

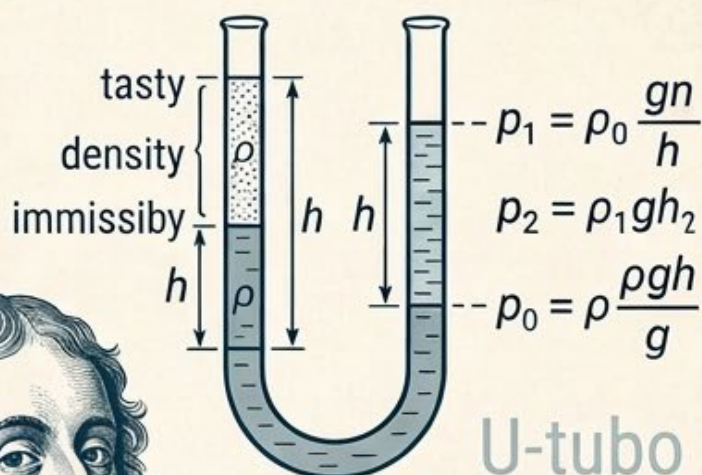
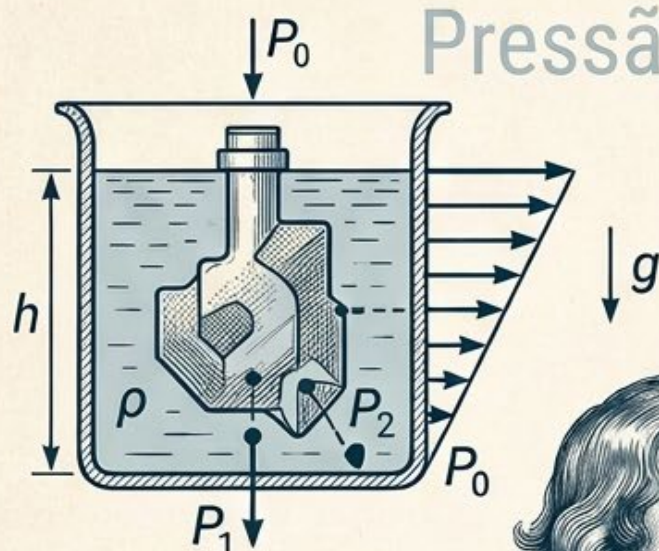
ESTÁTICA DOS FLUIDOS

Hidroestática, Princípios e Aplicações

Prof. Laerte Pereira

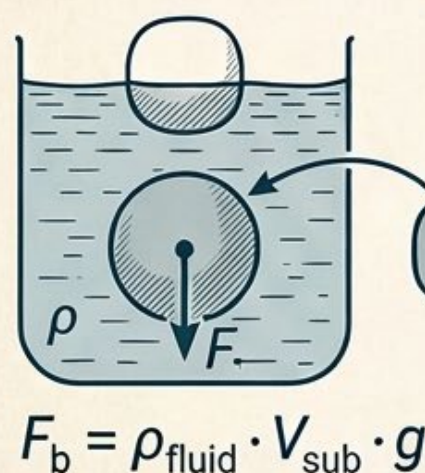
Pressão

Manômetro



$$P = P_0 + \rho gh$$

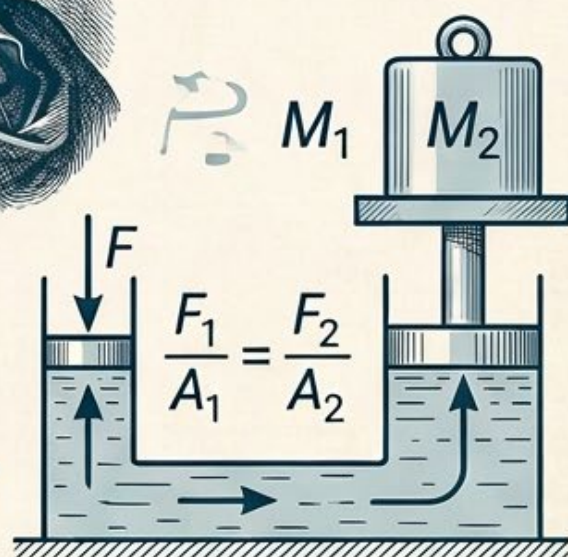
Empuxo



empuxo

$$\vec{\nabla} P = \rho \vec{g}$$

Manômetro



TURMA ITA IME - PREPARATÓRIO

DISCIPLINA: FÍSICA

1. DENSIDADE E MASSA ESPECÍFICA:

Densidade volumétrica média (d) é a grandeza que representa a razão entre a massa (m) e o volume (V) ocupado por um corpo:

$$d = \frac{\text{massa}}{\text{volume}} \quad \text{eq. 1}$$

Relação importante:

$$\frac{1 \text{ g}}{\text{cm}^3} = \frac{10^3 \text{ kg}}{\text{m}^3} = \frac{1 \text{ kg}}{\text{L}}$$

DICA DE OURO: Densidade de uma mistura

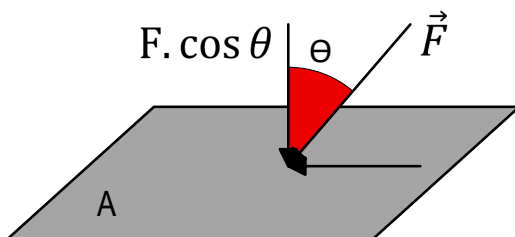
$$d = \frac{m_1 + m_2}{V_1 + V_2} = \frac{d_1 \cdot V_1 + d_2 \cdot V_2}{V_1 + V_2}$$

2. PRESSÃO EXERCIDA SOBRE A SUPERFÍCIE (p):

Considere uma força normal aplicada sobre uma superfície de área A , associa-se a tal força uma pressão exercida pela mesma sobre a superfície em questão (de uma maneira simples essa pressão seria uma força distribuída por unidade de área).

Pressão é a grandeza escalar cuja intensidade é medida pela razão entre o módulo da força resultante normal $\vec{F}$ e a área A da superfície sobre a qual ela atua:

$$p = \frac{|\vec{F}_N|}{A} = \frac{F \cdot \cos \theta}{A} \quad (\text{eq. 2})$$



Em situações nas quais as forças são exercidas pelos pesos de corpos ou de certa quantidade de substâncias, substituímos a força normal pelo peso:

$$F_N = P = m \cdot g$$

$$p = \frac{m \cdot g}{A}$$

No Sistema Internacional de Unidades (SI), a unidade de pressão é o newton por metro quadrado (N/m^2), também conhecida como pascal (Pa).

$$1 \text{ Pa} = 1 \text{ N/m}^2$$

Outras unidades de pressão utilizadas frequentemente:

$$1 \text{ bar} = 10^5 \text{ N/m}^2$$

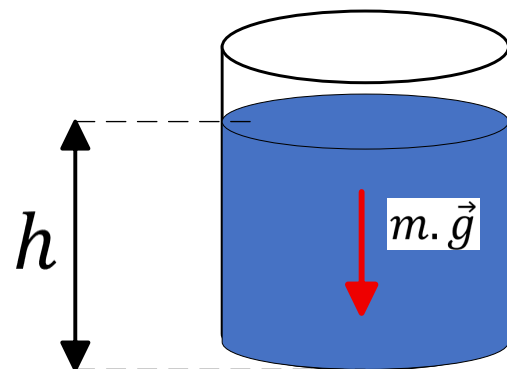
$$1 \text{ torr} = 1 \text{ mmHg}$$

A pressão atmosférica é a pressão exercida por uma coluna de 76 cmHg ou 10,3 m de água.

$$1 \text{ atm} \cong 1,013 \cdot 10^5 \text{ Pa} = 76 \text{ cmHg} = 10,3 \text{ m de água}$$

3. A PRESSÃO EXERCIDA PELOS LÍQUIDOS (PRESSÃO HIDROSTÁTICA):

Vamos considerar um líquido em repouso, dentro de um recipiente cilíndrico, em quantidade tal que alcance uma altura h . Qual será a pressão hidrostática exercida sobre o fundo do recipiente?



Sabemos que a pressão hidrostática exercida no fundo de um recipiente é:

$$p_H = \frac{m \cdot g}{A}$$

Usando o fato que a densidade do líquido é $d = \frac{m}{V}$, determinamos a massa do líquido em função de sua densidade e de seu volume:

$$m = d \cdot V$$

Considerando-se que a coluna de líquido tem formato cilíndrico, o volume do líquido é:

$$V = A \cdot h$$

Logo, podemos reescrever a expressão da massa como:

$$m = d \cdot A \cdot h$$

Substituindo a massa m na expressão inicial da pressão:

$$p_H = \frac{m \cdot g}{A} = \frac{(d \cdot A \cdot h) \cdot g}{A} = d \cdot g \cdot h$$

Por meio dessa igualdade podemos ver que uma coluna de líquido exerce na sua base uma pressão hidrostática — também chamada de pressão efetiva — cuja intensidade é proporcional à sua densidade e à altura da coluna, independentemente do formato ou do tamanho do recipiente.

Exemplo importante: Considere uma coluna de água de 10,3 metros de altura. Ela exercerá uma pressão no fundo igual a:

$$p_H = d_L \cdot g \cdot h = \left(\frac{10^3 \text{ kg}}{\text{m}^3} \right) \cdot \left(9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) \cdot (10,3 \text{ m})$$

$$p_H = 1,013 \cdot 10^5 \frac{\text{kg}}{\text{m} \cdot \text{s}^2} \simeq 1,0 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

4. TEOREMA DE STEVIN:

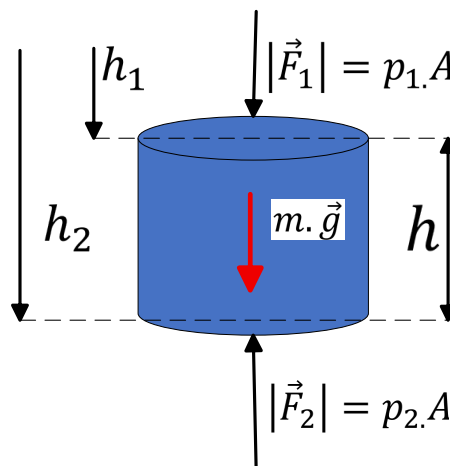
A diferença de pressões entre dois pontos de um líquido homogêneo em equilíbrio sob a ação da gravidade é calculada pelo produto da massa específica do líquido pelo módulo da aceleração da gravidade no local e pelo desnível (diferença de cotas) entre os pontos considerados:

$$\Delta p = p_2 - p_1 = d_L \cdot g \cdot h \quad \text{eq. 5}$$

Observação: A lei de Stevin se aplica a dois pontos do fluido que não se encontram na mesma vertical de um fluido homogêneo conforme a figura acima.

DEMONSTRAÇÃO:

Vamos, agora, analisar a variação da pressão em um líquido, na direção vertical. Para isso, consideraremos certa quantidade de líquido homogêneo no formato de um cilindro (figura abaixo). A resultante das forças laterais que o líquido exerce sobre o cilindro é nula, pois, para cada elemento de área da superfície lateral, encontramos outro, na mesma horizontal e diametralmente oposto, no qual age uma força de mesma intensidade e sentido oposto. Essa conclusão decorre do fato de que, em um líquido em equilíbrio, todos os pontos situados em uma mesma horizontal ficam sujeitos à mesma pressão.



Para o equilíbrio na direção vertical, devemos ter:

$$(I) \quad F_2 = F_1 + P_{\text{LÍQUIDO}}$$

As forças F_1 e F_2 são calculadas aplicando-se a definição algébrica de pressão. Considerando que a área da base do cilindro é A , temos:

$$p = \frac{F}{A} \Rightarrow F = p \cdot A$$

$$(II) \quad \begin{cases} F_1 = p_1 \cdot A \\ F_2 = p_2 \cdot A \end{cases}$$

O peso do líquido ($P_{\text{LÍQUIDO}}$) pode ser calculado por:

$$(III) \quad P_{\text{LÍQUIDO}} = m \cdot g = (d_L \cdot A \cdot h) \cdot g$$

Substituindo os resultados II e III na equação I, obtemos:

$$F_2 = F_1 + P_{\text{LÍQUIDO}} \Rightarrow$$

$$p_2 \cdot A = p_1 \cdot A + d_L \cdot h \cdot g$$

$$p_2 = p_1 + d_L \cdot h \cdot g$$

$$p_2 - p_1 = d_L \cdot h \cdot g$$

$$\Delta p = d_L \cdot g \cdot h$$

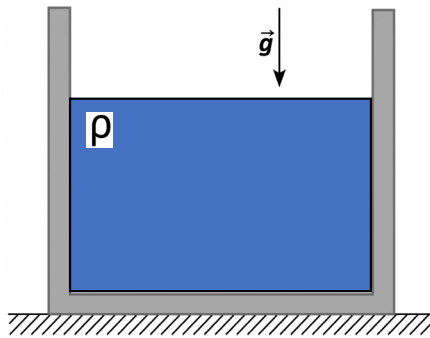
A pressão no fundo do recipiente é dada por:

$$p_2 = p_{\text{ATM}} + d_L \cdot g \cdot h$$

5. LEI DE STEVIN EM REFERENCIAIS ACELERADOS:

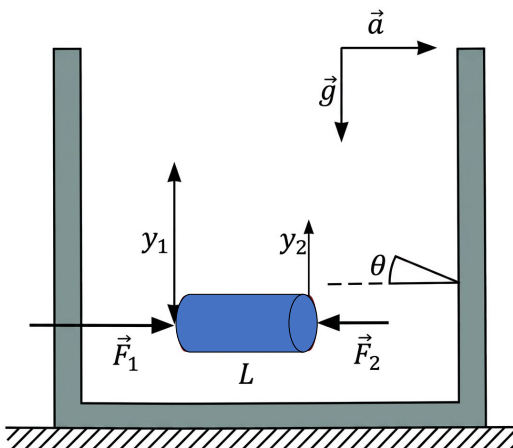
1) VAGÃO ACELERADO HORIZONTALMENTE:

Considere um líquido inicialmente em repouso num plano horizontal, conforme a figura abaixo.



Líqu. em repouso

Considere um líquido de densidade ρ em um tanque que se move sobre uma superfície horizontal com aceleração constante $\vec{a}$. A superfície livre do líquido assume a forma mostrada na figura abaixo.



Líquido acelerado horizontalmente

Suponha um cilindro do líquido de comprimento L e área de seção transversal A . A força na face esquerda do cilindro, $F_1 = p_1 \cdot A$, e a força na face direita do cilindro $F_2 = p_2 \cdot A$. Aplicando a Lei de Stevin podemos escrever $p_1 = \rho \cdot g \cdot y_1$ e $p_2 = \rho \cdot g \cdot y_2$. A massa do cilindro de líquido é dada $m = \rho \cdot (A \cdot L)$.

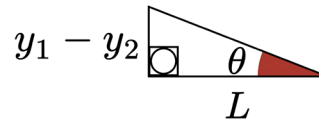
Escrevendo a Segunda Lei de Newton, temos:

$$F_1 - F_2 = m \cdot a$$

$$p_1 \cdot A - p_2 \cdot A = m \cdot a$$

$$(\rho \cdot g \cdot y_1 - \rho \cdot g \cdot y_2) \cdot A = (\rho \cdot A \cdot L) \cdot a$$

$$\frac{y_1 - y_2}{L} = \frac{a}{g}$$



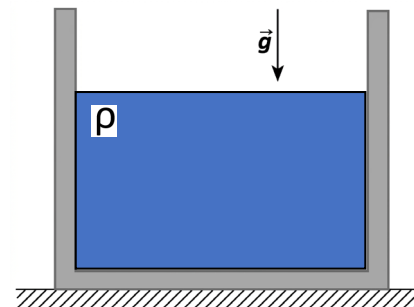
$$\text{tg} \theta = \frac{y_1 - y_2}{L}$$

Portanto:

$$\text{tg} \theta = \frac{a}{g}$$

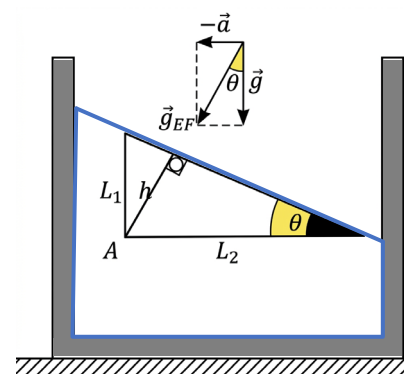
NOTA ITA-IME: DISTRIBUIÇÃO DE PRESSÃO NO INTERIOR DO LÍQUIDO

Discutimos que quando um líquido é colocado em um recipiente, geralmente sua superfície livre permanece horizontal, como mostrado na figura abaixo, pois para seu equilíbrio sua superfície livre deve ser normal à gravidade, ou seja, horizontal.



Líqu. em repouso

Pela mesma razão dissemos que a pressão em todos os pontos de uma camada líquida paralela à sua superfície livre permanece constante. Situação semelhante existe quando o líquido está em um referencial acelerado, como mostrado na figura abaixo.



