um certo ponto da subida (ponto B), deve-se impor a máxima desaceleração disponível de forma que ela atinja o repouso (no ponto C) no menor espaço de tempo.

Inicialmente, a caixa subirá sob ação das forças tração T para cima e peso P para baixo, e a máxima aceleração disponível, a ser usada no trecho inicial AB, é limitada pelo máximo valor da tração T suportada pelo fio sem que ele se rompa. A segunda lei de Newton, durante a subida acelerada (trecho AB), permite escrever:

$$F_R = (T - Mg) = Ma$$

$$\Rightarrow a = \left(\frac{T - Mg}{Mg} \right) g$$

$$\Rightarrow \frac{g}{a} = \left(\frac{Mg}{T - Mg} \right) \text{ (eq1)}$$



No trecho BC seguinte, para se obter máxima desaceleração da caixa em sua subida retardada, é preciso fazer uso de uma máxima força resultante se opondo à velocidade V para cima da caixa, isto é, de uma máxima força resultante F_R para baixo, o que é obtido largando-se a corda a fim de anular a tração ($T = 0$), permitindo que a própria força peso P para baixo faça o papel de força resultante F_R para baixo e freie a caixa com aceleração g .

Como a inclinação do gráfico $V \times t$ está relacionada à aceleração do móvel em cada trecho, um dos trechos AB e BC (veja gráfico acima), podemos escrever as seguintes relações:

$$a = \operatorname{tg} \alpha$$

$$\Rightarrow a = \frac{V_B}{t_x} \text{ (eq2)}$$

$$g = \operatorname{tg} \beta$$

$$\Rightarrow g = \frac{V_B}{t_y} \text{ (eq3)}$$

A área sob o gráfico $V \times t$ da figura anterior é numericamente igual à distância H percorrida pelo móvel em todo o percurso ABC de subida, o que nos permite escrever:

$$\text{área} = \frac{\text{base} \times \text{altura}}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{(t_x + t_y) \cdot V_B}{2} = H \text{ (eq4)}$$

Isolando t_x em eq2, t_y em eq3 e substituindo em eq4, vem:

$$\left(\frac{V_B}{a} + \frac{V_B}{g}\right) \frac{V_B}{2} = H$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{g}\right) \frac{(V_B)^2}{2} = H$$

$$\Rightarrow V_B = \sqrt{2H \left(\frac{a \cdot g}{a + g}\right)} \quad (\text{eq5})$$

Portanto, o tempo total da subida será:

$$t = t_x + t_y = \frac{V_B}{a} + \frac{V_B}{g} = V_B \left(\frac{a + g}{a \cdot g}\right)$$

$$t = \sqrt{2H \left(\frac{a \cdot g}{a + g}\right) \left(\frac{a + g}{a \cdot g}\right)}$$

$$t = t_x + t_y = \sqrt{\frac{2H}{g} \cdot \frac{a + g}{a}} = \sqrt{\frac{2H}{g} \left(1 + \frac{g}{a}\right)} \quad (\text{eq6})$$

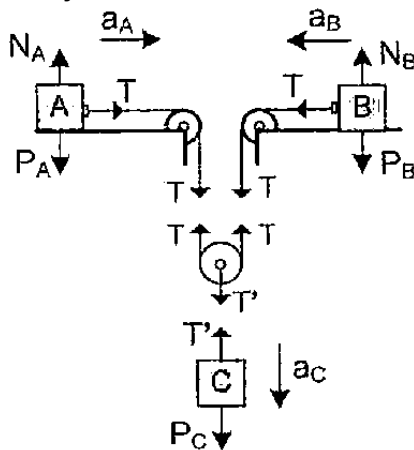
Substituindo a relação eq1 em eq6, vem:

$$t = \sqrt{\frac{2H}{g} \left(1 + \frac{g}{a}\right)}$$

$$= \sqrt{\frac{2H}{g} \left(1 + \frac{Mg}{T - Mg}\right)}$$

$$t = \sqrt{\frac{2H}{g} \left(\frac{T}{T - Mg}\right)}$$

88. Resolução do Laerte:



Escrevendo a segunda lei de Newton para cada caixa e levando em conta o vínculo geométrico, temos:

Caixa A:

$$(\text{eq1}) \quad F_R = m_A \cdot a_A \Rightarrow T = m_A \cdot a_A$$

Caixa B:

$$(\text{eq2}) \quad F_R = m_B \cdot a_B \Rightarrow T = m_B \cdot a_B$$

Polia ideal ($m = 0$):

$$(\text{eq3}) \quad F_R = m \cdot a \Rightarrow T' - 2T = 0 \cdot a \Rightarrow T' = 2T$$

Caixa C:

$$F_R = m_C \cdot a_C \Rightarrow P_C - T' = m_C \cdot a_C$$

Substituindo a equação (eq3):

$$(\text{eq4}) \quad P_C - 2T = m_C \cdot a_C$$

Vínculo geométrico:

$$(\text{eq5}) \quad a_C = \frac{a_A + a_B}{2}$$

Resolvendo o sistema de equações simultâneas eq1, eq2, eq4 e eq5, vem:

$$a_A = 4 \text{ m/s}^2$$

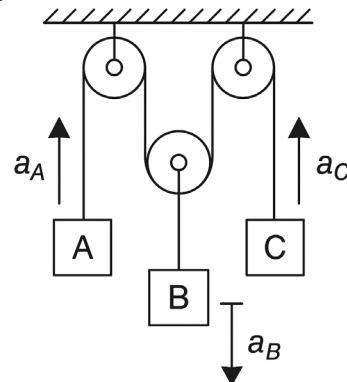
$$a_B = 6 \text{ m/s}^2$$

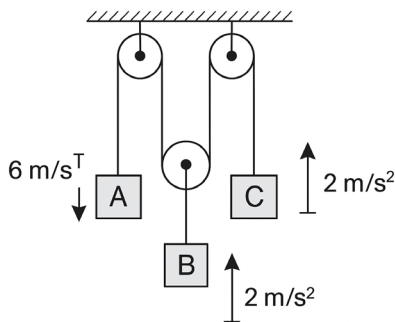
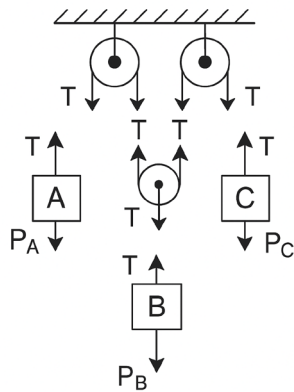
$$a_C = 5 \text{ m/s}^2$$

$$T = 60 \text{ N}$$

89. Resolução do Laerte:

Não se esforce para tentar prever inicialmente o sentido das acelerações de cada caixa. Arbitre para cada uma delas um sentido que facilite determinar a relação entre as mesmas, com base no vínculo geométrico do sistema.