Líquido em equilíbrio no referencial do recipiente

Devido à aceleração do recipiente, o líquido preenchido nele experimenta uma força de inércia em relação ao recipiente e devido a isso a superfície livre do líquido não permanece normal à gravidade como mostrado na figura. Assim, podemos obter o ângulo de inclinação da superfície livre do líquido em relação à horizontal θ dado por:

$$\theta = \arctg\left(\frac{a}{g}\right)$$

A aceleração da gravidade efetiva é dada por:

$$g_{EFE} = \sqrt{g^2 + a^2}$$

Do ponto de vista do referencial do recipiente (líquido), todos os pontos em mesma reta paralela a superfície livre do líquido estão submetidos à mesma pressão (superfície isobárica). Podemos determinar a pressão no ponto A interior do líquido no recipiente acelerado na forma:

$$p_A = p_0 + \rho \cdot g_{EFE} \cdot h$$

$$p_A = p_0 + \rho \cdot (\sqrt{g^2 + a^2}) \cdot h$$

Em que p_0 é a pressão atmosférica ao longo da superfície livre do líquido e h é a profundidade no interior do líquido ao longo da linha que contém a gravidade efetiva.

A pressão no ponto A pode ser obtida de outras maneiras. Sejam L_1 e L_2 as distâncias do ponto A na direção vertical e horizontal à superfície livre do líquido, então a pressão do ponto A pode ser escrita na forma:

$$p_A = p_0 + \rho \cdot L_1 \cdot g = p_0 + \rho \cdot L_2 \cdot a$$

Note que $\rho \cdot L_1 \cdot g$ é a pressão devido à coluna vertical de líquido sobre o ponto A e de acordo com o princípio de Pascal, temos:

$$p_A = p_0 + \rho \cdot L_1 \cdot g$$

Da geometria:

$$L_1 = h \cdot \sec \theta = h \cdot \frac{\sqrt{g^2 + a^2}}{g}$$

Assim:

$$p_A = p_0 + \rho \cdot L_1 \cdot g = p_0 + \rho \cdot \left[h \cdot \frac{\sqrt{g^2 + a^2}}{g} \right] \cdot g$$

$$p_A = p_0 + \rho \cdot (\sqrt{g^2 + a^2}) \cdot h$$

De forma similar, se considerarmos a distância horizontal do ponto A à superfície livre do líquido que

vale L_2 , com uma coluna de líquido sujeita a uma aceleração de módulo $|\vec{a}|$, temos:

$$p_A = p_0 + \rho \cdot L_2 \cdot a$$

Em que:

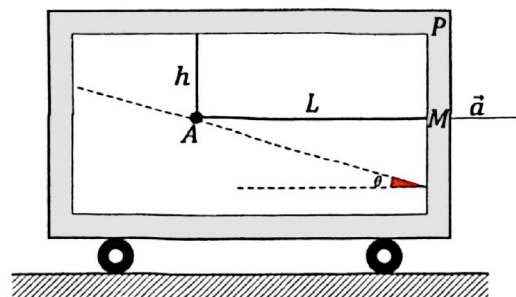
$$L_2 = h \cdot \operatorname{cosec} \theta = h \cdot \frac{\sqrt{g^2 + a^2}}{a}$$

$$p_A = p_0 + \rho \cdot \left[h \cdot \frac{\sqrt{g^2 + a^2}}{a} \right] \cdot a$$

$$p_A = p_0 + \rho \cdot (\sqrt{g^2 + a^2}) \cdot h$$

NOTA ITA-IME: DISTRIBUIÇÃO DE PRESSÃO EM UM RECIPIENTE FECHADO

Considere a situação mostrada na figura abaixo.

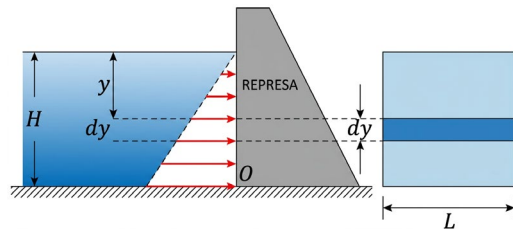


A figura mostra um vagão-tanque fechado cheio de água que está acelerando em uma pista horizontal com aceleração $\vec{a}$. Nesta situação, as superfícies isobáricas de pressão constante do líquido estão inclinadas de um ângulo θ ($\operatorname{tg} \theta = a/g$) em relação à horizontal. No corpo de todo o líquido, o ponto de menor pressão é P (como discutimos). Se o recipiente estiver completamente fechado, então P pode ser tomado como um ponto de pressão zero. Se desejarmos encontrar a pressão em um ponto geral A a uma profundidade h abaixo da superfície superior do recipiente e a uma distância L da parede direita do recipiente, então isso novamente será obtido diretamente escrevendo equação de pressão para o líquido em relação ao vagão-tanque do ponto P ao ponto A através do ponto M. Logo, podemos escrever:

$$p_A = 0 + \rho \cdot g \cdot h + \rho \cdot a \cdot L$$

APROFUNDAMENTO ITA-IME: FORÇA SOBRE UMA REPRESA

Agora iremos calcular a força exercida pelo líquido de densidade ρ sobre a parede de uma represa de largura L e profundidade H .



Façamos uma escolha de um elemento de espessura (dy) a uma profundidade y . A pressão na posição do elemento de área é dada por:

$$p_y = \rho \cdot g \cdot y$$

A força sobre o elemento de área é dada por:

$$dF = p_y \cdot (L \cdot dy)$$

$$dF = \rho \cdot g \cdot y \cdot (L \cdot dy)$$

$$dF = \rho \cdot g \cdot L \cdot (y \cdot dy)$$

A força total sobre a parede da represa é dada por:

$$F = \int_0^H dF$$

$$F = \rho \cdot g \cdot L \cdot \int_0^H y \, dy$$

$$F = \rho \cdot g \cdot L \cdot \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^H$$

$$F = \frac{\rho \cdot g \cdot L \cdot H^2}{2}$$

OUTRO MODO:

Para calcular a força que o líquido exerce sobre a parede da represa, podemos fazer o cálculo da pressão média pela coluna de água sobre a represa e dada por:

$$p_{\text{MÉDIA}} = \frac{p_1 + p_2}{2} = \frac{0 + \rho \cdot g \cdot H}{2}$$

$$p_{\text{MÉDIA}} = \frac{\rho \cdot g \cdot H}{2}$$

A força pode ser determinada como o produto da força média pela área de contato ($A = L \cdot H$) do líquido com a parede:

$$F = p_{\text{MÉDIA}} \cdot A = \frac{\rho \cdot g \cdot L \cdot H^2}{2}$$

Agora iremos calcular o torque em relação ao ponto O :

$$d\tau = dF \cdot (H - y)$$

$$d\tau = \rho \cdot g \cdot L \cdot (y \cdot dy) \cdot (H - y)$$

$$d\tau = \rho \cdot g \cdot L \cdot (H \cdot y - y^2) \cdot dy$$

$$\tau = \rho \cdot g \cdot L \cdot \int_0^H (H \cdot y - y^2) \, dy$$

$$\tau = \rho \cdot g \cdot L \cdot \left[\frac{H \cdot y^2}{2} - \frac{y^3}{3} \right]_0^H$$

$$\tau = \rho \cdot g \cdot L \cdot \left(\frac{H^3}{2} - \frac{H^3}{3} \right)$$

$$\tau = \frac{\rho \cdot g \cdot L \cdot H^3}{6}$$

NOTA:

$$\bar{H} = \frac{\tau}{F}$$

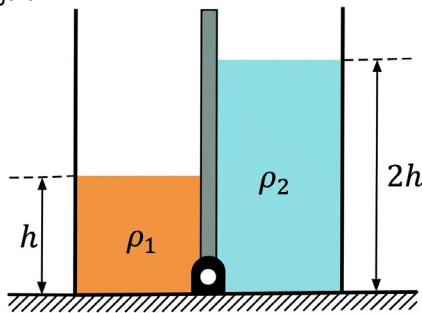
$$\bar{H} = \frac{\frac{\rho \cdot g \cdot L \cdot H^3}{6}}{\frac{\rho \cdot g \cdot L \cdot H^2}{2}} = \frac{H}{3}$$

CONCLUSÃO:

A linha de ação das forças de pressão passa a uma distância da base da represa igual a $H/3$.

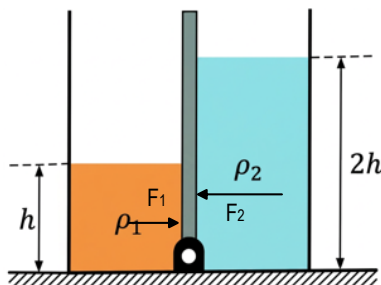
Exemplo 1: A comporta da figura pode rotacionar em torno da articulação. Determine a relação ρ_1/ρ_2 . Se a comporta que separa os líquidos se

encontra em repouso e a comporta possui uma largura L .



Resolução do prof. Laerte:

Impondo-se a condição de equilíbrio de rotação da comporta, podemos escrever:



$$\tau_H = \tau_{A-H}$$

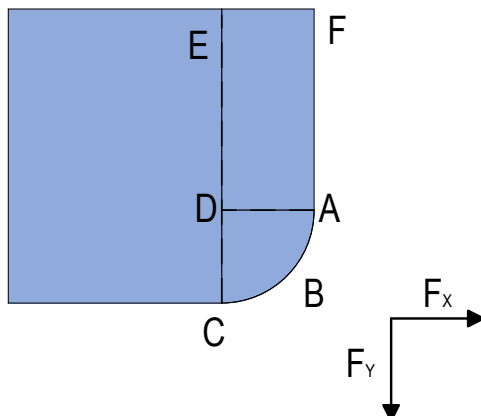
$$\frac{h}{3} \cdot F_1 = \frac{2h}{3} \cdot F_2$$

$$\left[\left(\frac{\rho_1 \cdot g \cdot h}{2} \right) (hL) \right] \left(\frac{h}{3} \right) = \left[\left(\frac{\rho_2 \cdot g \cdot 2h}{2} \right) (2hL) \right] \left(\frac{2h}{3} \right)$$

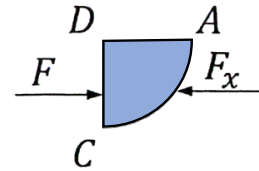
$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = 8$$

NOTA ITA-IME: FORÇA SOBRE UMA SUPERFÍCIE CURVA

Considere uma superfície curva ABC de uma parede de contêiner, que contém um líquido. Queremos escrever força nesta parede curva devido ao líquido de densidade ρ .



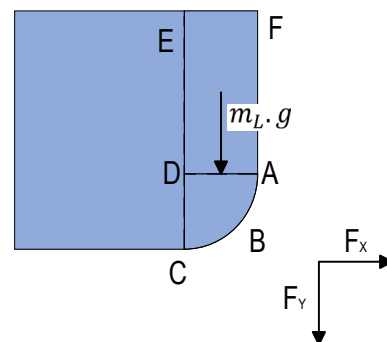
É fácil calcular as componentes horizontal e vertical da força, separadamente. Para encontrar a componente horizontal (F_x) da força, considere o equilíbrio horizontal do líquido no volume representado pela ABCD.



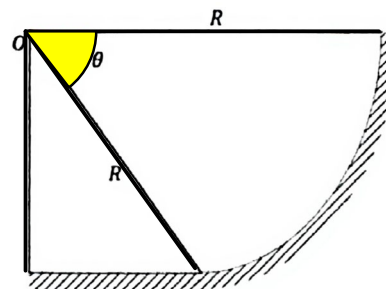
A força na superfície curva no líquido tem um componente horizontal (F_x) que é equilibrado pela horizontal força na parede vertical CD devido ao líquido circundante.

$$F_x = \left(\frac{p_C + p_D}{2} \right) \cdot A_{CD}$$

Agora, considere o equilíbrio vertical do volume líquido FABCE (ver primeira figura). A força vertical exercida pelo líquido sobre a superfície curva é igual ao peso do líquido no volume representado pela FABCE.

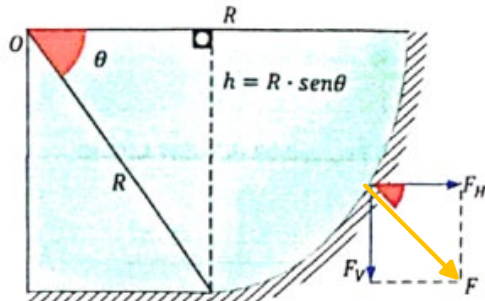


EXEMPLO 2: A seção transversal da parede de uma barragem é um arco de círculo de raio R subtendendo um ângulo θ de no centro do círculo. O centro (O) do círculo está na superfície da água. A largura da barragem (isto é, dimensão perpendicular à figura) é b . Despreze a pressão atmosférica nos cálculos seguintes.



- a) Calcule a componente vertical da força F_V aplicada pela água na parede curva da barragem;
 b) Calcule a componente horizontal da força F_H aplicada pela água na parede curva da barragem;
 c) Calcule a força resultante aplicada pela água na parede curva da barragem.

Resolução do prof. Laerte:



- a) A força vertical sobre a superfície curva é dada pelo peso da água na porção ABC, assim:

$$F_V = m_{\text{ÁGUA}} \cdot g$$

$$F_V = \rho \cdot b \cdot \left[\frac{\pi \cdot R^2}{6} - \frac{1}{2} \cdot \frac{R}{2} \cdot \frac{\sqrt{3} \cdot R}{2} \right] \cdot g$$

$$F_V = \rho \cdot b \cdot g \cdot R^2 \left[\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{8} \right]$$

- b) A força horizontal que atua sobre a superfície curva é dada por:

$$F_H = p_{\text{MÉDIA}} \cdot A_{\text{PROJETADA}}$$

$$F_H = \left(\frac{\rho \cdot g \cdot h}{2} \right) \cdot (b \cdot h)$$

A altura da coluna de água é dada por:

$$h = \bar{AB} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \cdot R$$

Logo:

$$F_H = \left(\frac{\rho \cdot g}{2} \cdot \frac{R \cdot \sqrt{3}}{2} \right) \cdot \left(b \cdot \frac{R \cdot \sqrt{3}}{2} \right)$$

$$F_H = \frac{3 \cdot \rho \cdot b \cdot g \cdot R^2}{8}$$

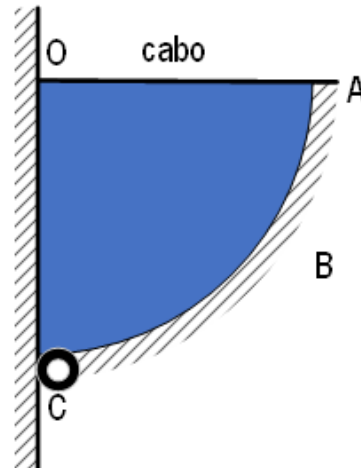
- c) A força sobre a parte curva da represa:

$$F = \sqrt{F_H^2 + F_V^2}$$

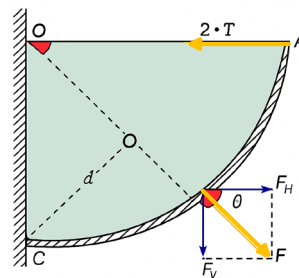
EXEMPLO 3: Uma placa tem a forma de um quarto de cilindro de raio R e comprimento L . Esta placa é articulada em C a uma parede vertical e pode girar livremente em torno de C . A extremidade A

da placa é amarrada à parede usando dois cabos horizontais (os demais cabos são paralelos ao lado OA e os dois cabos são colocados simetricamente). O espaço entre a parede e a placa é preenchido completamente com água (densidade ρ). Despreze o peso da placa e calcule a força de tração em cada cabo.