Considerando os sentidos arbitrados para a aceleração de cada bloco na Figura, temos:

Vínculo geométrico:

$$(eq1) \quad a_B = \frac{a_A + a_C}{2}$$

Caixa A:

$$(eq2) \quad F_R = m_A \cdot a_A \Rightarrow T - m_A \cdot g = m_A \cdot a_A \\ \Rightarrow T - 30 = 3 \cdot a_A$$

Caixa C:

$$(eq3) \quad F_R = m_C \cdot a_C \Rightarrow T - m_C \cdot g = m_C \cdot a_C \\ \Rightarrow T - 10 = 1 \cdot a_C$$

Polia ideal ($m = 0$):

$$(eq4) \quad F_R = m \cdot a \Rightarrow T' - 2T = 0 \cdot a \Rightarrow T' = 2T$$

Caixa B:

$$(eq5) \quad F_R = m_B \cdot a_B \Rightarrow P_B - T' = m_B \cdot a_B \\ \Rightarrow 20 - 2T = 2 \cdot a_B$$

O sentido das acelerações foi arbitrado de forma a facilitar o equacionamento do vínculo geométrico. A relação eq1 acima, por exemplo, só é válida para esses sentidos arbitrados. Se outros sentidos forem arbitrados, essa equação mudará. Note que, quando a aceleração da caixa é arbitrada para cima, a força resultante nela deverá ser equacionada como sendo “as forças para cima menos as forças para baixo”, como ocorreu às caixas A e C. Quando a aceleração da caixa é arbitrada para baixo, a força resultante deverá ser equacionada como sendo “as forças para baixo menos as forças pra cima”, como ocorreu no equacionamento da caixa B.

Substituindo eq2, eq3, eq4 em eq6, vem:

$$3 \cdot (20 - 2T) = (T - 30) + 3 \cdot (T - 10)$$

$$\Rightarrow T = 12N$$

Substituindo o valor obtido para T em eq2, eq3, eq5, vem:

$$T - 30 = 3 \cdot a_A \Rightarrow 12 - 30 = 3 \cdot a_A \\ \Rightarrow a_A = -6 \text{ m/s}^2$$

$$T - 10 = 1 \cdot a_C \Rightarrow 12 - 10 = 1 \cdot a_C \\ \Rightarrow a_C = 2 \text{ m/s}^2$$

$$20 - 2T = 2 \cdot a_B \Rightarrow 20 - 2 \cdot (12) = 2 \cdot a_B \\ \Rightarrow a_B = -2 \text{ m/s}^2$$

As acelerações cujos sinais algébricos resultaram negativos serão computadas em módulo e seus sentidos serão invertidos para efetuar a correção de sinal. Assim, o resultado final correto é mostrado na Figura.

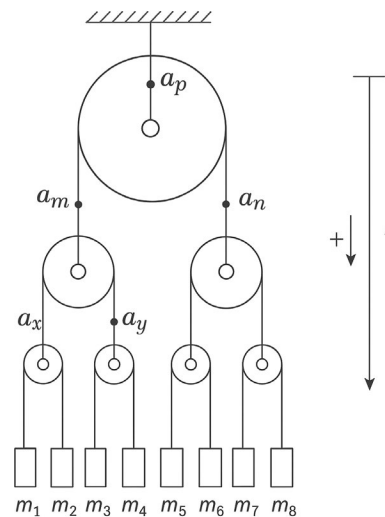
90. Resolução do Laerte:

$$a_1 = \frac{8g}{11}$$

$$a_2 = \frac{9g}{11}$$

$$a_3 = \frac{7g}{11}$$

91. Resolução do Laerte:



a) Seguindo um raciocínio semelhante ao demonstrado na resolução da questão anterior, podemos determinar a relação entre as acelerações dos corpos fazendo uso dos vínculos geométricos. Sendo $a_1 \downarrow$ e $a_2 \downarrow$ as acelerações das massas m_1 e m_2 , a aceleração $a_x \downarrow$ da corda acima é dada por:

$$(eq1) \quad a_x = \frac{a_1 + a_2}{2}$$

Sendo $a_3 \downarrow$ e $a_4 \downarrow$ as acelerações das massas m_3 e m_4 , a aceleração $a_y \downarrow$ da corda acima (veja figura) é dada por:

$$(eq2) \quad a_y = \frac{a_3 + a_4}{2}$$

A aceleração $a_m \downarrow$ da corda acima (veja figura) se relaciona com $a_x \downarrow$ e $a_y \downarrow$ por:

$$(eq3) \quad a_m = \frac{a_x + a_y}{2} = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{4}$$

Analogamente, a aceleração $a_n \downarrow$ também será dada por:

$$(eq4) \quad a_n = \frac{a_5 + a_6 + a_7 + a_8}{4}$$

A aceleração $a_p \downarrow$ da corda acima (veja figura) se relaciona com $a_m \downarrow$ e $a_n \downarrow$ por:

$$(eq5) \quad a_p = \frac{a_m + a_n}{2}$$

Entretanto, como o ponto p é fixo ao teto, temos:

$$(eq6) \quad a_p = 0$$

De eq3, eq4, eq5 e eq6, vem:

$$(eq7) \quad a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_8 = 0$$

Como todas as polias e cordas são ideais, vemos que cada uma das trações $T_1, T_2, T_3, \dots, T_7$ e T_8 nos fios presos diretamente aos blocos é igual a um oitavo da tração na corda extremo superior, isto é, a corda que prende a polia maior ao teto. Dessa forma, deduzimos:

$$(eq8) \quad T_1 = T_2 = T_3 = \dots = T_8 = T$$

Para cada um dos blocos, podemos escrever a segunda lei de Newton:

$$m_i g - T = m_i a_i, \text{ para } i = 1, 2, 3, \dots, 8$$

Dividindo toda a equação por m_i , vem:

$$(eq9) \quad g - \frac{T}{m_i} = a_i$$

Escrevendo a relação eq9 para cada um dos 8 blocos e somando membro a membro, vem:

$$g - \frac{T}{m_1} = a_1$$

$$g - \frac{T}{m_2} = a_2$$

$$g - \frac{T}{m_3} = a_3$$

:

$$g - \frac{T}{m_8} = a_8$$

$$8g - T \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_3} + \dots + \frac{1}{m_8} \right) = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_8$$

Usando eq7, vem:

$$8g - T \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_3} + \dots + \frac{1}{m_8} \right) = 0$$

$$T = \frac{8g}{\frac{1}{M}} = 8Mg, \text{ com}$$

$$\frac{1}{M} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_3} + \dots + \frac{1}{m_8}$$

O termo M é chamado massa reduzida do sistema.

Usando eq8, vem:

$$T_1 = T_2 = T_3 = \dots = T_8 = T = 8Mg$$

b) As acelerações $a_1, a_2, a_3, \dots, a_8$ de cada bloco podem ser determinadas com base na relação eq9, usando o resultado da tração T determinada no item a.

Fazendo $i = 1$ em eq9, vem:

$$a_1 = g - \frac{T}{m_1} = g - \frac{8Mg}{m_1} \Rightarrow a_1 = g \left(\frac{m_1 - 8M}{m_1} \right)$$

Fazendo $i = 2$ em eq9, vem:

$$a_2 = g - \frac{T}{m_2} = g - \frac{8Mg}{m_2} \Rightarrow a_2 = g \left(\frac{m_2 - 8M}{m_2} \right)$$

E assim sucessivamente, até $i = 8$, quando obteremos:

$$a_8 = g - \frac{T}{m_8} = g - \frac{8Mg}{m_8} \Rightarrow a_8 = g \left(\frac{m_8 - 8M}{m_8} \right)$$

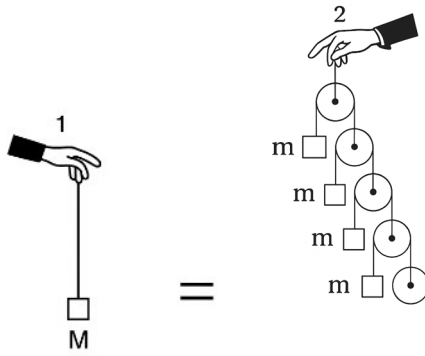
No caso geral, para um k genérico variando de 1 a 8, a aceleração a_k é dada por:

$$a_k = g - \frac{T}{m_k} = g - \frac{8Mg}{m_k} \Rightarrow a_k = g \left(\frac{m_k - 8M}{m_k} \right)$$

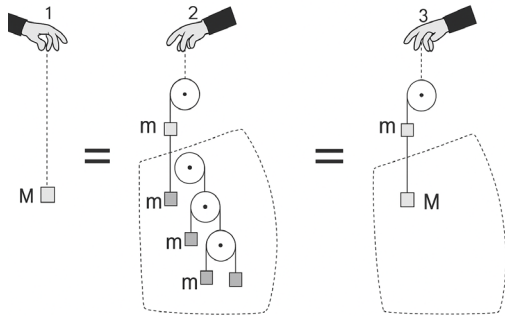
92. Resolução do Laerte:

a) Seja M a inércia equivalente do sistema com infinitos blocos e polias. Isso significa que a força que um operador 1 deve fazer para sustentar o bloco M em repouso é a mesma força que um operador 2 deve

fazer para manter suspenso o conjunto com infinitos blocos, ambos sujeitos ao mesmo campo gravitacional, uniforme como mostra a figura abaixo:



Ora, mas se M é a inércia equivalente do sistema com infinitas polias, M também é a inércia equivalente do sistema com "infinitas menos uma" polia. Afinal, a retirada de apenas uma polia e um bloco de um sistema com infinitos blocos e polias não altera a inércia equivalente desse sistema.



Ora, mas se os sistemas 1 e 3 mostrados na figura têm inércias equivalentes, podemos escrever:

$$M = \frac{4 \cdot M \cdot m}{M + m}$$

$$\Rightarrow 1 = \frac{4 \cdot m}{M + m}$$

$$\Rightarrow M + m = 4m$$

$$\Rightarrow \boxed{M = 3m} \text{ (eq1)}$$

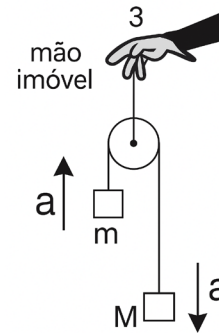
Esse resultado nos fornece a inércia equivalente do sistema formado por infinitos blocos e polias! ☺
Agora, podemos facilmente calcular a aceleração a do primeiro bloco de cima:

$$a = \frac{(M - m) \cdot g}{M + m} = \frac{(3m - m) \cdot g}{3m + m}$$

$$\Rightarrow \boxed{a = \frac{g}{2}}$$

b) A tração no fio que prende a primeira polia ao teto é exatamente a força que o operador aplica no fio para

susender qualquer um dos sistemas 1, 2 ou 3 mostrados anteriormente, visto que eles têm inércias equivalentes. Em particular, a tração que o operador aplica ao sistema 1 é dada simplesmente por:



$$T = M \cdot g$$

$$\Rightarrow \boxed{T = 3m \cdot g}$$

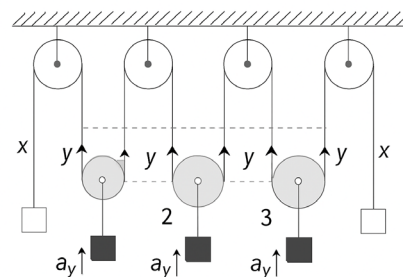
Essa é a tração no fio que prende a primeira polia ao teto. O mesmo resultado pode ser encontrado calculando-se a força que o operador aplica ao fio do sistema 3. Verifique esse resultado.

É curioso que, apesar de o sistema ser composto por infinitos blocos e polias, sua inércia equivalente seja finita e valha apenas $3m$.

93. Resolução:

Esse sistema é composto por N polias móveis (polias cinza) que sustentam N caixas pretas, além de duas caixas brancas que ficam nas extremidades. Na figura, foi desenhado o caso $N = 3$.

Para analisar o vínculo geométrico, admita que um deslocamento $\uparrow y$ das caixas pretas para cima seja compensado por um deslocamento $x \downarrow$ das duas caixas brancas das extremidades para baixo, de forma que o comprimento total do fio permaneça constante.



Assim, podemos dizer que:

$$+2x - 6y = 0$$

$$\Rightarrow +2a_x - 6a_y = 0$$

$$\Rightarrow a_x = 3a_y$$

onde a_x e a_y são as acelerações verticais dos blocos indicadas na figura.

Entretanto, para uma quantidade genérica N de polias móveis, os deslocamentos correspondentes $x \downarrow$ e $y \uparrow$ se relacionam por:

$$\begin{aligned} +2x - 2N \cdot y &= 0 \\ \Rightarrow +2a_x - 2N \cdot a_y &= 0 \\ \Rightarrow \boxed{a_x = N \cdot a_y} \quad (\text{eq1}) \end{aligned}$$

Escrevendo a segunda lei de Newton para os blocos brancos, vem:

$$\begin{aligned} m \cdot g - T &= m \cdot a_x \\ \Rightarrow 2m \cdot g - 2T &= 2m \cdot a_x \quad (\text{eq2}) \end{aligned}$$

Escrevendo a segunda lei de Newton para os blocos pretos, vem:

$$2T - m \cdot g = m \cdot a_y \quad (\text{eq3})$$

Somando eq2 e eq3, membro a membro, e considerando eq1, vem:

$$\begin{aligned} 2m \cdot g - m \cdot g &= m(2a_x + a_y) \\ \Rightarrow m \cdot g &= m(2N \cdot a_y + a_y) \end{aligned}$$

$$\boxed{a_y = \frac{g}{2N + 1}}$$

De eq1, vem:

$$\begin{aligned} a_x &= N \cdot a_y = N \cdot \frac{g}{2N + 1} \\ \Rightarrow \boxed{a_x = \frac{N \cdot g}{2N + 1}} \end{aligned}$$

94. Resolução do Laerte:

a) A exemplo do que já foi feito nas resoluções das questões, novamente daremos um tratamento escalar para o problema, adotando um eixo referencial apontando para baixo e atribuindo um sinal algébrico para deslocamentos e acelerações que apontem para baixo e sinal negativo caso apontem para cima.