Dados: $\text{tg}^{-1} \left(\frac{\pi}{2} \right) \cong 57^\circ$; $\cos(57^\circ) \cong \frac{1}{2}$



Resolução:



O módulo da força vertical que atua sobre a placa é dado pelo peso da quantidade de água em seu interior, assim:

$$F_V = \rho \cdot \frac{\pi \cdot R^2}{4} \cdot L \cdot g$$

A força horizontal que atua sobre a placa é dada por:

É

$$F_H = p_{\text{MÉDIA}} \cdot A_{\text{PROJETADA}}$$

$$F_H = \left(\frac{\rho \cdot g \cdot R}{2} \right) \cdot (R \cdot L)$$

$$F_H = \frac{\rho \cdot g \cdot R^2 \cdot L}{2}$$

A força que o líquido exerce sobre a água é dada por:

$$F^2 = F_H^2 + F_V^2$$

$$F^2 = \left(\frac{\rho \cdot g \cdot R^2 \cdot L}{2} \right)^2 + \left(\rho \cdot \frac{\pi \cdot R^2}{4} \cdot L \cdot g \right)^2$$

$$F^2 = \left(\frac{\rho \cdot g \cdot R^2 \cdot L}{2} \right)^2 \left[1 + \frac{\pi^2}{4} \right]$$

$$F = \frac{\rho \cdot g \cdot R^2 \cdot L}{4} \cdot \sqrt{4 + \pi^2}$$

A força que o líquido exerce sobre a placa forma um ângulo θ com a direção horizontal, assim:

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{F_V}{F_H} = \frac{\rho \cdot \frac{\pi \cdot R^2}{4} \cdot L \cdot g}{\frac{\rho \cdot g \cdot R^2 \cdot L}{2}} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \theta = 57^\circ$$

Agora calculando-se o torque em torno do ponto C , podemos escrever:

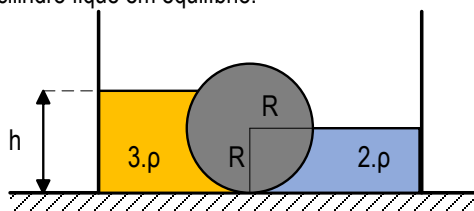
$$\tau_{\text{TRAÇÃO}} = \tau_F \Rightarrow 2T \cdot R = F \cdot R \cdot \cos \theta$$

$$T = \frac{F}{2} \cdot \cos \theta = \frac{F}{2} \cdot \frac{1}{2}$$

$$T = \frac{1}{4} \left(\frac{\rho \cdot g \cdot R^2 \cdot L}{4} \cdot \sqrt{4 + \pi^2} \right)$$

$$T = \frac{\rho \cdot g \cdot R^2 \cdot L}{16} \cdot \sqrt{4 + \pi^2}$$

EXEMPLO 4: Na figura mostrada, o cilindro pesado (raio R e comprimento L) apoiado sobre uma superfície lisa separa dois líquidos de densidades $2 \cdot \rho$ e $3 \cdot \rho$. Encontre a altura h para que o cilindro fique em equilíbrio.



RESOLUÇÃO:

Sabemos que a força média horizontal exercida sobre o cilindro é dada por:

$$F_M = p_M \cdot A_{\text{PROJETADA}}$$

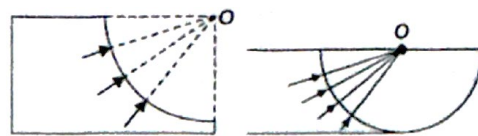
Para que o cilindro fique em equilíbrio da direção horizontal, devemos ter:

$$F_{1H} = F_{2H}$$

$$\frac{1}{2} \cdot (2\rho \cdot g \cdot h) \cdot (h \cdot L) = \frac{1}{2} \cdot (3\rho \cdot g \cdot R) \cdot (R \cdot L)$$

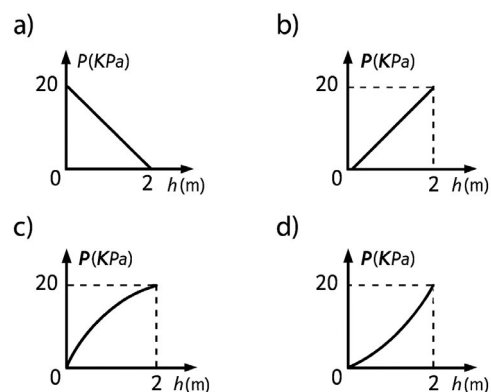
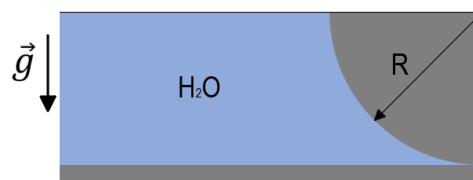
$$2h^2 = 3R^2$$

$$h = R \cdot \sqrt{\frac{3}{2}}$$



NOTA: O equilíbrio de rotação já é garantido pois todas as forças de pressão concorrem no centro do cilindro. Observe que, para as figuras mostradas, o torque devido à força hidrostática em torno do ponto O, o centro de uma porta semicilíndrica (ou hemisférica) é zero pois a linha de ação da força hidrostática em todos os pontos passa através do ponto O.

EXEMPLO 5: Determine o gráfico que corresponde a pressão hidrostática na superfície do cilindro em função da profundidade h . ($R = 2 \text{ m}$; $g = 10 \text{ m/s}^2$).



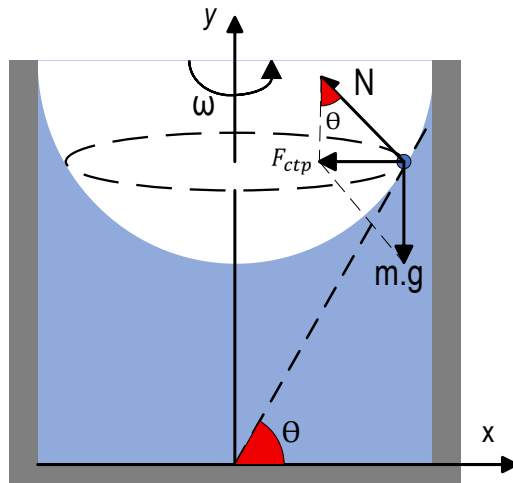
RESOLUÇÃO:

A pressão depende apenas da profundidade, ela não é afetada pela direção da superfície. Portanto, o comportamento deve-se manter linear crescente com a profundidade, seguindo a Lei de Stevin.

Gabarito: B

6. LÍQUIDO EM UM RECIPIENTE EM UM MOVIMENTO DE ROTAÇÃO (BALDE DE NEWTON):

Considere um líquido em um recipiente que está em movimento de rotação com velocidade angular ω constante. Um elemento do líquido de massa m se encontra a uma distância radial x do eixo de rotação, conforme a figura abaixo.



Se um elemento infinitesimal do líquido de massa m formar um ângulo θ com a horizontal, temos:

Na direção vertical:

$$N \cdot \cos \theta = m \cdot g \quad \therefore N = \frac{m \cdot g}{\cos \theta}$$

Na direção radial:

$$N \cdot \sin \theta = m \cdot \omega^2 \cdot x$$

Substituindo-se o valor da normal N , obtemos:

$$\left(\frac{m \cdot g}{\cos \theta}\right) \cdot \sin \theta = m \cdot \omega^2 \cdot x$$

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\omega^2 \cdot x}{g}$$

Da definição de inclinação da reta tangente, temos:

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{dy}{dx} = \frac{\omega^2 \cdot x}{g}$$

$$dy = \frac{\omega^2 \cdot x}{g} \cdot dx$$

Integrando-se a equação, obtemos:

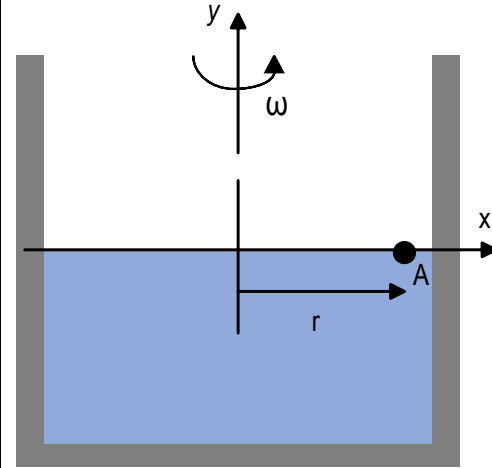
$$\int_0^y dy = \int_0^x \frac{\omega^2 \cdot x}{g} \cdot dx$$

$$y = \left(\frac{\omega^2}{2 \cdot g}\right) \cdot x^2$$

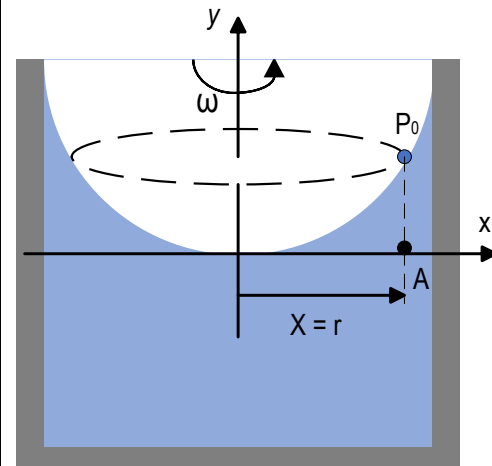
Se o recipiente possuir um raio $x = R$, temos:

$$y = \left(\frac{\omega^2}{2 \cdot g}\right) \cdot R^2$$

EXEMPLO 6: Um líquido de densidade ρ está em um balde que gira em torno do seu eixo com uma velocidade angular ω . Calcule a pressão em um ponto A radialmente a uma distância r do eixo conforme mostrado na figura, considere que a pressão atmosférica local vale p_0 .



Resolução:



Conforme demonstrado anteriormente, a equação da superfície do líquido em rotação é dada por:

$$y = \frac{\omega^2 \cdot x^2}{2 \cdot g}$$

Para uma distância radial dada por $x = r$, obtemos:

$$y = \frac{\omega^2 \cdot r^2}{2 \cdot g}$$

Seja p_0 a pressão exercida na superfície do líquido, a pressão no ponto A será igual a:

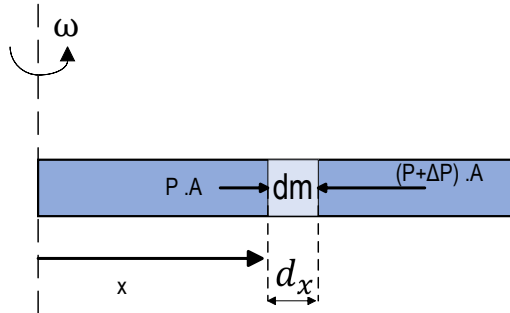
$$p_A = p_0 + \rho \cdot g \cdot y$$

$$p_A = p_0 + \rho \cdot g \cdot \left(\frac{\omega^2 \cdot r^2}{2 \cdot g}\right)$$

$$p_A = p_0 + \frac{\rho \cdot \omega^2 \cdot r^2}{2}$$

7. DIFERENÇA DE PRESSÃO EM FLUIDOS ROTATIVOS:

Considere um líquido de densidade ρ mantido dentro de um tubo de área de seção transversal A . Deixe o tubo girar com uma velocidade angular ω , conforme mostrado na figura.



Considere um pequeno elemento de comprimento dx a uma distância x do eixo de rotação. A massa deste elemento é:

$$dm = \rho \cdot dV = \rho \cdot A \cdot dx$$

Este elemento está girando em um círculo de raio x . Então, esse elemento deve ser acelerado em direção ao centro com centrípeta aceleração dada por:

$$a_{cp} = \omega^2 \cdot x$$

Para fornecer esta aceleração, a pressão do lado direito do elemento deve ser maior do que o lado esquerdo, então temos:

$$(p + dp) \cdot A - p \cdot A = (dm) \cdot \omega^2 \cdot x$$

$$dp \cdot A = (\rho \cdot A \cdot dx) \cdot \omega^2 \cdot x$$

$$dp = (\rho \cdot \omega^2) \cdot x \cdot dx$$

A diferença de pressão Δp pode ser dada por:

$$\Delta p = \rho \cdot \omega^2 \cdot \int_{x_1}^{x_2} x \cdot dx$$

$$\Delta p = \frac{\rho \cdot \omega^2}{2} \cdot (x_2^2 - x_1^2)$$

CONCLUSÃO:

A diferença de pressão entre dois pontos distantes do eixo de rotação ($x_2 > x_1$) é dada por:

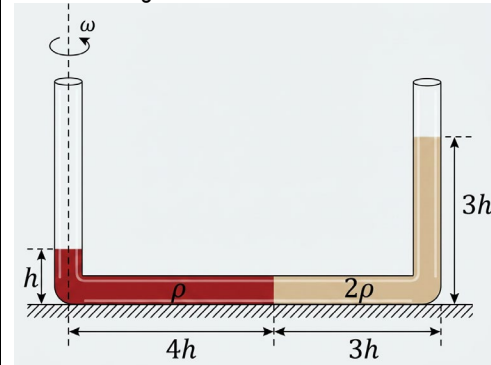
$$\Delta p = \frac{\rho \cdot \omega^2}{2} \cdot (x_2^2 - x_1^2)$$

Para um fluido em rotação (também em aceleração), a pressão aumenta em afastando-se do eixo de rotação. A uma distância x do eixo de rotação, a diferença de pressão é dada por:

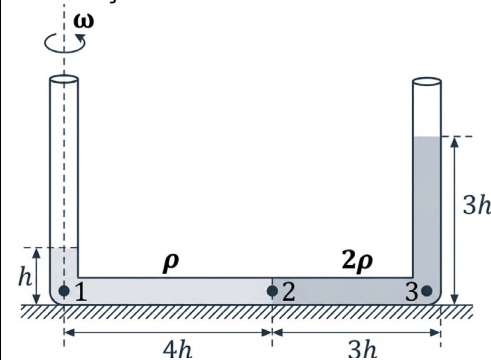
$$\Delta p = \pm \frac{\rho \cdot \omega^2 \cdot x^2}{2}$$

Ao se afastar do eixo de rotação, a pressão aumenta e ao se aproximar a pressão diminui.

EXEMPLO 7: Um tubo em U vertical com dois líquidos de densidades ρ e 2ρ está girando com uma velocidade angular ω em torno de um eixo vertical passando por seu ramo esquerdo, de modo que as colunas do líquido tenham alturas h e $3h$, conforme a figura abaixo. Calcule ω .



RESOLUÇÃO:



Conforme foi demonstrado anteriormente, temos:

$$\Delta p = p_2 - p_1 = \frac{\rho \cdot \omega^2}{2} \cdot (x_2^2 - x_1^2)$$

$$p_2 - p_1 = \frac{\rho \cdot \omega^2}{2} \cdot (4h)^2$$

$$p_2 = p_1 + 8 \cdot \rho \cdot \omega^2 \cdot h^2$$

De forma semelhante:

$$p_3 - p_2 = \frac{(2\rho) \cdot \omega^2}{2} \cdot [(7h)^2 - (4h)^2]$$

$$p_3 - p_2 = 33\rho \cdot \omega^2 \cdot h^2$$

Finalmente:

$$p_3 - p_1 = 41\rho \cdot \omega^2 \cdot h^2$$

Além disso, temos:

$$\begin{cases} p_1 = \rho \cdot g \cdot h \\ p_3 = (2\rho) \cdot g \cdot (3h) \end{cases}$$

Logo:

$$p_3 - p_1 = 5\rho \cdot g \cdot h$$

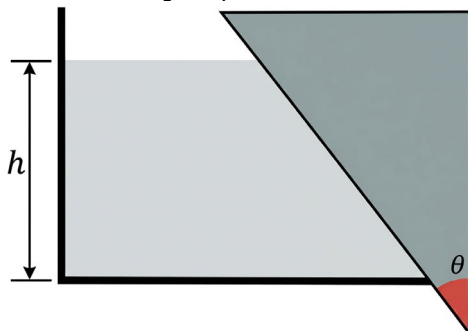
Comparando-se as equações anteriores:

$$41\rho \cdot \omega^2 \cdot h^2 = 5\rho \cdot g \cdot h$$

$$\omega = \sqrt{\frac{5g}{41h}}$$

NOTA (TA-ME): Pressão no interior de um líquido para o balde de Newton em rotação:

EXEMPLO 8: Uma fenda é feita ao longo da borda inferior direita de um tanque retangular. A fenda é fechada por uma cunha de madeira de massa m e ângulo de vértice é θ , conforme mostrado na figura. A superfície plana vertical da cunha está em contato com a parede vertical direita do tanque. O coeficiente de atrito estático entre essas superfícies em contato é μ . Até que altura máxima a água pode ser enchida no tanque sem que haja vazamento pela fenda? A largura do tanque é b e a densidade da água é ρ .



A pressão hidrostática é dada por:

$$p = \rho \cdot g \cdot h' = \rho \cdot g \cdot x \cdot \cos \theta$$

A força que a água aplica sobre a cunha é dada por:

$$dF = p \cdot dA$$

$$N = \int_0^{\frac{h}{\cos \theta}} \rho \cdot g \cdot x \cdot \cos \theta \cdot b \cdot dx$$

$$N = \rho \cdot g \cdot b \cdot \cos \theta \cdot \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^{\frac{h}{\cos \theta}}$$

$$N = \frac{\rho \cdot g \cdot b \cdot h^2}{2 \cdot \cos \theta}$$

Na direção horizontal podemos escrever:

$$N_1 = F \cdot \cos \theta$$

Na direção vertical, temos:

$$F_{AT} = F \cdot \sin \theta - mg \leq \mu \cdot N_1$$

$$F \cdot \sin \theta - mg \leq \mu \cdot F \cdot \cos \theta$$

$$F \cdot (\sin \theta - \mu \cdot \cos \theta) \leq mg$$

$$\frac{\rho \cdot g \cdot b \cdot h^2}{2 \cdot \cos \theta} \cdot (\sin \theta - \mu \cdot \cos \theta) \leq mg$$

$$h^2 \leq \frac{2m}{\rho \cdot b \cdot (\sin \theta - \mu \cdot \cos \theta)}$$

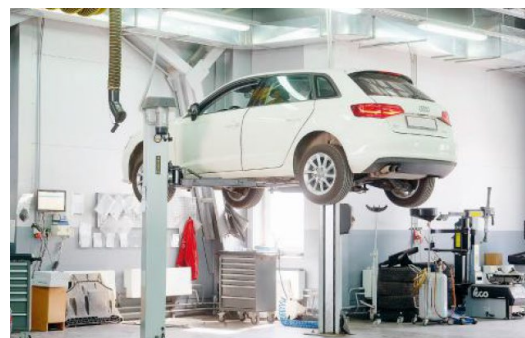
$$h_{\text{MÁX}} = \sqrt{\frac{2m}{\rho \cdot b \cdot (\sin \theta - \mu \cdot \cos \theta)}}$$

8. O princípio de Pascal

Você já reparou que, quando estamos com pressa e fechamos bruscamente uma porta, é comum ouvirmos o vidro das janelas vibrarem ou até mesmo outra porta se abrir? Será que a mecânica dos fluidos pode nos ajudar a entender esse fenômeno tão curioso?