Sejam $x_1 \downarrow$, $x_2 \downarrow$, $x_3 \downarrow$, ..., $x_N \downarrow$ os deslocamentos escalares sofridos simultaneamente por cada um dos blocos do sistema em relação à Terra. Como o comprimento total do fio é constante, podemos escrever:

$$x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_N = 0$$

$$(\text{eq1}) \Rightarrow a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_N = 0$$

A relação eq1 nos diz que algumas acelerações escalares são positivas (apontam para baixo), outras são negativas (apontam para cima) e a soma algébrica de todas elas é nula.

Seja T a tração no fio ideal que sustenta todas as polias. A segunda lei de Newton para um bloco genérico do sistema permite escrever:

$$\begin{aligned} 2T - m_i g &= m_i a_i \\ (\text{eq2}) \Rightarrow \frac{2T}{m_i} - g &= a_i \end{aligned}$$

Escrevendo a relação eq2 para cada um dos N blocos e somando membro a membro, vem:

$$\frac{2T}{m_1} - g = a_1$$

$$\frac{2T}{m_2} - g = a_2$$

$$\frac{2T}{m_3} - g = a_3$$

⋮

$$\frac{2T}{m_N} - g = a_N$$

Portanto:

$$2T \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_3} + \dots + \frac{1}{m_N} \right) - Ng = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_N$$

Usando eq1, vem:

$$2T \left(\frac{1}{M} \right) - Ng = 0$$

com

$$\frac{1}{M} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_3} + \dots + \frac{1}{m_N}$$

onde M é chamada massa reduzida do sistema.

Finalmente, a tração T no fio é dada por:

$$(\text{eq3}) \quad T = \frac{N \cdot M \cdot g}{2}$$

Substituindo eq3 em eq2, vem:

$$a_i = \frac{2T}{m_i} - g = \frac{2}{m_i} \cdot \frac{N \cdot M \cdot g}{2} - g$$

$$\boxed{a_i = g \left(\frac{N \cdot M}{m_i} - 1 \right)}$$

b) Se apenas uma das caixas tiver massa nula ($m_k = 0$), o fio ficará frouxo ($T = 0$) e todas as

outras $N - 1$ caixas cairão com aceleração $a_k = +g$.

A aceleração da única caixa de massa nula pode agora ser encontrada com base em eq1:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_N = 0$$

$$(N - 1) \cdot (+g) + 1 \cdot a = 0$$

$$\boxed{a = -(N - 1)g}$$

c) Nesse caso, o fio ficará com tração literalmente nula, $T \cong 0$, e a única caixa de massa muito grande dominará o sistema, quase ignorando a existência das outras $N - 1$ remanescentes, e cairá com aceleração $a = +g$.

A aceleração das $N - 1$ caixas remanescentes, de massa muito pequena, é novamente determinada com base em eq1:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_N = 0$$

$$1 \cdot (+g) + (N - 1) \cdot a_i = 0$$

$$\boxed{a_i = -\frac{g}{N - 1}}$$

95. Resolução do Laerte:

Quando o bloco de cima sofre um deslocamento $x \downarrow$ para baixo, a primeira polia móvel sofre um deslocamento $x/2^1 \uparrow$ para cima, a segunda polia móvel sofre um deslocamento $x/2^2 \uparrow$ para cima, a terceira polia móvel sofre um deslocamento $x/2^3 \uparrow$ para cima, e assim por diante, até que a N -ésima polia móvel sofre um deslocamento $x/2^N \uparrow$ para cima, deslocamento esse que coincide com o deslocamento sofrido pelo bloco inferior. Assim, se o bloco de cima apresenta uma aceleração $a \downarrow$ para baixo, o bloco de baixo apresenta aceleração $a/2^N \uparrow$ para cima.

A segunda lei de Newton para o bloco de cima permite escrever:

$$mg - T = m \cdot a \text{ (eq1)}$$

A segunda lei de Newton para o bloco de baixo permite escrever:

$$2^N T - mg = m \cdot a \cdot 2^{-N} \text{ (eq2)}$$

Multiplicando eq1 por 2^N e somando com eq2, membro a membro, vem:

$$2^N mg - mg = m \cdot a \cdot (2^N + 2^{-N})$$

$$\Rightarrow a = g \left(\frac{2^N - 1}{2^N + 2^{-N}} \right) \text{ (eq3)}$$

A expressão eq3 fornece a aceleração do bloco de cima. A aceleração do bloco inferior é dada por:

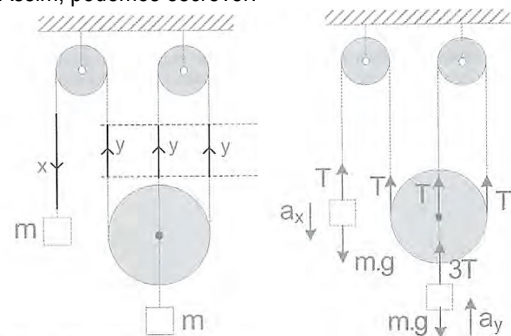
$$2^{-N} a = 2^{-N} g \left(\frac{2^N - 1}{2^N + 2^{-N}} \right)$$

$$= g \left(\frac{1 - 2^{-N}}{2^N + 2^{-N}} \right) = g \left(\frac{2^N - 1}{2^{2N} + 1} \right)$$

96. Resolução

Para analisar o vínculo geométrico, admita que um deslocamento $\uparrow y$ do conjunto formado pela caixa e pela polia inferior seja compensado por um deslocamento $x \downarrow$ da caixa esquerda, de forma que o comprimento total do fio permaneça constante.

Assim, podemos escrever:



$$\text{(eq1)} \quad +x - 3y = 0 \Rightarrow a_x - 3a_y = 0 \Rightarrow a_x = 3a_y$$

onde a_x e a_y são as acelerações verticais dos blocos indicadas na figura.

A segunda lei de Newton para cada bloco permite escrever:

$$\text{(eq2)} \quad m \cdot g - T = m \cdot a_x \Rightarrow$$

$$3m \cdot g - 3T = 3m \cdot a_x$$

$$\text{(eq3)} \quad 3T - m \cdot g = m \cdot a_y$$

Somando eq2 e eq3, membro a membro, e considerando eq1, vem:

$$3m \cdot g - m \cdot g = m \cdot (3a_x + a_y) \Rightarrow$$

$$2m \cdot g = m \cdot (3 \cdot 3a_y + a_y)$$

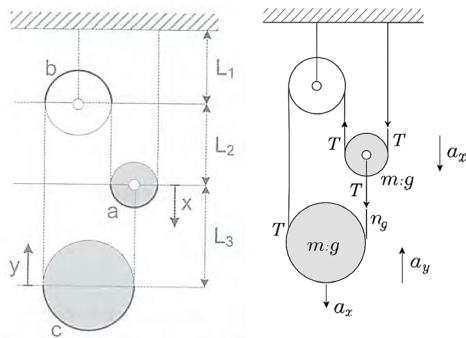
$$2m \cdot g = 10m \cdot a_y \Rightarrow a_y = \frac{g}{5} \text{ e } a_x = \frac{3g}{5}$$

97. Resolução

Essa corda tem um comprimento total L_{total} dado por:

$$L_{\text{total}} = L_1 + L_2 + a + L_2 + b + L_2 + L_3 + c + L_3$$

$$L_{\text{total}} = L_1 + 3L_2 + 2L_3 + a + b + c$$



Para analisar o vínculo geométrico, admita que um deslocamento $x \downarrow$ da polia intermediária seja compensado por um deslocamento $y \uparrow$ da polia inferior, de forma que o comprimento total do fio permaneça constante.

Assim, o trecho de comprimento L_2 aumentou para $L_2 + x$, ao passo que o trecho de comprimento L_3 diminuiu para $L_3 - x - y$. Assim, o comprimento total da corda no final agora é dado por:

$$L_{\text{total}} = L_1 + 3(L_2 + x) + 2(L_3 - x - y) + a + b + c$$

Entretanto, como o comprimento total do fio é constante, podemos escrever:

$$L_1 + 3(L_2 + x) + 2(L_3 - x - y) + a + b + c = L_1 + 3L_2 + 2L_3 + a + b + c$$

$$(eq1) \quad 3x - 2x - 2y = 0 \Rightarrow x = 2y \Rightarrow \boxed{a_x = 2a_y}$$

Escrevendo a 2ª lei de Newton para a polia inferior e para a polia central, vem:

$$(eq2) \quad 2T - mg = ma_y$$

$$(eq3) \quad mg + T - 2T = ma_x \Rightarrow \boxed{2mg - 2T = 2ma_x}$$

Somando eq2 e eq3, membro a membro, e considerando eq1, vem:

$$2mg - mg = m(a_y + 2a_x)$$

$$\Rightarrow mg = m(a_y + 2 \cdot 2a_y)$$

$$\boxed{a_y = \frac{g}{5}} \text{ e } \boxed{a_x = \frac{2g}{5}}$$

98. Resolução

Escrevendo a segunda lei de Newton para cada caixa e levando em conta o vínculo geométrico, temos:

Corpo A: Translação vertical:

$$F_R = M_A \cdot a_A \Rightarrow P_A - N_y = M_A \cdot a_A$$

$$(eq1) \quad M_A \cdot g - N \cdot \cos \alpha = M_A \cdot a_A$$

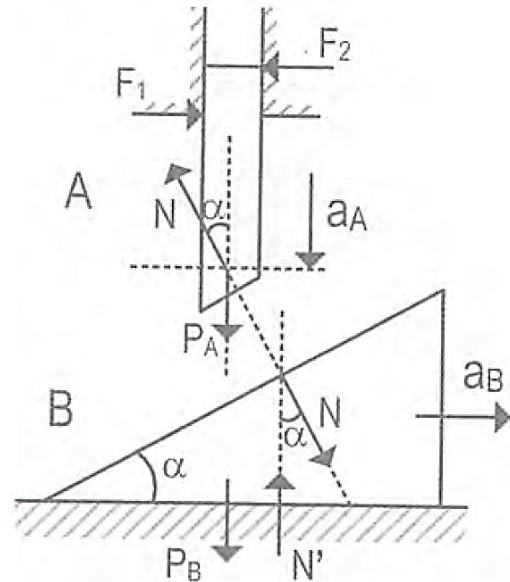
Corpo B: Translação horizontal:

$$F_R = M_B \cdot a_B \Rightarrow N_x = M_B \cdot a_B$$

$$N \cdot \sin \alpha = M_B \cdot a_B, \text{ com } M_B = \eta \cdot M_A$$

$$(eq2) \quad N \cdot \sin \alpha = \eta \cdot M_A \cdot a_B$$

Vínculo geométrico:



$$(eq3) \quad a_A = a_B \cdot \tan \alpha$$

Multiplicando eq1 por $\sin \alpha$, eq2 por $\cos \alpha$ somando-as, membro a membro, vem:

$$M_A \cdot g \cdot \sin \alpha = M_A \cdot a_A \cdot \sin \alpha + \eta \cdot M_A \cdot a_B \cdot \cos \alpha$$

Usando eq3, vem:

$$g \cdot \sin \alpha = a_B \cdot \tan \alpha \cdot \sin \alpha + \eta \cdot a_B \cdot \cos \alpha$$

$$a_B = \frac{g}{\tan \alpha + \eta \cdot \cot \alpha}$$

Usando eq3, vem:

$$a_A = a_B \cdot \tan \alpha = \frac{g}{\tan \alpha + \eta \cdot \cot \alpha} \cdot \tan \alpha$$

$$a_A = \frac{g}{1 + \eta \cdot \cot^2 \alpha}$$

99. Resolução

A figura abaixo mostra o diagrama de forças de cada corpo. Observe os pares ação-reação formados pelas normais N_1 e N'_1 , bem como as normais N_2 e N'_2 .

Pela simetria do sistema, podemos afirmar que:

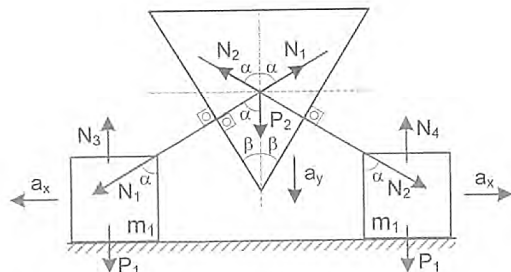
$$(eq1) \quad N_1 = N_2 = N$$

Sendo o triângulo equilátero, temos:

$$(eq2) \quad \alpha = 60^\circ \text{ e } \beta = 30^\circ$$

O vínculo geométrico desse sistema permite relacionar as acelerações $\downarrow a_y$ e $a_x \rightarrow$ dos blocos pela expressão:

$$(eq3) \quad a_x = a_y \cdot \operatorname{tg} \beta$$



Aplicando a segunda lei de Newton ao prisma, em seu movimento vertical, temos:

$$F_R = m_2 a_y$$

$$P_2 - N_1 \cos \alpha - N_2 \cos \alpha = m_2 a_y$$

$$m_2 g - 2N \cos 60^\circ = 2a_y$$

$$(eq4) \Rightarrow 20 - N = 2a_y$$

Analisando o movimento horizontal dos cubos, vemos que eles adquirem aceleração a_x às custas da componente horizontal da normal N_2 que recebem, isto é, às custas da componente N_{2x} , que faz o papel de força resultante em cada cubo. Aplicando a segunda lei de Newton a um dos cubos, temos:

$$F_R = m_1 a_x \Rightarrow N_{2x} = m_1 a_x$$

$$N_2 \sin \alpha = m_1 a_x \Rightarrow N \sin 60^\circ = 3a_y \cdot \operatorname{tg} 30^\circ$$

$$N \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3a_y \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$(eq5) \Rightarrow N = 2a_y$$

Substituindo eq5 em eq4, vem:

$$20 - 2a_y = 2a_y$$

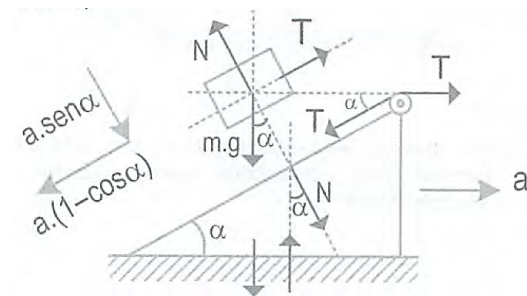
$$\Rightarrow a_y = 5 \text{ m/s}^2$$

100.

a) $a_A = 3 \text{ m/s}^2$ e $a_B = 4 \text{ m/s}^2$,

b) $T = 8 \text{ N}$

101. Na figura, as massas m da caixa e M da cunha, assim como o ângulo α da rampa, são conhecidos. Todos os fios são ideais e os atritos são desprezíveis. Pede-se determinar a aceleração adquirida pela cunha.