A explicação para esse fato é que, ao deslocar a porta, ela exerce uma variação de pressão sobre o ar do ambiente onde se encontra, e este acréscimo é transferido para outros pontos do ambiente, através desse meio gasoso. Essa variação de pressão faz os vidros vibrarem e as portas baterem.

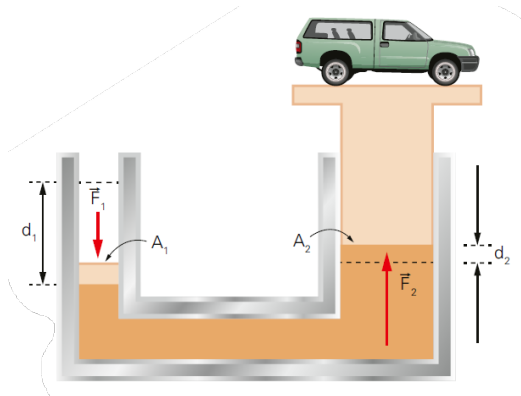
Tal explicação se baseia no **princípio de Pascal**. Grandes benefícios decorrem desse princípio, entre eles: o funcionamento dos elevadores hidráulicos utilizados para levantar carros, a multiplicação de forças ao utilizarmos os alicates hidráulicos e o funcionamento de freios e volantes hidráulicos de automóveis.



Devemos esse princípio a Blaise Pascal (1623-1662), e podemos enunciar-lo da seguinte forma:

Um acréscimo de pressão comunicado a um ponto qualquer de um fluido em equilíbrio transmite-se integralmente a todos os demais pontos do fluido, bem como às paredes do recipiente que o contém.

Uma aplicação importante do princípio de Pascal é o elevador hidráulico, em que relacionamos a aplicação de uma força externa de entrada $\vec{F}_1$ e uma força de saída $\vec{F}_2$, como mostra a figura.



Da definição de pressão:

$$\Delta p = \frac{F}{A}$$

Pelo princípio de Pascal, as variações de pressão em um fluido estático são as mesmas em todos os pontos do fluido.

$$\Delta p = \frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2} \Rightarrow$$

$$F_2 = F_1 \cdot \frac{A_2}{A_1}$$

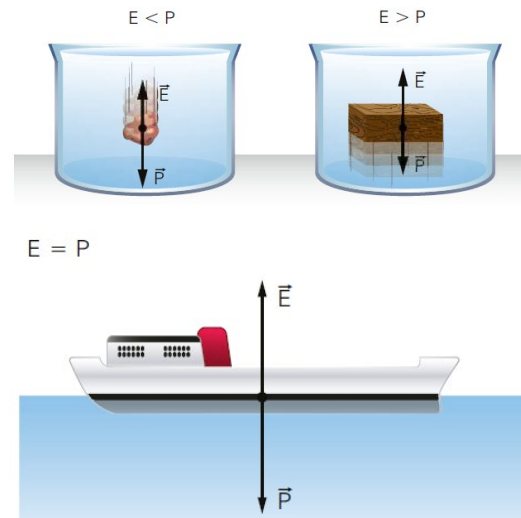
Essa equação mostra que a força F_2 é maior que F_1 se A_2 for maior que A_1 . Serão iguais se A_1 for igual a A_2 .

9. Condições de flutuabilidade dos corpos

Em geral, se um corpo é abandonado em um meio fluídico, podem acontecer três casos:

- I. Se o módulo do peso (P) do corpo for maior que o do empuxo (E), o corpo afunda até encontrar um obstáculo que o faça parar de afundar.
- II. Se o módulo do peso (P) e do empuxo (E) forem iguais, o corpo fica em equilíbrio qualquer que seja a profundidade em que se encontra.
- III. Se o módulo do peso (P) for menor que o do empuxo (E), o corpo é impelido até à superfície, da

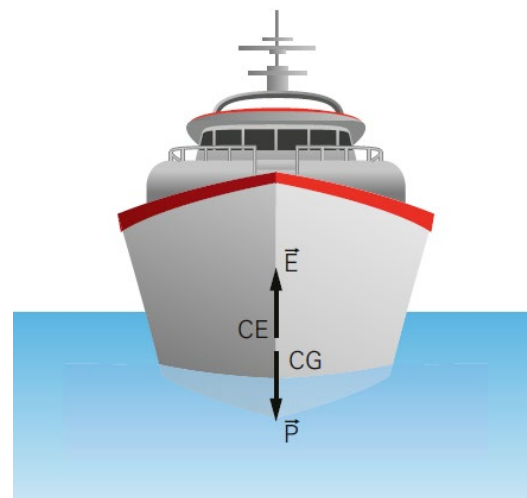
qual emerge, ficando mergulhada somente uma porção do seu volume.



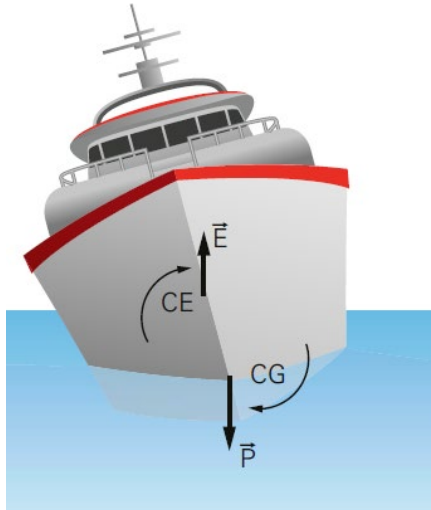
Por que um corpo possui estabilidade (ou não) quando está imerso num fluido?

A estabilidade de um navio, por exemplo, depende do ponto de aplicação da força peso ($\vec{P}$) e da força de empuxo ($\vec{E}$). A força peso, como sabemos, atua no centro de gravidade (CG), que é fixo. Já o empuxo é aplicado no centro de empuxo (CE), que é variável. Esse CE está localizado no centro de gravidade do volume de líquido deslocado pelo corpo, assim, a posição do CE muda de acordo com a forma do volume do líquido deslocado.

Todo navio é projetado para, em caso de oscilações laterais, retornar à posição inicial. Para isso, seu CG deve se posicionar abaixo do CE, de modo a produzir situação de equilíbrio estável. É o momento das forças que fará com que a situação de equilíbrio seja restaurada.



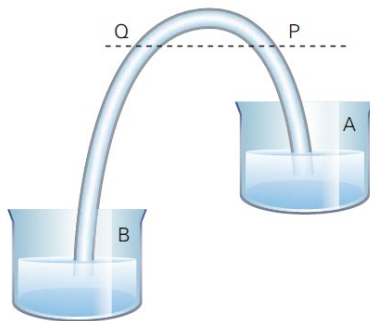
Equilíbrio inicial



Restaurando o equilíbrio

Para se obter a máxima estabilidade possível, a distribuição de cargas dentro do navio deve ser tal que o CG fique situado o mais próximo possível do fundo do navio.

APLICAÇÃO 1 – O efeito sifão



O sifão é um instrumento usado para a retirada de água de lugares de difícil acesso. Como mostra a figura ao lado, seu funcionamento se baseia no fato de que, quando o tubo que liga os recipientes A e B está cheio, há uma diferença de pressão hidrostática entre os pontos P e Q, o que provoca um fluxo de água de A para B.

Essa diferença de pressão depende de quais características do equipamento e do nosso planeta?

A diferença de pressão hidrostática (Δp) entre dois pontos de desnível h , para um líquido de densidade μ_{liq} , é dada pelo teorema de Stevin:

$$\Delta p = \mu_{liq} \cdot g \cdot h$$

Portanto, essa diferença só depende da densidade do líquido, do desnível e da gravidade local.

APLICAÇÃO 2 – O freio a disco e a vantagem mecânica

Você já pensou como funciona o sistema de freio a disco de um automóvel? Esse sistema é representado, de forma simplificada, na figura a seguir. Ao se pressionar o pedal do freio, este empurra o êmbolo de um primeiro pistão que, por sua vez, empurra um segundo pistão por meio do óleo do circuito hidráulico. O segundo pistão pressiona a pastilha de freio contra um disco metálico preso à roda, fazendo com que ela diminua sua velocidade angular.

Considerando o diâmetro d_2 do segundo pistão duas vezes maior que o diâmetro d_1 do primeiro, qual é a vantagem mecânica do dispositivo abaixo?

Considerando F_1 o módulo da força aplicada ao pedal de freio pelo pé do motorista e F_2 o módulo da força aplicada à pastilha de freio, pelo princípio de Pascal:

$$\frac{F_1}{d_1^2} = \frac{F_2}{d_2^2} \Rightarrow \frac{F_1}{F_2} = \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^2 \Rightarrow \frac{F_1}{F_2} = \left(\frac{d_1}{2d_1}\right)^2 \Rightarrow \frac{F_1}{F_2} = \frac{1}{4}$$

Logo, a vantagem mecânica (VM) associada a essa máquina será:

$$V_m = \frac{F_{Resistente}}{F_{Motora}} = \frac{F_2}{F_1} = 4$$

APLICAÇÃO 3 – O densímetro



Nos postos de gasolina, usam-se densímetros para controlar o padrão de qualidade do álcool hidratado.

Um densímetro é um dispositivo com o qual se pode medir a densidade de um líquido. Trata-se de um objeto com uma haste graduada que, quando colocado em um líquido padrão de densidade

conhecida, flutua de modo tal que a superfície livre do líquido coincide com determinada marca da haste.

Suponha que um negociante desonesto tenha misturado mais água ao álcool hidratado. Sabendo que a densidade do álcool é menor do que a da água, verifique se o densímetro flutuaria nesse álcool "batizado", com a marca acima ou abaixo de sua superfície livre, conforme mostrado no detalhe da figura a seguir.

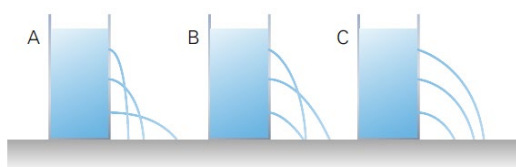
Em qualquer situação, o densímetro estará em equilíbrio sob a ação do seu peso e do empuxo que sobre ele atua.

O módulo do empuxo, que é igual ao peso do líquido deslocado, é então igual ao módulo do peso do densímetro tanto antes como depois de adulterar o álcool.

Quando a água é adicionada ao álcool, a mistura resultante torna-se mais densa do que a mistura anterior. Portanto, o volume do álcool alterado deslocado é menor do que o volume do álcool hidratado padrão deslocado, fazendo com que a marca fique acima da superfície livre.

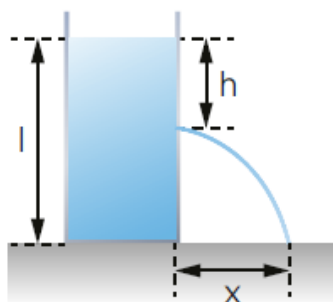
APLICAÇÃO 4 – O alcance de jatos de água

As figuras abaixo mostram recipientes com água com três furos de profundidades diferentes. Levando em conta o teorema de Torricelli, qual das três opções (A, B ou C) representaria a situação física correta?



O teorema de Torricelli diz que o jato de água sai com velocidade horizontal $v_x = \sqrt{2gh}$.

Para achar esse resultado, basta igualar a energia cinética da água na saída do furo com a energia potencial gravitacional na superfície da água.



A distância horizontal percorrida pelo jato, no tempo t , é dada por:

$$x = v_x \cdot t \Rightarrow x = \sqrt{2gh} \cdot t$$

Digamos que t seja o tempo para que o jato caia de $(l - h)$, isto é, para atingir o solo.

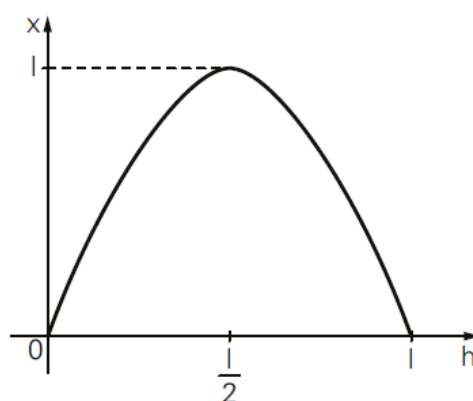
Teremos:

$$H = \frac{gt^2}{2} \Rightarrow (l - h) = \frac{gt^2}{2}$$

Eliminando o t das duas equações, obtemos o alcance do jato de água:

$$x = 2\sqrt{h(l - h)}$$

Um gráfico do alcance do jato (x) em função da profundidade (h) é o seguinte:



O valor máximo do alcance (x) do jato de água se dá quando $h = \frac{l}{2}$, isto é, quando o furo está na profundidade média da água.

Essa característica está presente na opção B. Nesse caso, a água alcança uma distância $x = l$, isto é, é igual à profundidade total da água no recipiente.

Fato interessante: o alcance não depende da aceleração da gravidade g , o que significa que o jato de água teria o mesmo alcance se a experiência fosse feita em Marte!

10. Apêndice Teórico: Empuxo Não Arquimediano (Bloco no Fundo com Vedação Perfeita)

Introdução e Contextualização

O **Princípio de Arquimedes** afirma que todo corpo total ou parcialmente imerso em um fluido em equilíbrio sofre a ação de uma força vertical, de

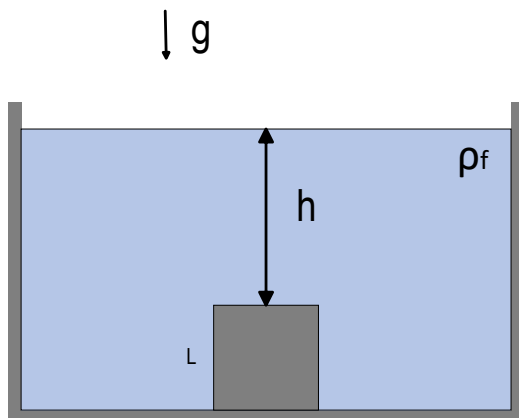
baixo para cima, igual ao peso do volume de fluido deslocado.

Entretanto, a origem física dessa força (o **Empuxo**) reside na **diferença de pressão hidrostática** entre a parte inferior e a parte superior do corpo.

Se um bloco sólido descansar no fundo plano de um recipiente de tal forma que **não haja lâmina de fluido entre a face inferior do bloco e o fundo** (vedação perfeita), o fluido não exercerá força de baixo para cima na base do bloco. Nessa situação, o Princípio de Arquimedes em sua forma tradicional **não se aplica**, gerando o fenômeno do **Empuxo Não Arquimediano** (ou empuxo de sentido inverso/negativo).

Considere um bloco cúbico de massa m , aresta L e densidade ρ_c , repousando no fundo plano de um aquário contendo um fluido incompressível de densidade ρ_f .

- L : Aresta do bloco cúbico (Área da face: $A = L^2$);
- h : Profundidade da face superior do bloco em relação à superfície livre do fluido;
- P_0 : Pressão atmosférica local;
- ρ_f : Densidade do fluido;
- g : Aceleração da gravidade local.



Derivação Passo a Passo das Forças Hidrostáticas

Para determinar a força resultante exercida pelo fluido sobre o bloco, analisa-se a contribuição da pressão em todas as suas faces.

Passo 1: Análise das Faces Laterais

A pressão hidrostática a uma profundidade z genérica é dada pela Lei de Stevin:

$$P(z) = P_0 + \rho_f g z$$

Por simetria geométrica, para cada elemento de área na face lateral esquerda, existe um elemento correspondente na face lateral direita submetido à mesma pressão.