A figura mostra o diagrama de forças que agem no bloco e no prisma. O Vínculo Geométrico desse sistema, que permite determinar a relação entre as acelerações do prisma e do bloco no referencial inercial (Terra), foi amplamente discutido no apêndice. Observando o diagrama de forças na figura, podemos relacionar forças e acelerações no referencial inercial (Terra):

Bloco na direção da normal:

$$m \cdot g \cdot \cos \alpha - N = m \cdot a \cdot \sin \alpha \quad (eq1)$$

Bloco na direção da tração:

$$m \cdot g \cdot \sin \alpha - T = m \cdot a \cdot (1 - \cos \alpha) \quad (eq2)$$

Cunha na direção horizontal:

$$T - T \cdot \cos \alpha + N \cdot \sin \alpha = M \cdot a$$

$$T \cdot (1 - \cos \alpha) + N \cdot \sin \alpha = M \cdot a \quad (eq3)$$

Multiplicando eq1 por $\sin \alpha$, eq2 por $(1 - \cos \alpha)$ e somando, membro a membro com a relação eq3, vem:

$$m \cdot g \cdot \sin \alpha = m \cdot a \cdot \sin^2 \alpha + m \cdot a \cdot (1 - \cos \alpha)^2 + M \cdot a$$

$$m \cdot g \cdot \sin \alpha = 2m \cdot a \cdot (1 - \cos \alpha) + M \cdot a$$

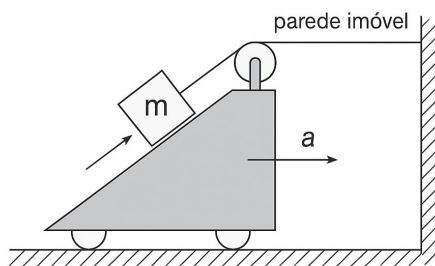
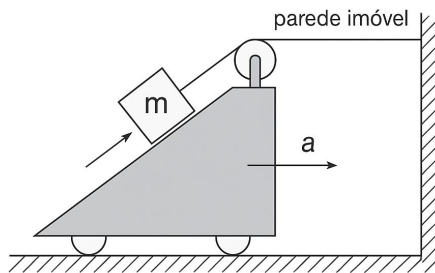
$$\Rightarrow a = \frac{m \cdot g \cdot \sin \alpha}{M + 2m \cdot (1 - \cos \alpha)}$$

Outra maneira de resolver:

Esse problema foi resolvido anteriormente no referencial inercial. A seguir, solucionaremos essa questão no referencial da própria cunha que, por se

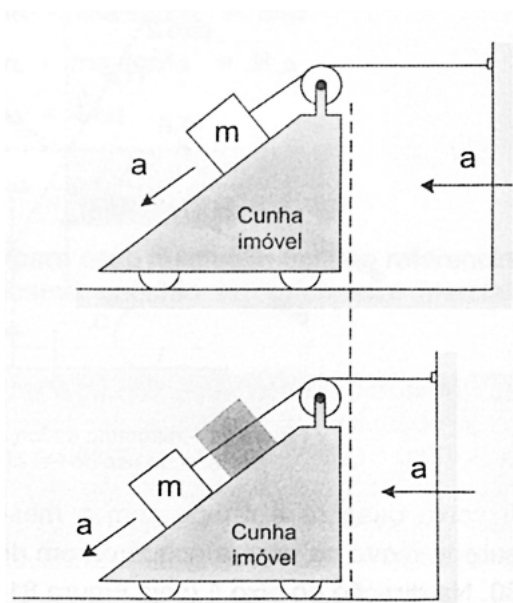
encontrar acelerada em relação à Terra, constitui um referencial não inercial.

Observando toda a movimentação a partir do referencial da Terra, temos que:



- a parede se encontra fixa nesse referencial;
- a cunha move-se acelerada para a direita com aceleração $a \rightarrow$;
- a caixa, conectada à parede, através do fio ideal, move-se ladeiro abaixo ao longo da superfície inclinada da cunha (veja a Figura).

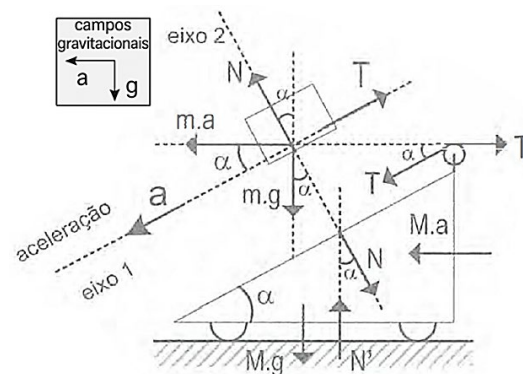
Por outro lado, observando toda a movimentação a partir do referencial da própria cunha, vemos que:



- a cunha se encontra fixa nesse referencial;
- a parede é que se move acelerada para a esquerda com aceleração $a \leftarrow$;
- a caixa, conectada à parede, através do fio ideal, acompanha o movimento da parede e desce a superfície inclinada da cunha.

A partir desse ponto, nos concentraremos na Figura. A resolução do problema será feita a partir da análise do movimento no referencial da cunha (não inercial). Pelo fato de o fio não esticar (vínculo geométrico), a caixa descera a rampa com a mesma aceleração escalar a com que a parede se move para a esquerda no referencial da cunha.

Efetuada uma mudança do referencial inercial (Terra) para o referencial acelerado da cunha, abandonamos a aceleração $\rightarrow a$ que esta possui em relação à Terra e a computamos, no seu referencial não inercial, em forma de uma gravidade $\leftarrow a$ que causará forças gravitacionais fictícias $m \cdot a \leftarrow$ e $M \cdot a \leftarrow$ nos corpos de massa m e M do sistema, respectivamente, com base no Princípio da Equivalência de Einstein, como mostra a Figura.