Como as forças atuam em sentidos opostos, as componentes horizontais se anulam duas a duas:

$$\sum \vec{F}_{\text{lateral}} = \vec{0}$$

Passo 2: Análise da Face Inferior (Base)

Como há vedação perfeita entre a base do bloco e o fundo do aquário, **não há presença de fluido** sob o bloco. Logo, a pressão hidrostática exercida pelo fluido na face inferior é nula:

$$P_{\text{inf}} = 0 \Rightarrow F_{\text{inf}} = 0$$

Passo 3: Análise da Face Superior (Topo)

A face superior encontra-se a uma profundidade constante h . A pressão exercida pelo fluido sobre essa face vale:

$$P_{\text{sup}} = P_0 + \rho_f g h$$

Como a força é o produto da pressão pela área da face ($A = L^2$), a força hidrostática atuando no topo aponta **verticalmente para baixo**:

$$F_{\text{sup}} = P_{\text{sup}} \cdot A = (P_0 + \rho_f g h) L^2$$

Passo 4: Cálculo da Força Hidrostática Resultante ($\vec{F}_H$)

A força resultante exercida exclusivamente pelo fluido sobre o bloco é a soma vetorial das forças em todas as faces:

$$\vec{F}_H = \vec{F}_{\text{sup}} + \vec{F}_{\text{inf}} + \sum \vec{F}_{\text{lateral}}$$

Tomando o eixo vertical orientado para cima ($+\hat{k}$):

$$\vec{F}_H = -(P_0 + \rho_f g h) L^2 \hat{k}$$

Em módulo, a força hidrostática resultante atuando para baixo é:

$$F_H = (P_0 + \rho_f g h) L^2$$

Se desconsiderarmos a pressão atmosférica (ou trabalhando em escala manométrica):

$$F_H^{\text{manométrica}} = \rho_f g h L^2$$

Balanço de Forças e Força Normal no Fundo do Aquário

Para manter o bloco em equilíbrio estático no fundo do aquário, analisamos as forças verticais atuando no corpo:

1. **Peso do bloco (P):** Para baixo, $P = mg = \rho_c L^3 g$;
2. **Força hidrostática do topo (F_{sup}):** Para baixo;
3. **Força Normal do fundo (N):** Para cima.

Aplicando a Primeira Lei de Newton ($\sum F_y = 0$):

$$N - P - F_{\text{sup}} = 0$$

$$N = mg + (P_0 + \rho_f g h) L^2$$

Substituindo a massa do bloco em termos de sua densidade:

$$N = \rho_c L^3 g + (P_0 + \rho_f g h) L^2$$

Armadilhas e Dicas Frequentes para o ITA

- **Atenção à Pressão Atmosférica (P_0):** No empuxo tradicional, P_0 se cancela porque atua tanto no topo quanto na base. No empuxo não arquimediano, como não há fluido na base, a **pressão atmosférica contribui para empurrar o bloco contra o fundo**.
- **Condição de Descolamento:** Para conseguir erguer o bloco nessa condição de vedação perfeita, a força aplicada verticalmente para cima deve superar o Peso somado à força da coluna de fluido e à pressão atmosférica ($F_{\text{mínima}} > N$).
- **Infiltração Mínima:** Caso uma quantidade infinitesimal de líquido se infiltre sob a base, o sistema imediatamente transita para o regime de Arquimedes clássico, pois a pressão hidrostática na base passará a ser $P_0 + \rho_f g(h + L)$.

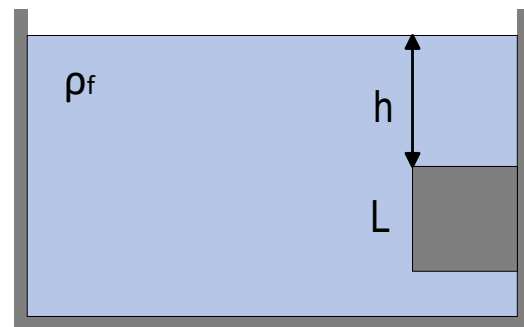
Empuxo sobre um bloco cúbico em contato com a parede lateral

Considere um bloco cúbico de aresta L , completamente imerso em um aquário cujo líquido possui densidade uniforme ρ . O bloco está a uma profundidade H , medida até sua face superior, e encostado em uma das paredes laterais do aquário.

Adotaremos:

- L : aresta do bloco, em m;
- H : profundidade da face superior do bloco, em m;
- ρ : densidade do líquido, em kg/m^3 ;
- g : aceleração da gravidade, em m/s^2 ;
- p_0 : pressão atmosférica, em Pa;
- $p = p_0 + \rho g z$: pressão absoluta a uma profundidade z .

↓ g



Pressão na face superior

A face superior está a uma profundidade H . Logo, sua pressão absoluta é:

$$p_{\text{sup}} = p_0 + \rho g H.$$

A área da face é:

$$A = L^2.$$

A força exercida pelo líquido sobre a face superior aponta para baixo:

$$F_{\text{sup}} = p_{\text{sup}} A.$$

Assim:

$$F_{\text{sup}} = (p_0 + \rho g H) L^2.$$

Pressão na face inferior

A face inferior está a uma profundidade:

$$H + L.$$

Portanto:

$$p_{\text{inf}} = p_0 + \rho g(H + L).$$

A força sobre a face inferior aponta para cima:

$$F_{\text{inf}} = p_{\text{inf}} A.$$

Logo:

$$F_{\text{inf}} = [p_0 + \rho g(H + L)]L^2.$$

Pressão na face lateral

$$dF_x = P \cdot dA$$

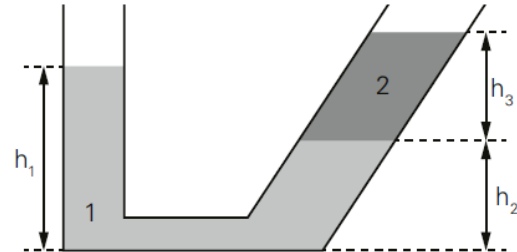
$$dF_x = \rho \cdot g \cdot y \cdot dy$$

$$\int dF_x = \int_{h_1}^{h_2} \rho \cdot g \cdot y \cdot dy$$

$$F_x = \frac{\rho \cdot g \cdot L}{2} (h_2^2 - h_1^2)$$

EXERCÍCIOS

1. A figura a seguir apresenta um vaso preenchido com dois fluidos diferentes não miscíveis. O fluido 1 apresenta densidade de 1 g/cm^3 e o fluido 2, densidade de $0,7 \text{ g/cm}^3$.



Sendo $h_1 = h + h_2$, qual a razão $\frac{h_2}{h_3}$?

- a) 0,7
- b) 1
- c) 5
- d) 3,2
- e) 100

2. A diferença de pressão máxima que o pulmão de um ser humano pode gerar por inspiração é em torno de $0,1 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ ou $0,1 \text{ atm}$. Assim, mesmo com a ajuda de um snorkel (respiradouro), um mergulhador não pode ultrapassar uma profundidade máxima, já que a pressão sobre os pulmões aumenta à medida que ele mergulha mais fundo, impedindo-os de inflarem.



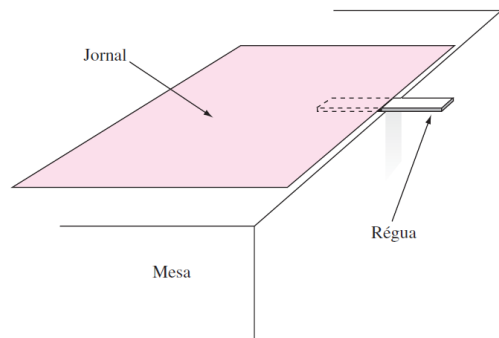
Considerando a densidade da água $1 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$ e a aceleração da gravidade igual a 10 m/s^2 , a profundidade máxima estimada, representada por h , a que uma pessoa pode mergulhar respirando com a ajuda de um snorkel é igual a

- a) $1,1 \cdot 10^2 \text{ m}$
- b) $1,0 \cdot 10^2 \text{ m}$
- c) $1,1 \cdot 10^1 \text{ m}$

d) $1,0 \cdot 10^1 \text{ m}$

e) $1,0 \cdot 10^0 \text{ m}$

3. (**Prof. Laerte**) Um professor propõe o seguinte experimento para discutir a pressão do ar. Ele coloca uma régua de madeira fina, com cerca de 30 cm de comprimento, sobre a borda de uma mesa, deixando um pequeno trecho da régua projetado para fora. Em seguida, cobre quase toda a parte da régua que está sobre a mesa com duas folhas abertas de jornal, como mostra a figura.



Ao dar um golpe rápido para baixo na ponta livre da régua, os estudantes observam que ela se parte, em vez de ser simplesmente levantada junto com o jornal.

Considere que:

- a pressão atmosférica ao nível da sala é aproximadamente $1,0 \times 10^5 \text{ Pa}$;
- a área do jornal em contato com o ar é de cerca de $0,5 \text{ m}^2$;
- o peso do jornal é desprezável quando comparado às forças envolvidas.

Nesse contexto, a principal explicação para a régua se partir é que

- A) o peso do jornal, distribuído sobre a régua, aumenta a pressão sobre ela, impedindo seu movimento.
- B) a pressão atmosférica age apenas na parte superior do jornal, criando uma força resultante nula sobre a régua.
- C) a grande área do jornal faz com que a pressão atmosférica exerça uma força muito grande sobre ele, dificultando que a régua o levante rapidamente.
- D) o golpe rápido diminui instantaneamente a pressão do ar sob o jornal, fazendo com que o peso da régua aumente e cause a sua ruptura.

E) o movimento da régua gera um vácuo perfeito abaixo do jornal, eliminando a ação da pressão atmosférica sobre ele.

4. (**Prof. Laerte**) Uma pessoa adulta, em posição ereta, possui altura aproximada de 1,65 m. Considere que o sangue pode ser tratado como um fluido incompressível de densidade média $\rho = 1,0 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$.

Para investigar o efeito da gravidade sobre o sistema circulatório, um pesquisador analisa um vaso sanguíneo nos pés e outro vaso semelhante no topo da cabeça dessa pessoa. Ele supõe que, em repouso, a diferença de pressão sanguínea entre os pés e o topo da cabeça é determinada predominantemente pela coluna de sangue ao longo do corpo.

Admitindo $g = 10 \text{ m/s}^2$ e desconsiderando variações dinâmicas do fluxo, a diferença aproximada de pressão entre o sangue nos pés e o sangue no topo da cabeça, em pascal, é

- A) $1,6 \times 10^2$
- B) $1,6 \times 10^3$
- C) $1,6 \times 10^4$
- D) $1,6 \times 10^5$
- E) $1,6 \times 10^6$

5. Ao praticar mergulho recreativo no mar, muitas pessoas sentem dor nos ouvidos ao descer alguns metros de profundidade. Essa dor está associada à diferença entre a pressão da água externa e a pressão do ar na cavidade interna do ouvido médio, que atua sobre a membrana do tímpano.

Considere que o tímpano de uma pessoa tem formato aproximado de um círculo de diâmetro 8,2 mm, e que ele começa a sofrer risco de lesão quando a força resultante da água sobre a sua superfície excede em cerca de 1,5 N a força exercida pela pressão atmosférica.

Admita que:

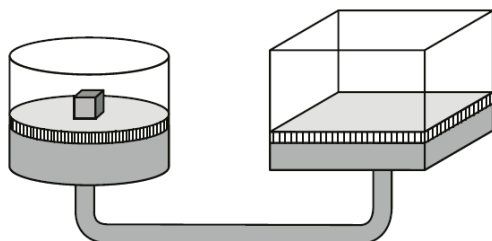
- a densidade da água do mar seja $\rho = 1,0 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$;
- a aceleração da gravidade seja $g = 10 \text{ m/s}^2$;
- a pressão atmosférica na superfície seja $1,0 \times 10^5 \text{ Pa}$.

Nessas condições, aproximando $\pi = 3,14$, a profundidade a partir da qual o tímpano dessa pessoa

pode começar a ser lesionado é, em metros, mais próxima de

- A) 1,0
- B) 2,0
- C) 5,0
- D) 7,0
- E) 10,0

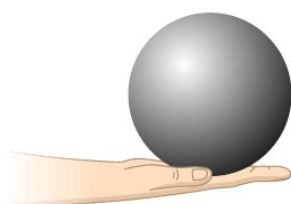
6. Uma prensa hidráulica é composta por dois reservatórios: um cilíndrico e outro em forma de prisma com base quadrada. O diâmetro do êmbolo do reservatório cilíndrico tem a mesma medida que o lado do êmbolo do reservatório prismático. Esses êmbolos são extremamente leves e podem deslocar-se para cima ou para baixo, sem atrito, e perfeitamente ajustados às paredes dos reservatórios. Sobre o êmbolo cilíndrico está um corpo de peso P .



A força que deve ser aplicada no êmbolo quadrado para elevar esse corpo deve ter intensidade mínima igual a:

- a) $\frac{P}{\pi}$
- b) $\frac{2P}{\pi}$
- c) $\frac{4P}{\pi}$
- d) $\frac{\pi \cdot P}{2}$
- e) $\frac{\pi \cdot P}{4}$

7. Uma pessoa totalmente imersa em uma piscina sustenta, com uma das mãos, uma esfera maciça de diâmetro igual a 10 cm, também totalmente imersa. Observe a ilustração:

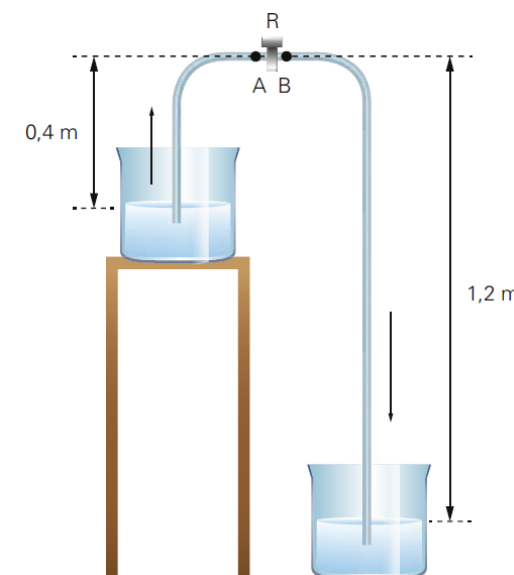


A massa específica do material da esfera é igual a $5,0 \text{ g/cm}^3$ e a da água da piscina é igual a $1,0 \text{ g/cm}^3$.

A razão entre a força que a pessoa aplica na esfera para sustentá-la e o peso da esfera é igual a:

- a) 0,2
- b) 0,4
- c) 0,8
- d) 1,0

8. O sifão é um dispositivo que permite transferir um líquido de um recipiente mais alto para outro mais baixo, por meio, por exemplo, de uma mangueira cheia do mesmo líquido. Na figura, que representa, esquematicamente, um sifão utilizado para transferir água de um recipiente sobre uma mesa para outro no piso, R é um registro que, quando fechado, impede o movimento da água. Quando o registro é aberto, a diferença de pressão entre os pontos A e B provoca o escoamento da água para o recipiente de baixo.

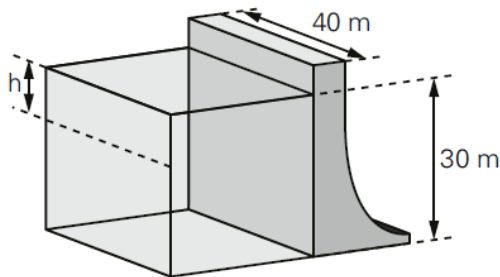


Considere que os dois recipientes estejam abertos para a atmosfera, que a densidade da água seja igual a 10^3 kg/m^3 e que $g = 10 \text{ m/s}^2$. De acordo com as medidas indicadas na figura, com o registro R fechado, a diferença de pressão $p_A - p_B$, entre os pontos A e B, em pascal, é igual a:

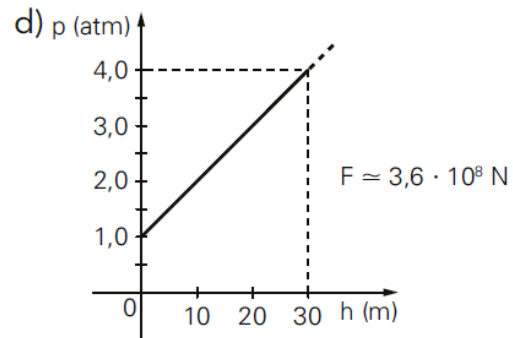
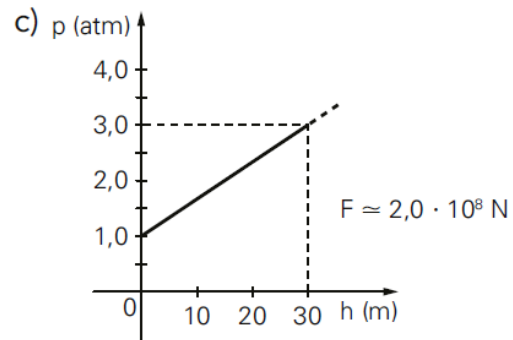
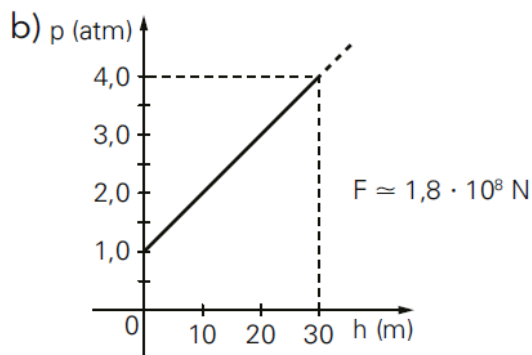
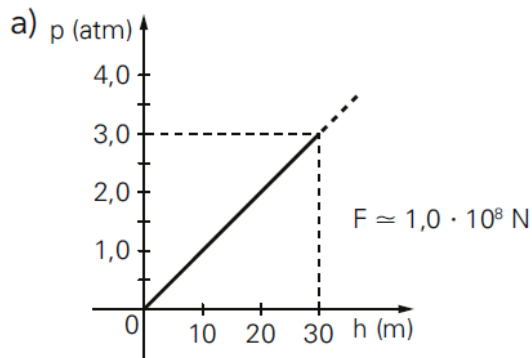
- a) 4000
- b) 10000
- c) 2000
- d) 8000

e) 12000

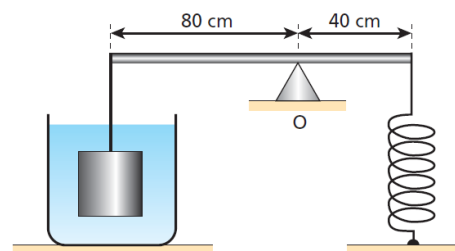
9. As barragens em represas são projetadas para suportar grandes massas de água. Na situação representada na figura, temos uma barragem de largura 40 m, retendo uma massa de água de 30 m de profundidade. Conhecendo-se o comportamento da pressão com a altura da coluna de um fluido e levando-se em conta que a pressão atmosférica age dos dois lados da barragem, é possível determinar a força horizontal da água da represa sobre a barragem.



Considere a pressão atmosférica $1 \text{ atm} \approx 1,0 \cdot 10^5 \text{ Pa}$, a densidade da água $\rho_{\text{água}} = 1,0 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$ e a aceleração da gravidade $g \approx 10 \text{ m/s}^2$. Qual das alternativas melhor representa a variação da pressão com a altura h da água em relação à superfície, e a força horizontal exercida por essa massa de água sobre a barragem?



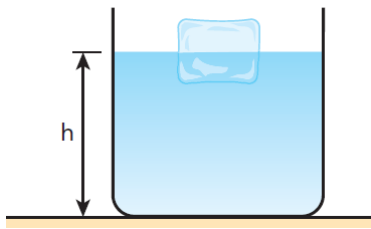
10. Na situação da figura, uma barra rígida e de peso desprezível está em equilíbrio na posição horizontal. Na extremidade esquerda da barra está pendurado um bloco de ferro (densidade de $8,0 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$), de volume igual a $1,0 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$, que está totalmente imerso em água (densidade de $1,0 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$). A extremidade direita da barra está presa a uma mola ideal de constante elástica $K = 2,8 \cdot 10^3 \text{ N/m}$.



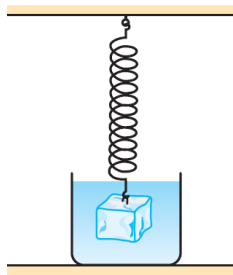
Adotando $g = 10 \text{ m/s}^2$, calcule:

- a intensidade do empuxo recebido pelo bloco;
- a deformação da mola.

11. Um bloco de gelo flutua na água, conforme representa a figura a seguir. O gelo e a água encontram-se em equilíbrio térmico, num local em que a pressão atmosférica é normal. Demonstre que, se o gelo se fundir, o nível da água no recipiente na situação final não se alterará. Admita que na situação final a temperatura do sistema ainda seja de 0°C .

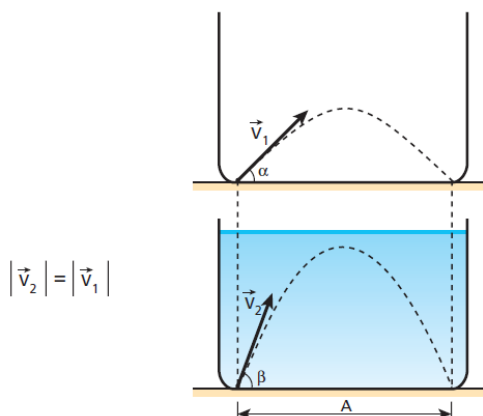


12. Um cubo de gelo a 0°C , preso a uma mola, é totalmente imerso em um recipiente com água a 25°C , conforme representa a figura. À medida que o gelo for se fundindo, podemos afirmar que:



- a) o comprimento da mola permanecerá constante.
- b) o comprimento da mola irá aumentando.
- c) o comprimento da mola irá diminuindo.
- d) o nível livre da água no recipiente permanecerá inalterado.
- e) o nível livre da água no recipiente irá subindo.

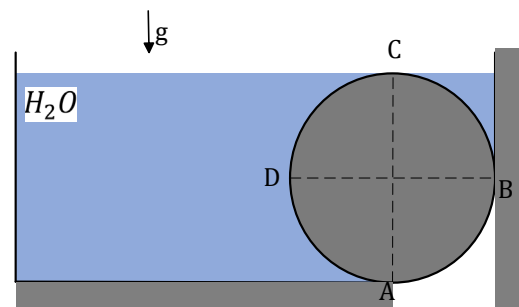
13. Um projétil de densidade ρ_p é lançado com um ângulo α em relação à horizontal no interior de um recipiente vazio. A seguir, o recipiente é preenchido com um superfluido de densidade ρ_s , e o mesmo projétil é novamente lançado dentro dele, só que sob um ângulo β em relação à horizontal. Observa-se, então, que, para uma velocidade inicial $\vec{V}$ do projétil, de mesmo módulo que a do experimento anterior, não se altera seu alcance horizontal A . Veja as figuras abaixo.



Sabendo-se que são nulas as forças de atrito num superfluido, pode-se então afirmar, com relação ao ângulo β de lançamento do projétil, que:

- a) $\sin\beta = \left(1 - \frac{\rho_s}{\rho_p}\right) \sin\alpha$
- b) $\sin 2\beta = \left(1 - \frac{\rho_s}{\rho_p}\right) \sin 2\alpha$
- c) $\sin 2\beta = \left(1 + \frac{\rho_s}{\rho_p}\right) \sin 2\alpha$
- d) $\cos\beta = \left(1 - \frac{\rho_s}{\rho_p}\right) \cos\alpha$
- e) $\cos 2\beta = \left(1 + \frac{\rho_s}{\rho_p}\right) \sin 2\alpha$

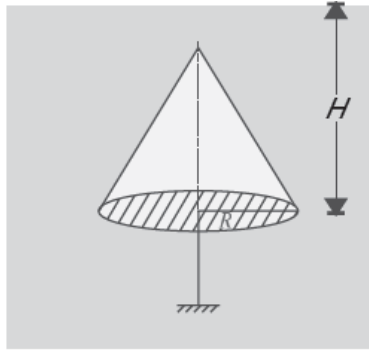
14. (PERU) O cilindro de raio R e geratriz L cobre completamente o buraco AB , impedindo que haja passagem de água. Em relação à força hidrostática, assinale a alternativa incorreta.



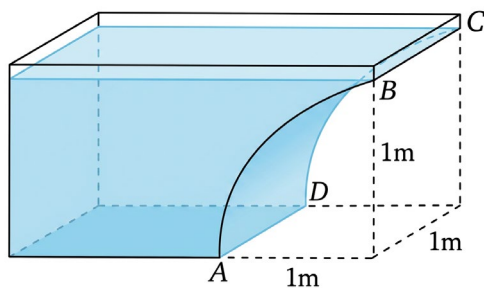
- a) $\frac{3}{2}\rho_{\text{água}}gR^2L$, na direção horizontal
- b) $0,5\rho_{\text{água}}gR^2L$, na direção vertical sobre a superfície BC
- c) $\rho_{\text{água}}gR^2L$, na direção vertical sobre o volume ADC
- d) $0,5\rho_{\text{água}}gR^2L$, na direção vertical para baixo
- e) $2\rho_{\text{água}}gR^2L$ horizontal sobre BC

15. (ÍNDIA) Um cone maciço de madeira está preso por um fio dentro da água, conforme mostrado na figura. O raio da base circular do cone é R e o volume do cone é v . Em equilíbrio, a base do cone encontra-se a uma profundidade H abaixo da superfície da água. A densidade da madeira é $d (< \rho$ densidade da água).

- a) Determine a tensão no fio.
- b) Determine a força exercida pela água sobre a superfície lateral do cone. Considere que a pressão atmosférica seja P_0 .

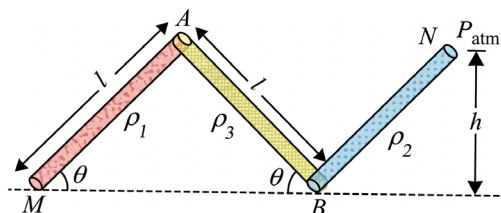


16. (PERU) O recipiente mostrado abaixo está cheio de água. Determine a força horizontal que exerce a água sobre a superfície $ABCD$ (parte de um cilindro) ($g = 10 \text{ m/s}^2$).

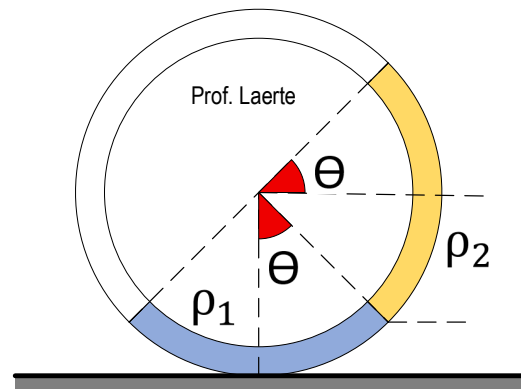


- a) 2000 N
- b) 3000 N
- c) 4000 N
- d) 5000 N
- e) 7850 N

17. (RÚSSIA) Encontre o ângulo θ . O tubo em Zig-Zag é aberto em N, têm líquidos de densidades ρ_1 , ρ_2 e ρ_3 e está disposto em um plano vertical. Além disso, a pressão em M é igual à pressão atmosférica.



18. (RÚSSIA) Um tubo circular de seção uniforme é completamente cheio com dois líquidos de densidade ρ_2 e ρ_1 . Cada líquido ocupa um quarto do tubo. Se a linha que delimita a superfície livre dos líquidos forma um ângulo θ com a horizontal, encontre o valor de θ .



19. (Prof. Laerte) Um engenheiro analisa duas barragens que represam água em lagos com características diferentes:

- **Lago A:** extenso e raso, com profundidade máxima de 3,0 m junto à barragem.
- **Lago B:** menos extenso, porém mais profundo, com profundidade máxima de 6,0 m junto à barragem.

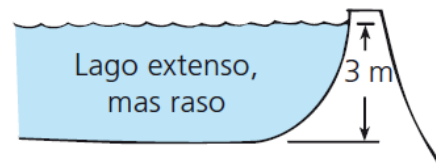


Figura A

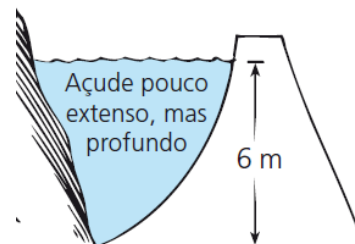


Figura B

Em ambos os casos, considere que:

- a superfície da água está em contato com a atmosfera;
- a densidade da água é $\rho = 1,0 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$;
- a aceleração da gravidade é $g = 10 \text{ m/s}^2$;

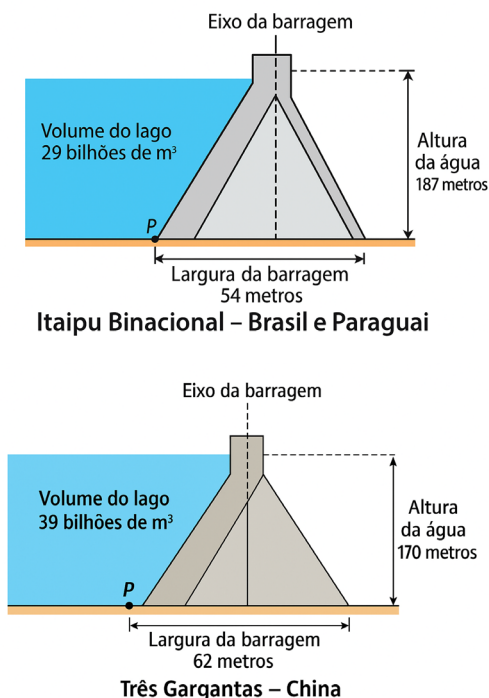
- as barragens têm paredes retilíneas e verticais com **10 m de largura** (perpendicular ao plano da figura);
- a água encosta na barragem desde a superfície até a profundidade máxima.

A diferença de pressão entre a superfície e um ponto a profundidade h num líquido em repouso é dada por $\Delta p = \rho gh$. A força resultante da água sobre uma superfície plana vertical pode ser estimada por $F = p_{\text{média}}A$, em que $p_{\text{média}}$ é a pressão média da água nessa superfície e A é a área da parte da barragem em contato com a água.

Considerando essas informações, a razão entre as forças resultantes exercidas pela água nas barragens dos lagos B e A, F_B/F_A , é igual a

- 1
- 2
- 3
- 4
- 6

20. (Prof. Laerte) O esquema a seguir foi elaborado com base em algumas medidas de duas gigantes na produção de energia hidrelétrica.



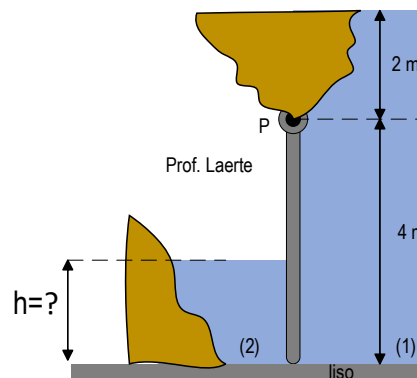
O volume de água no lago e o desnível do rio devem determinar o nível de segurança na barragem através de suas medidas.

De acordo com o senso comum, desprezando a pressão atmosférica, a pressão da água na base da barragem (ponto de referência P) deveria ser maior na

usina de Três Gargantas, devido ao peso da água do lago. A análise científica dos dados da ilustração, por sua vez:

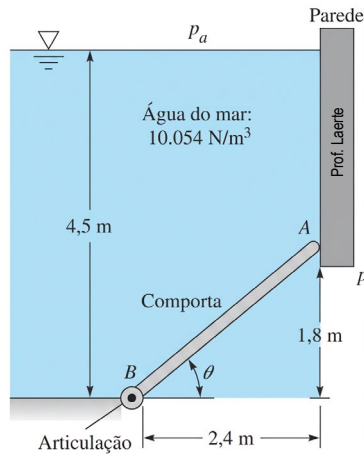
- confirma essa hipótese, chegando à conclusão de que a pressão no ponto P em Três Gargantas é 17% maior que em Itaipu.
- refuta essa hipótese, chegando à conclusão de que a pressão no ponto P em Itaipu é 10% maior que em Três Gargantas.
- confirma essa hipótese, chegando à conclusão de que a pressão no ponto P em Três Gargantas é 48% maior que em Itaipu.
- confirma essa hipótese, chegando à conclusão de que a pressão no ponto P em Três Gargantas é 29% maior que em Itaipu.
- refuta essa hipótese, chegando à conclusão de que a pressão no ponto P em Itaipu é 26% maior que em Três Gargantas.

21. (PERU) Uma comporta está separando dois líquidos na posição vertical, como é mostrado na figura abaixo. Determine a que altura se encontra o nível do líquido (2), de tal maneira que a comporta não se abra. Considere: $\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{28}{5}$.

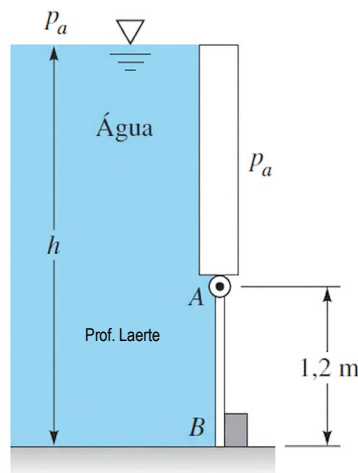


- 4,8 m
- 4 m
- 3 m
- 2 m
- 1 m

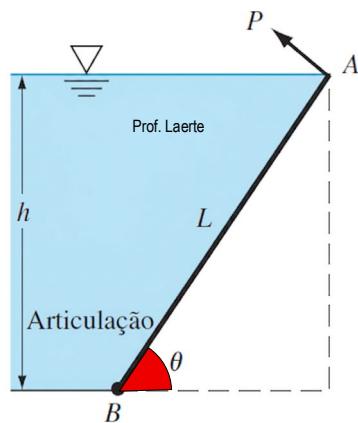
22. A comporta na Figura tem 1,5 m de largura, está articulada no ponto B e se apoia sobre uma parede lisa no ponto A. Calcule (a) a força na comporta decorrente da pressão da água do mar, (b) a força horizontal P exercida pela parede no ponto A.



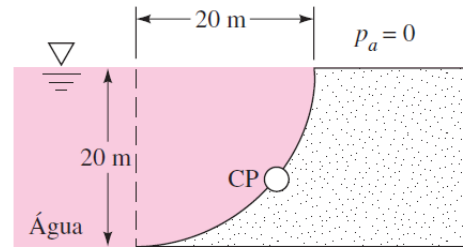
23. A comporta AB na Figura tem 1,5 m de largura, está articulada em A e limitada por um limitador em B. A água está a 20°C . Calcule a força no limitador B.