A caixa descera a rampa com a mesma aceleração escalar a com que a parede se move para a esquerda em direção à cunha, como mostra a Figura 80. Na direção do eixo 1, a 2ª lei de Newton permite escrever:

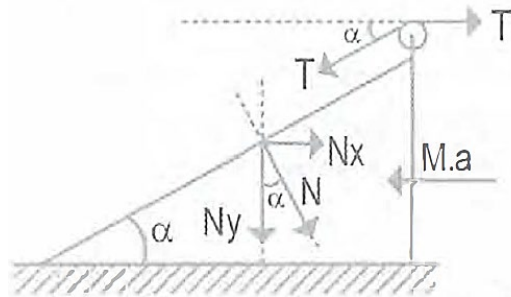
$$F_R = m \cdot a$$

$$\Rightarrow (m \cdot a \cdot \cos \alpha + m \cdot g \cdot \sin \alpha - T) = m \cdot a$$

Na direção da normal N (eixo 2), a caixa não possui aceleração e, portanto, podemos escrever o equilíbrio das forças:

$$N + m \cdot a \cdot \sin \alpha = m \cdot g \cdot \cos \alpha$$

No referencial da própria cunha, esta se encontra em equilíbrio estático (relativo), o que nos permite escrever na horizontal:



$$T + N_x = T \cdot \cos \alpha + M \cdot a$$

$$T + N \cdot \sin \alpha = T \cdot \cos \alpha + M \cdot a$$

$$T \cdot (1 - \cos \alpha) + N \cdot \sin \alpha = M \cdot a \text{ (eq 46)}$$

Isolando T , vem:

$$(m \cdot a \cdot \cos \alpha + m \cdot g \cdot \sin \alpha - m \cdot a) \cdot (1 - \cos \alpha) + (m \cdot g \cdot \cos \alpha - m \cdot a \cdot \sin \alpha) \cdot \sin \alpha = M \cdot a$$

$$m \cdot a \cdot (\cos \alpha - 1) \cdot (1 - \cos \alpha) + m \cdot g \cdot \sin \alpha - m \cdot a \cdot \sin^2 \alpha = M \cdot a$$

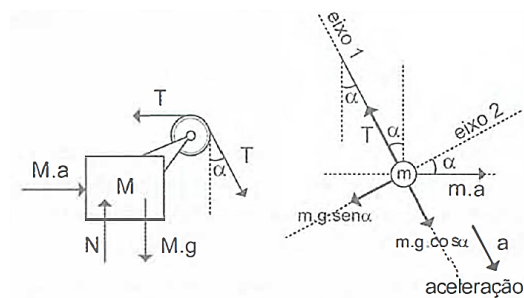
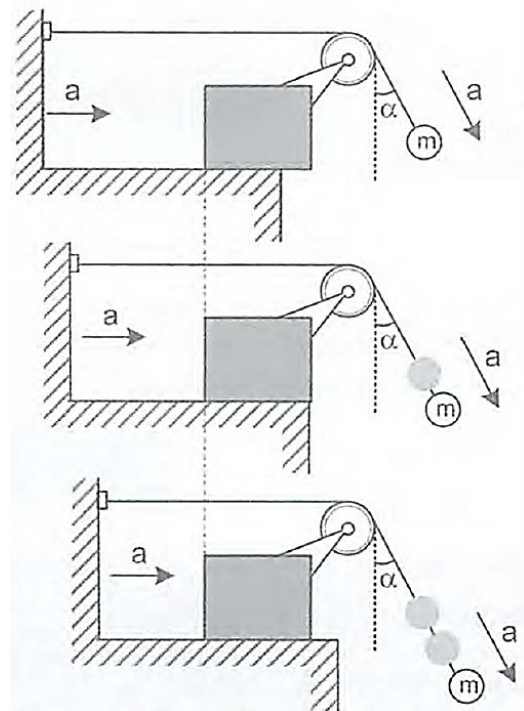
$$-m \cdot a \cdot (\cos^2 \alpha - 2 \cdot \cos \alpha + 1) + m \cdot g \cdot \sin \alpha - m \cdot a \cdot \sin^2 \alpha = M \cdot a$$

$$-m \cdot a + 2m \cdot a \cdot \cos \alpha - m \cdot a + m \cdot g \cdot \sin \alpha = M \cdot a$$

$$m \cdot g \cdot \sin \alpha = M \cdot a + 2 \cdot m \cdot a \cdot (1 - \cos \alpha)$$

$$\Rightarrow a = \frac{m \cdot g \cdot \sin \alpha}{M + 2m \cdot (1 - \cos \alpha)}$$

102. Efetuando uma mudança da Terra (referencial inercial) para o referencial acelerado da caixa, abandonamos a aceleração $\leftarrow a$ que esta possui em relação à Terra e a computamos, no seu referencial não inercial, em forma de uma gravidade $\rightarrow a$, que causará forças gravitacionais fictícias $m \cdot a \rightarrow$ e $M \cdot a \rightarrow$, respectivamente, na esfera do pêndulo e na caixa, com base no Princípio da Equivalência de Einstein, como mostra a Figura.



Estando, a caixa, em equilíbrio relativo na horizontal, vem:

$$T = T \cdot \sin \alpha + M \cdot a$$

$$\Rightarrow T \cdot (1 - \sin \alpha) = M \cdot a$$

A segunda lei de Newton para a esfera do pêndulo, na direção do eixo 1, permite escrever:

$$F_R = m \cdot a$$

$$(m \cdot g \cdot \cos \alpha + m \cdot a \cdot \sin \alpha - T) = m \cdot a$$

$$m \cdot g \cdot \cos \alpha - T = m \cdot a \cdot (1 - \sin \alpha)$$

O equilíbrio da esfera do pêndulo, na direção do eixo 2, permite escrever:

$$m \cdot g \cdot \sin \alpha = m \cdot a \cdot \cos \alpha$$

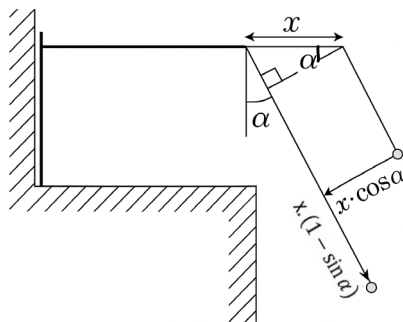
$$\Rightarrow a = g \cdot \tan \alpha \text{ (eq 49)}$$

Multiplicando a relação por $(1 - \sin \alpha)$, somando membro a membro com a relação e levando em conta a relação, após redução dos termos semelhantes, obtém-se:

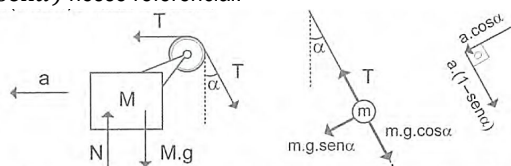
$$M = \frac{m \cdot (1 - \operatorname{sen} \alpha)^2}{\operatorname{sen} \alpha}$$

Segunda resolução: O prof. Laerte solucionará o problema no referencial inercial (Terra). Para entender melhor essa resolução, é necessário ler previamente o Tópico Especial sobre vínculos geométricos.

A figura a seguir mostra que, quando o conjunto caixa+polia move-se uma distância $x \leftarrow$ no referencial da Terra, a esfera do pêndulo sofre deslocamentos correspondentes $x \cdot \cos \alpha$ e $x \cdot (1 - \operatorname{sen} \alpha)$ nesse mesmo referencial.



Assim, se a caixa possuir uma aceleração $a \leftarrow$ no referencial inercial, a esfera do pêndulo terá acelerações correspondentes $a \cdot \cos \alpha$ e $a \cdot (1 - \operatorname{sen} \alpha)$ nesse referencial.