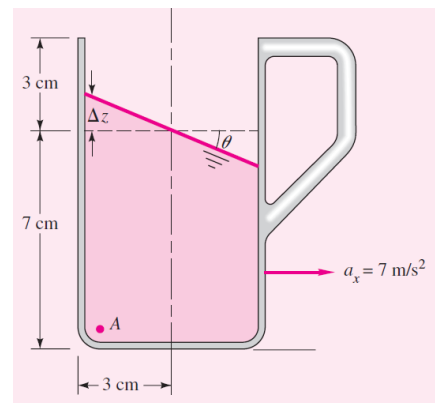
24. A comporta AB tem comprimento L e largura b , está articulada em B e tem peso desprezível. O nível h do líquido permanece no topo da comporta para qualquer ângulo θ . Encontre uma expressão analítica para a força P , perpendicular a AB, necessária para manter a comporta em equilíbrio na Figura.



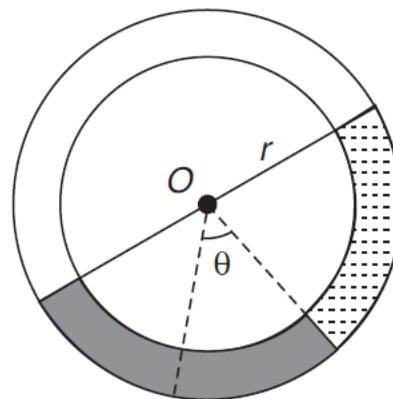
25. A barragem na Figura é um quarto de círculo com largura de 50 m. Determine os componentes horizontal e vertical da força hidrostática contra a barragem e o ponto CP em que a resultante atinge a barragem.



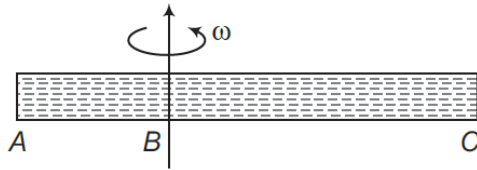
26. Um piloto de corridas de *dragster* coloca sua caneca de café sobre uma bandeja horizontal, enquanto ele acelera a 7 m/s^2 . A caneca tem 10 cm de altura e 6 cm de diâmetro e contém café até uma altura de 7 cm quando em repouso. Admitindo o café em aceleração de corpo rígido, determine se ele irá ou não transbordar da caneca, se a massa específica do café for 1.010 kg/m^3 .



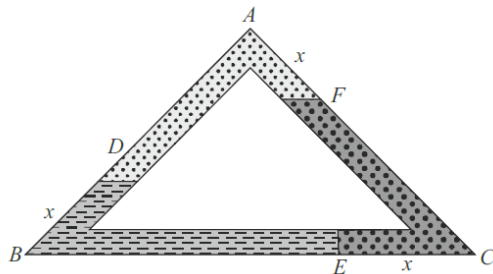
27. (ÍNDIA) Um pequeno tubo uniforme é curvado na forma de um círculo de raio r , cujo plano é vertical. Volumes iguais de dois fluidos, cujas massas específicas são ρ e σ ($\rho > \sigma$), preenchem metade do círculo. Determine o ângulo que o raio que passa pela interface forma com a vertical.



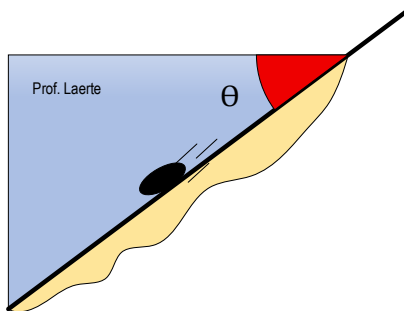
28. (ÍNDIA) Um tubo fechado está cheio de água ($\rho = 10^3 \text{ kg/m}^3$). Ele está girando em torno de um eixo mostrado na figura, com uma velocidade angular $\omega = 2 \text{ rad/s}$. Determine $p_A - p_C$.



29. (ÍNDIA) Um tubo fechado, na forma de um triângulo equilátero de lado l , contém volumes iguais de três líquidos que não se misturam e é colocado verticalmente, com seu lado inferior na posição horizontal. Determine o valor de x na Figura, sabendo que as massas específicas dos líquidos estão em progressão aritmética.

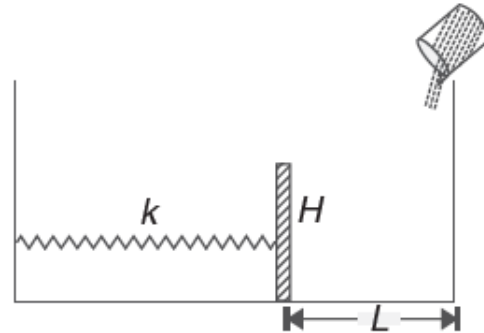


30. (PERU) Uma partícula de densidade ρ desce pelas paredes inclinadas de um recipiente que contém um líquido de densidade ρ_L . Encontre a aceleração de descida da partícula, considerando um coeficiente de atrito cinético μ entre o plano inclinado molhado e a partícula.

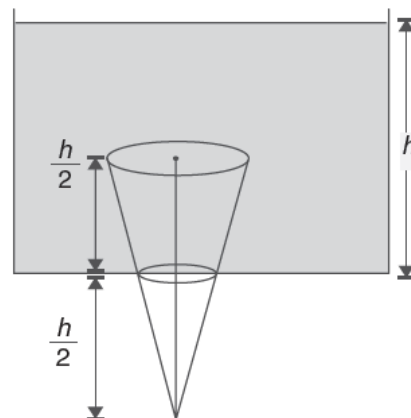


31. (ÍNDIA) Um recipiente grande possui uma parede vertical deslizante de altura H , que o divide em duas partes. A parede divisória está conectada à parede esquerda do recipiente por uma mola ideal de constante elástica k . Quando a mola está relaxada, as dimensões do piso da parte direita são $L \times b$. Agora, água, de massa específica ρ , é lentamente despejada na câmara direita. Qual é o volume máximo de água que pode ser armazenado na câmara direita

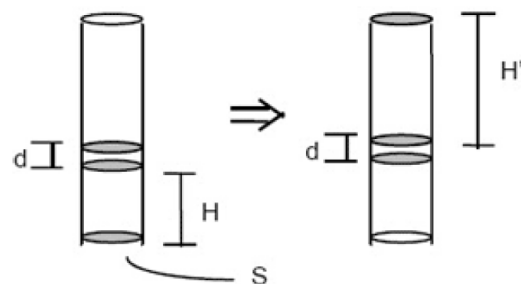
sem que ela transborde para a outra parte? A parede divisória desliza sem atrito.



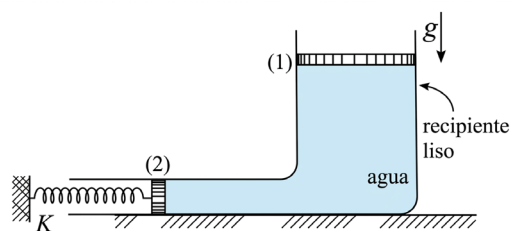
32. (ÍNDIA) Um tanque de água possui um orifício circular em sua base. Um cone sólido é utilizado para tampar o orifício. Exatamente metade da altura do cone fica para fora do orifício. O tanque é preenchido com água até uma altura igual à altura do cone. Calcule a força de empuxo sobre o cone. A massa específica da água é ρ e o volume do cone é V .



33. (ITA) Um tubo vertical de seção S , fechado em uma extremidade, contém um gás, separado da atmosfera por um êmbolo de espessura d e massa específica ρ . O gás, suposto perfeito, está à temperatura ambiente e ocupa um volume $V = SH$ (veja figura). Virando o tubo tal que a abertura fique voltada para baixo, o êmbolo desce e o gás ocupa um novo volume, $V = SH'$. Denotando a pressão atmosférica por P_0 , qual é a nova altura H ?

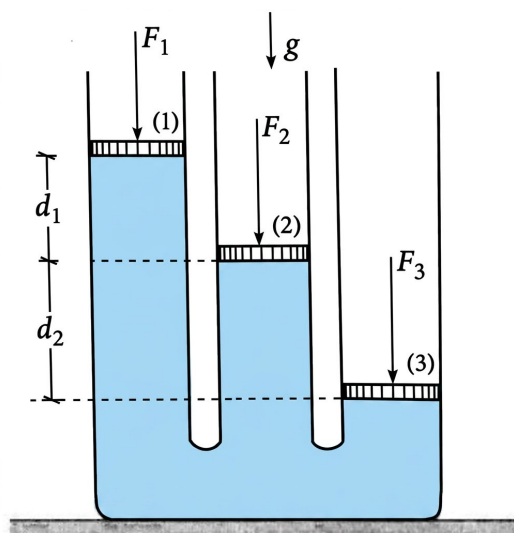


34. (PERU) O sistema mostrado a seguir está em repouso. Que valor deve ter a força vertical exercida sobre êmbolo (1) para que a mola se comprima 1 cm a mais. Considere $A_1 = 10 \cdot A_2 = 10 \text{ m}^2$ e $K = 10 \text{ N/m}$.



- a) 1 N b) 50,5 N c) 100 N d) 101 N e) 110 N

35. (PERU) Três êmbolos de massa desprezíveis e de área A_1 , A_2 e A_3 , respectivamente, descansam sobre a superfície de um líquido de densidade ρ . Determine d_1 e d_2 . Despreze todos os atritos.



- a) $\frac{1}{\rho g} \left(\frac{F_2}{A_2} - \frac{F_1}{A_1} \right); \frac{1}{\rho g} \left(\frac{F_3}{A_3} - \frac{F_2}{A_2} \right)$
 b) $\frac{1}{\rho g} \left(\frac{F_2}{A_2} - \frac{F_3}{A_3} \right); \frac{1}{\rho g} \left(\frac{F_1}{A_1} \right)$
 c) $\frac{1}{\rho g} (F_1 + F_2); \frac{1}{\rho g} (F_2 + F_3)$
 d) $\frac{1}{\rho g} \left(\frac{F_1}{A_1} - \frac{F_2}{A_2} \right); \frac{1}{\rho g} \left(\frac{F_3}{A_3} - \frac{F_2}{A_2} \right)$
 e) $\frac{1}{\rho g} \left(\frac{F_3}{A_3} + \frac{F_1}{A_1} \right); \frac{1}{\rho g} \left(\frac{F_3}{A_3} - \frac{F_2}{A_2} \right)$

GABARITO

1. A

2. E

3. Resolução DO PROF LAERTE

O ar ao redor de nós exerce pressão em **todas as direções**. Essa pressão é chamada de **pressão atmosférica**:

$$p_{\text{atm}} \approx 1,0 \times 10^5 \text{ Pa}$$

Isso significa que o ar empurra com **100.000 N** para cada metro quadrado de superfície.

Calculando a força do ar sobre o jornal

O jornal tem área de $0,5 \text{ m}^2$. A força do ar empurrando o jornal **para baixo** é:

$$F = p_{\text{atm}} \times A$$

$$F = 1,0 \times 10^5 \times 0,5$$

$$F = 50,000 \text{ N} = 5 \text{ toneladas-força!}$$

O ar empurra o jornal com uma força equivalente ao peso de **5 toneladas**.

Por que o golpe rápido é importante?

Aqui está o ponto-chave:

- Se você levantar a régua **devagar**, o ar tem tempo de entrar por baixo do jornal, equalizando a pressão em cima e embaixo → a força resultante é zero → o jornal sobe junto.
- Se você der um golpe **rápido**, o ar **não tem tempo de entrar** por baixo do jornal. Por uma fração de segundo, a pressão abaixo do jornal é muito menor que a pressão acima → há uma enorme força empurrando o jornal **para baixo** → a régua não consegue levantar o jornal e **quebra**.

Analisando cada alternativa

Alternativa	Análise
A	Errada. O peso do jornal é desprezível, o enunciado diz isso.
B	Errada. A pressão age em cima e em baixo; a diferença é que o golpe rápido impede a equalização.
C ☒	Correta. A grande área → grande força do ar → jornal resiste ao movimento rápido → régua quebra.
D	Errada. O golpe não diminui a pressão sob o jornal; ele impede

	que o ar entre por baixo rapidamente.
E	Errada. Não se forma vácuo perfeito; apenas há uma diferença de pressão momentânea.

Resposta correta

Alternativa C

4. O sangue é um fluido que circula pelo corpo. Assim como a água em uma caixa d'água, **quanto mais fundo, maior a pressão**. A pergunta é: qual a diferença de pressão entre o sangue nos **pés** e o sangue no **topo da cabeça**?

A fórmula que vamos usar

Em qualquer fluido, a diferença de pressão entre dois pontos separados por uma altura h é:

$$\Delta p = \rho \cdot g \cdot h$$

Onde:

- ρ = densidade do fluido
- g = aceleração gravitacional
- h = diferença de altura entre os dois pontos

Calculando

$$\Delta p = \rho \cdot g \cdot h$$

$$\Delta p = 1,0 \times 10^3 \cdot 10 \cdot 1,65$$

Passo a passo:

$$10^3 \cdot 10 = 10^4$$

$$\Delta p = 10^4 \cdot 1,65 = 1,65 \times 10^4 \text{ Pa}$$

$$\Delta p \approx 1,6 \times 10^4 \text{ Pa}$$

Resposta: Alternativa C

$$\Delta p \approx 1,6 \times 10^4 \text{ Pa}$$

Curiosidade médica

Na prática, essa diferença de $1,6 \times 10^4$ Pa equivale a cerca de **120 mmHg**, que é exatamente a pressão sistólica (máxima) considerada normal em adultos. Por isso, a pressão sanguínea medida nos pés é significativamente maior que a medida no braço, e os médicos fazem questão de medir a pressão sempre

na **mesma altura** do coração para ter resultados padronizados.

5. Resolução comentada

Relação entre força e pressão

A força sobre o tímpano é dada por:

$$F = p \cdot A$$

onde:

- p é a diferença de pressão (em relação à atmosférica);
- A é a área da membrana.

O enunciado diz: risco de lesão quando a **força adicional** é 1,5 N. Então:

$$\Delta p \cdot A = 1,5 \text{ N} \Rightarrow \Delta p = \frac{1,5}{A}$$

Mas essa diferença de pressão vem da coluna de água:

$$\Delta p = \rho \cdot g \cdot h$$

Portanto:

$$\rho g h = \frac{1,5}{A} \Rightarrow h = \frac{1,5}{\rho g A}$$

Vamos achar A .

Área do tímpano

O tímpano é aproximado por um círculo de diâmetro $d = 8,2 \text{ mm}$.

Primeiro, converter para metros e achar o raio:

$$d = 8,2 \text{ mm} = 8,2 \times 10^{-3} \text{ m}$$

$$r = \frac{d}{2} = \frac{8,2 \times 10^{-3}}{2} = 4,1 \times 10^{-3} \text{ m}$$

Área do círculo:

$$A = \pi r^2 \approx 3,14 \cdot (4,1 \times 10^{-3})^2$$

$$(4,1)^2 = 16,81 \Rightarrow r^2 = 16,81 \times 10^{-6} \text{ m}^2$$

$$A \approx 3,14 \cdot 16,81 \times 10^{-6}$$

$$3,14 \cdot 16,81 \approx 52,8$$

$$A \approx 52,8 \times 10^{-6} \text{ m}^2 = 5,28 \times 10^{-5} \text{ m}^2$$

Encontrando a profundidade

Use:

$$h = \frac{1,5}{\rho g A}$$

$$\rho g = 1,0 \times 10^3 \cdot 10 = 1,0 \times 10^4$$

$$\rho g A = 1,0 \times 10^4 \cdot 5,28 \times 10^{-5}$$

Multiplicando as potências de 10:

$$10^4 \cdot 10^{-5} = 10^{-1} = 0,1$$

$$\rho g A = 5,28 \cdot 0,1 = 0,528 \text{ (unidade: N/m}^3 \cdot \text{m}^2 = \text{N/m)}$$

Agora:

$$h = \frac{1,5}{0,528} \approx 2,84 \text{ m}$$

O valor está mais próximo de **3 m**, mas entre as alternativas dadas, o valor mais próximo é:

$$\boxed{2,0 \text{ m}}$$

Então, a alternativa correta é:

B) 2,0

(Num ENEM real, os números seriam ajustados para que a alternativa correta ficasse bem próxima de 2,8 m; aqui escolhemos 2,0 m como a mais próxima dentre as oferecidas.)