A figura acima mostra o diagrama das forças que agem em cada corpo. Aplicando a segunda lei de Newton a cada um deles, vem:

Para o bloco, na horizontal:

$$F_R = M \cdot a$$

$$\Rightarrow T - T \cdot \operatorname{sen} \alpha = M \cdot a$$

$$\boxed{T \cdot (1 - \operatorname{sen} \alpha) = M \cdot a} \quad (\text{eq1})$$

Para a esfera, na direção da tração:

$$F_R = m \cdot a \cdot (1 - \operatorname{sen} \alpha)$$

$$\boxed{m \cdot g \cdot \cos \alpha - T = m \cdot a \cdot (1 - \operatorname{sen} \alpha)} \quad (\text{eq2})$$

Para a esfera, na direção da componente $m \cdot g \cdot \operatorname{sen} \alpha$:

$$F_R = m \cdot a \cdot \cos \alpha$$

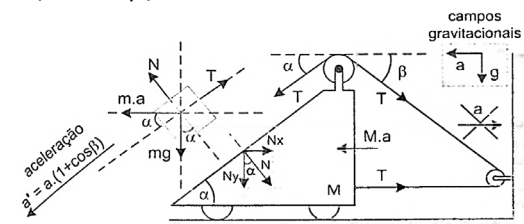
$$m \cdot g \cdot \operatorname{sen} \alpha = m \cdot a \cdot \cos \alpha$$

$$\Rightarrow \boxed{a = g \cdot \operatorname{tg} \alpha} \quad (\text{eq3})$$

Multiplicando a relação **eq2** por $(1 - \operatorname{sen} \alpha)$, somando membro a membro com a relação **eq1** e levando em conta a relação **eq3**, após redução dos termos semelhantes, obtém-se:

$$M = \frac{m \cdot (1 - \operatorname{sen} \alpha)^2}{\operatorname{sen} \alpha}$$

103. No referencial da própria cunha (referencial acelerado), entretanto, ela encontra-se parada, a parede se move para a esquerda com aceleração $a \leftarrow$ e o bloco desce a rampa com aceleração $a' = a(1 + \cos \beta)$, conforme vimos.



Conforme o Princípio da Equivalência, essa aceleração $a(\text{m/s}^2) \rightarrow$ que a cunha possui no referencial da Terra, equivale, no referencial da própria cunha, a um campo gravitacional $a \leftarrow$ (N/kg) que causará forças gravitacionais fictícias $m \cdot a \leftarrow$ e $M \cdot a \leftarrow$ nos corpos de massa m e M do sistema, respectivamente.

A Figura mostra tanto as forças de interação (reais), quanto as forças de inércia $m \cdot a \leftarrow$ e $M \cdot a \leftarrow$, agindo respectivamente no bloco e na cunha. Observe atentamente o diagrama de forças da Figura, antes de passar adiante.

Estando a cunha em equilíbrio relativo na horizontal, podemos escrever:

$$T + T \cdot \cos \beta + N \cdot \operatorname{sen} \alpha = T \cdot \cos \alpha + M \cdot a$$

$$(\text{eq1}) \quad T \cdot (1 + \cos \beta - \cos \alpha) + N \cdot \operatorname{sen} \alpha = M \cdot a$$

O bloco encontra-se em equilíbrio relativo na direção normal à rampa, o que nos permite escrever:

$$(\text{eq2}) \quad mg \cdot \cos \alpha = N + m \cdot a \cdot \operatorname{sen} \alpha$$

Na direção paralela à rampa, o bloco se move com aceleração $a' = a(1 + \cos \beta)$. Nessa direção, a segunda lei de Newton nos permite escrever:

$$F_R = m \cdot a'$$

$$\Rightarrow ma \cdot \cos \alpha + mg \cdot \operatorname{sen} \alpha - T = ma \cdot (1 + \cos \beta)$$

$$(\text{eq3}) \quad mg \cdot \operatorname{sen} \alpha - T = ma \cdot (1 + \cos \beta - \cos \alpha)$$

Isolando T em eq3, N em eq2 e substituindo em eq1, temos:

$$[mg \cdot \operatorname{sen} \alpha - ma(1 + \cos \beta - \cos \alpha)] \cdot (1 + \cos \beta - \cos \alpha) + \dots$$

$$\dots + (mg \cdot \cos \alpha - ma \cdot \sin \alpha) \cdot \sin \alpha = M \cdot a$$

$$mg \cdot \sin \alpha + mg \cdot \sin \alpha \cdot \cos \beta - mg \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha - ma(1 + \cos \beta - \cos \alpha)^2 + \dots$$

$$\dots + mg \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha - ma \cdot \sin^2 \alpha = M \cdot a$$

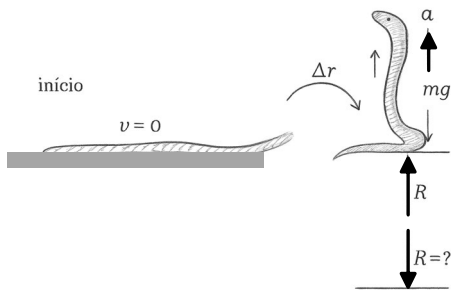
$$mg \cdot \sin \alpha (1 + \cos \beta) = a[M + m \cdot \sin^2 \alpha + m \cdot (1 + \cos \beta - \cos \alpha)^2]$$

Finalmente, encontramos a aceleração desejada:

$$a = \frac{mg \cdot \sin \alpha (1 + \cos \beta)}{M + m \cdot \sin^2 \alpha + m \cdot (1 + \cos \beta - \cos \alpha)^2}$$

104. Resolução

Pede-se a força R com a qual a cobra tenta saltar.

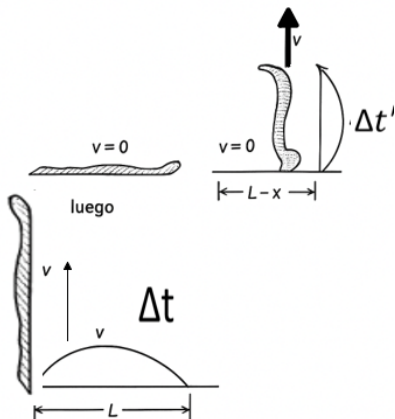


Segunda lei de Newton

$$a = \frac{F_R}{m} \Rightarrow a = \frac{R - mg}{m}$$

$$(I) \Rightarrow R = m(g + a)$$

Cálculo da aceleração da cobra enquanto tenta saltar.



Da figura:

$$x = v(\Delta t)$$

Quando a cobra se estende verticalmente:

$$L = v(\Delta t)$$

$$\Delta t = \frac{L}{v}$$

$$a = \frac{|\Delta v|}{\Delta t}$$

$$(II) \quad a = \frac{v - 0}{\left(\frac{L}{v}\right)} = \frac{v^2}{L}$$

Substituindo a equação (II) na equação (I):

$$R = m \left(g + \frac{v^2}{L} \right)$$

Resposta: D.