6. C

7. C

8. D

9. B

10. Resolução:

$$\text{a) } E = \mu_{\text{liq}} \cdot Vg \Rightarrow$$

$$E = 1,0 \cdot 10^3 \cdot 1,0 \cdot 10^{-3} \cdot 10 \text{ (N)}$$

$$\boxed{E = 10 \text{ N}}$$

$$\text{b) } F_e \cdot 40 = T \cdot 80 \Rightarrow F_e = 2(P - E)$$

$$K\Delta x = 2(\mu_{\text{Fe}}Vg - E)$$

$$2,8 \cdot 10^3 \Delta x = 2(8 \cdot 0 \cdot 10^3 \cdot 10 \cdot 10^{-3} \cdot 10 - 10)$$

$$\boxed{\Delta x = 5,0 \cdot 10^{-2} \text{ m} = 5,0 \text{ cm}}$$

11. Resolução:

Para que o gelo permaneça em equilíbrio, flutuando na água, seu peso deve ter módulo igual ao do empuxo recebido pela fração imersa de seu volume. Assim:

$$m_G g = \mu_A V_i g \Rightarrow m_G = \mu_A V_i \text{ (I)}$$

Para que a água proveniente da fusão do gelo permaneça em equilíbrio, seu peso deve ter módulo igual ao do empuxo recebido. Assim:

$$m_A g = \mu_A V_A g \Rightarrow m_A = \mu_A V_A \text{ (II)}$$

Considerando, entretanto, a conservação da massa do gelo que se funde, podemos escrever:

$$m_A = m_G$$

Portanto, de (I) e (II), vem:

$$\mu_A V_A = \mu_A V_i \Rightarrow \boxed{V_A = V_i}$$

Temos, então, que o volume de água proveniente da fusão do gelo (V_A) é igual ao volume da fração do gelo imersa inicialmente na água (V_i). Assim, se o volume de água deslocado pelo gelo e pela água oriunda de sua fusão é o mesmo, podemos afirmar que o nível da água no recipiente não se alterará.

12. Resolução:

Inicialmente, a mola acha-se comprimida porque o gelo, que é menos denso que a água, tende a subir, buscando emergir parcialmente. Após a fusão do gelo, no entanto, a força de compressão sobre a mola desaparece e esta se alonga, recobrando seu comprimento natural.

B

13. Resolução:

(I) Cálculo da gravidade aparente no movimento do projétil no interior do superfluido:

$$mg_{\text{ap}} = P - E$$

$$\rho_p V g_{\text{ap}} = \rho_p V g - \rho_s V g$$

Onde:

$$\text{(I) } g_{\text{ap}} = \left(1 - \frac{\rho_s}{\rho_p}\right) g$$

(II) Do movimento balístico:

$$A = \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{g}$$

Como $A_2 = A_1$:

$$\frac{v_0^2 \sin 2\beta}{g_{ap}} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$$

$$(II) \quad \sin 2\beta = \frac{g_{ap}}{g} \sin 2\alpha$$

Substituindo (I) em (II):

$$\sin 2\beta = \frac{\left(1 - \frac{\rho_s}{\rho_p}\right) g}{g} \sin 2\alpha$$

Onde:

$$\sin 2\beta = \left(1 - \frac{\rho_s}{\rho_p}\right) \sin 2\alpha$$

Resposta: b

14. RESOLUÇÃO:

Para cálculo da força horizontal, podemos analisar a pressão exercida somente sobre a seção AC. Para isso, a área afetada é a área da seção AC, e a pressão utilizada para cálculo será a média da máxima e mínima.

Neste caso, para o lado esquerdo do cilindro:

$$\rho_{\max} = \rho \cdot g \cdot 2R$$

$$\rho_{\min} = 0$$

$$\rho_{\text{médio}} = \rho \cdot g \cdot R$$

$$A_{\text{seção}} = 2 \cdot R \cdot L$$

A força horizontal sobre o lado esquerdo é de:

$$F_{x_{ADC}} = 2 \cdot \rho \cdot g \cdot R^2 \cdot L$$

Para o lado direito:

$$F_{BC} = \left(\frac{0 + \rho \cdot g \cdot R}{2}\right) \cdot R \cdot L$$

$$F_{x_{BC}} = \frac{\rho \cdot g \cdot R^2 \cdot L}{2}$$

Para o cálculo das forças verticais:

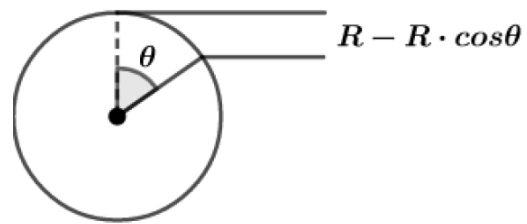
- ADC é considerado completamente submerso, portanto, basta calcular o empuxo daquele volume. (A força está para cima.)

$$F_{y_{ADC}} = \rho \cdot \frac{\pi \cdot R^2 \cdot L}{2} \cdot g$$

Resta descobrir a força vertical hidrostática sobre BC. Pode-se calculá-la pela integral abaixo:

$$F_{BC} = \int P \cdot dA$$

No caso, P é a pressão sobre a área infinitesimal. É necessário colocar tudo em função de uma só variável. Fazemos isso com θ representado abaixo:



Portanto:

$$P(\theta) = \rho \cdot g \cdot R \cdot (1 - \cos \theta)$$

A área é dada por:

$$dA(\theta) = R \cdot d\theta \cdot L$$

Como deseja-se somente a componente vertical:

$$F_{y_{BC}} = \int P \cdot dA \cdot \cos \theta$$

$$F_{y_{BC}} = \int \rho \cdot g \cdot R \cdot (1 - \cos \theta) \cdot R \cdot L \cdot \cos \theta \cdot d\theta$$

$$F_{y_{BC}} = \rho \cdot g \cdot R^2 \cdot L \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos \theta - \cos^2 \theta) \cdot d\theta$$

$$F_{y_{BC}} = \rho \cdot g \cdot R^2 \cdot L \cdot \left(\left(\sin \theta - \frac{\frac{\sin 2\theta}{2} + \theta}{2} \right) \right)_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$F_{yBC} = \rho \cdot g \cdot R^2 \cdot L \cdot \left(1 - \frac{\pi}{4}\right)$$

OBS.: De outra maneira, pode-se calcular a força vertical em BC como sendo a força causada pelo peso da água acima da face. Portanto:

$$F_{yBC} = \rho \cdot g \cdot L \cdot \left(R^2 - \frac{\pi R^2}{4}\right)$$

Gabarito: A

15. a) A força de empuxo é:

$$F_B = v\rho g$$

O peso do cone é:

$$W = vdg$$

Portanto, a tensão no fio é:

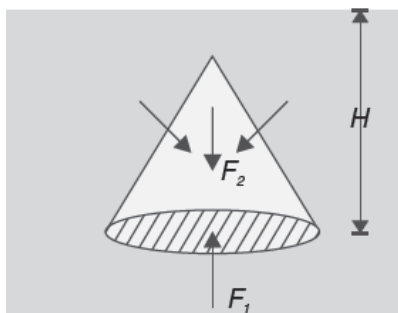
$$T = W - F_B = vg(d - \rho)$$

b)

$$F_B = v\rho g$$

O empuxo é a resultante da força vertical dirigida para cima (F_1), exercida pela pressão da água sobre a base do cone, e da força vertical dirigida para baixo (F_2), exercida pela água sobre a superfície lateral inclinada.

[A componente horizontal dessa força resulta em zero devido à simetria.]



$$\therefore F_1 - F_2 = F_B$$

$$\pi R^2 \cdot [p_0 + \rho g H] - F_2 = v\rho g$$

Portanto:

$$F_2 = \pi R^2 [p_0 + \rho g H] - v\rho g$$

16. Resolução:

A força horizontal será:

$$F_x = P_{\text{médio}} \cdot A_{\text{perpendicular}} \Rightarrow F_x = \frac{\rho \cdot g \cdot 1 + 0}{2} \cdot 1$$

$$F_x = \frac{10^4}{2} = 5000 \text{ N}$$

Gabarito: D

17. Resolução:

A pressão nos pontos A e B são dadas por:

$$P_A = P_{\text{atm}} - \rho_1 \cdot (l \cdot \sin\theta) \cdot g$$

$$P_B = P_{\text{atm}} + \rho_2 \cdot h \cdot g$$

Temos a seguinte relação entre as pressões:

$$P_B = P_A + \rho_3 \cdot (l \cdot \sin\theta) \cdot g$$

Substituindo, temos:

$$P_{\text{atm}} + \rho_2 \cdot h \cdot g = P_{\text{atm}} - \rho_1 \cdot l \sin\theta \cdot g + \rho_3 \cdot l \sin\theta \cdot g$$

$$\sin\theta = \frac{\rho_2 \cdot h}{(\rho_3 - \rho_1) \cdot l}$$

18. Primeiramente, iremos calcular a pressão no ponto 1 devido ao líquido de densidade ρ_1 .

$$P_1 = \rho_1 \cdot g \cdot h_1$$

A pressão no ponto 1 devido ao líquido de densidade ρ_2 é:

$$P_1 = \rho_1 \cdot g \cdot h_2 + \rho_2 \cdot g \cdot h'_2$$

Igualando as duas expressões:

$$\rho_1 \cdot h_1 = \rho_1 \cdot h_2 + \rho_2 \cdot h'_2$$

Da geometria do problema:

$$h'_2 = R \cdot \sin\theta + R \cdot \cos\theta$$

$$h_2 = R \cdot (1 - \cos\theta)$$

$$h_1 = R \cdot (1 - \sin\theta)$$

Substituindo:

$$\rho_1 \cdot R \cdot (1 - \sin\theta) = \rho_1 \cdot R \cdot (1 - \cos\theta) + \rho_2 \cdot R \cdot \sin\theta + R \cdot \rho_2 \cdot \cos\theta$$

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1 + \rho_2}$$

19. Resolução do prof. Laerte:

Para uma parede vertical cuja parte submersa vai da superfície até profundidade máxima H :

- A pressão varia linearmente de 0 (na superfície, considerando só a parte hidrostática) até $\rho g H$ no fundo.
- A **pressão média** nessa parede é a média aritmética entre esses valores:

$$p_{\text{média}} = \frac{0 + \rho g H}{2} = \frac{\rho g H}{2}.$$

Área molhada da barragem

Cada barragem tem:

- altura igual à profundidade máxima H ;
- largura $L = 10$ m.

Logo, a área em contato com a água é

$$A = H \cdot L.$$

Força resultante na barragem

Usando $F = p_{\text{média}} A$:

$$F = \left(\frac{\rho g H}{2} \right) \cdot (HL) = \frac{\rho g L}{2} H^2.$$

Repare que ρ , g e L são iguais nos dois casos. Assim,

$$F \propto H^2.$$

Logo, a razão entre as forças é

$$\frac{F_B}{F_A} = \left(\frac{H_B}{H_A} \right)^2.$$

Dados:

- Lago A: $H_A = 3,0$ m;
- Lago B: $H_B = 6,0$ m.

$$\frac{F_B}{F_A} = \left(\frac{6,0}{3,0} \right)^2 = (2)^2 = 4.$$

Resposta

$$\frac{F_B}{F_A} = 4$$

Alternativa correta: **D) 4.**

20. A pressão no ponto P , nos dois casos, pode ser calculada, em unidades do SI, por:

$$p_{\text{It}} = \mu g h = 187 \mu g$$

$$p_{\text{TG}} = \mu g h = 170 \mu g$$

Portanto, a relação entre as pressões nesse ponto, para as duas usinas, é dada por:

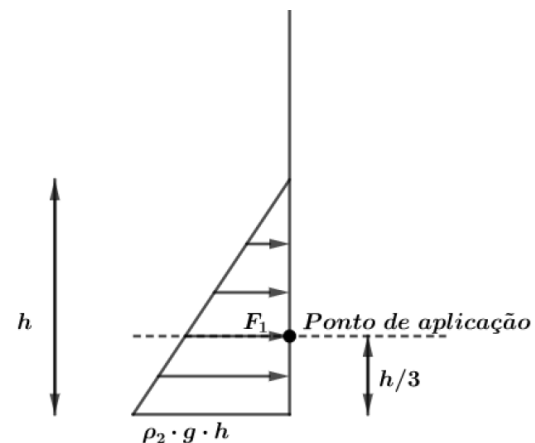
$$\frac{p_{\text{It}}}{p_{\text{TG}}} = \frac{187 \mu g}{170 \mu g} \Rightarrow p_{\text{It}} = 1,1 p_{\text{TG}}$$

Ou seja, a pressão no ponto P da usina de Itaipu é 10% maior que no ponto P da usina Três Gargantas.

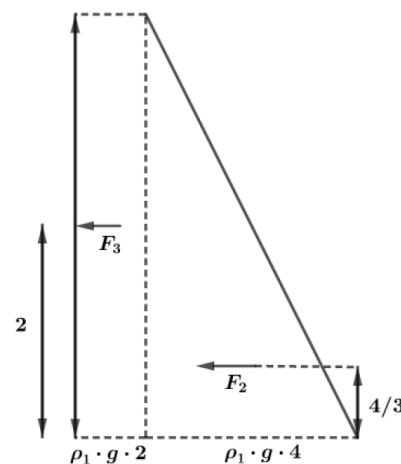
Alternativa b.

21. Resolução do prof. Laerte:

A comporta está em equilíbrio rotacional. Para achar o ponto de aplicação das forças por conta da pressão:



Lado esquerdo



Lado direito

Para o lado do líquido 2, a pressão cresce linearmente, formando um triângulo. Portanto, o centro de pressão está sobre o CG da figura, ou seja, $\frac{h}{3}$ acima do fundo. Para o centro de pressão do líquido 1, quebra-se o trapézio formado pela pressão em um retângulo e um triângulo, trabalhando com uma soma de forças, cada uma atuando sobre o CG de sua respectiva figura. Dessa forma, aplicando-se a pressão sobre os pontos marcados:

$$F_1 = \frac{1}{2} \cdot \rho_2 \cdot g \cdot h \cdot A_1$$

$$F_2 = \rho_1 \cdot g \cdot \frac{0 + 4}{2} = \rho_1 \cdot g \cdot 2 \cdot A_2$$

$$F_3 = \rho_1 \cdot g \cdot 2 \cdot A_3$$

Em que A_1 , A_2 e A_3 são as áreas da comporta atingidas pelas pressões 1, 2 e 3. Pelo equilíbrio rotacional da placa:

$$F_1 \cdot \left(4 - \frac{h}{3}\right) = F_2 \cdot \left(\frac{8}{3}\right) + F_3 \cdot (2)$$

E, com:

$$\rho_2 = \rho_1 \cdot \frac{28}{5}$$

E:

$$A_1 = h \cdot L \Rightarrow A_2 = A_3 = 4 \cdot L$$

Assim, substituindo:

$$\frac{14}{5} \cdot \rho_1 \cdot g \cdot h \cdot h \cdot L \cdot \left(4 - \frac{h}{3}\right) = \rho_1 \cdot g \cdot 2 \cdot 4 \cdot L \cdot \frac{8}{3} + \rho_1 \cdot g \cdot 2 \cdot 4 \cdot L \cdot 2$$

$$\frac{56h^2}{15} \cdot \frac{14 - h}{3} = \frac{64}{3} + 16$$

$$14 \cdot h^3 - 168 \cdot h^2 + 560 = 0$$

$$h^3 - 12 \cdot h^2 + 40 = 0$$

Por exploração, $h = 2$ é raiz. (Pode-se aplicar teorema das raízes racionais, chutes, ou aplicar as opções da questão.) Portanto, fatorando:

$$(h - 2)(h^2 - 10 \cdot h - 20) = 0$$

As outras raízes são:

$$h = \frac{10 \pm \sqrt{100 + 80}}{2} = 5 \pm 3\sqrt{5}$$

Uma delas é negativa, portanto não convém; a outra é maior que o permitido pelo problema ($h \leq 4$).

Gabarito: D

22. a) Por geometria a comporta tem 3,0 m de comprimento de A até B, e seu centroide está a meia distância, isto é, a uma elevação 0,9 m acima do ponto B. A profundidade h_{CG} é, então, $4,5 - 0,9 = 3,6$ m. A área da comporta é $A = (1,5)(3) = 4,5 \text{ m}^2$. Desconsidere p_a , que estamos supondo sobre ambos os lados da comporta. A força hidrostática sobre a comporta é

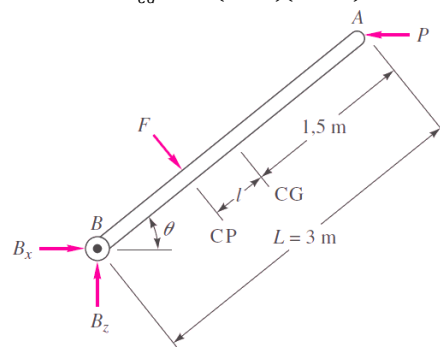
$$F = p_{CG}A = \gamma h_{CG}A = (10.054 \text{ N/m}^3)(3,6 \text{ m})(4,5 \text{ m}^2) = 162.875 \text{ N}$$

b) Primeiro, devemos encontrar o centro de pressão de F . Um diagrama de corpo livre da comporta é apresentado na Figura. A comporta é retangular, logo

$$I_{cy} = 0 \text{ e } I_{xx} = \frac{bL^3}{12} = \frac{(1,5 \text{ m})(3 \text{ m})^3}{12} = 3,375 \text{ m}^4$$

A distância l de CG até o CP é

$$l = -y_{CP} = + \frac{I_{xx} \sin \theta}{h_{CG}A} = \frac{(3,375 \text{ m}^4) \left(\frac{1,8}{3}\right)}{(3,6 \text{ m})(4,5 \text{ m}^2)} = 0,125 \text{ m}$$



23. A gente sabe que a profundidade de água é 2,85 m, então a profundidade que o centroide está é em

$$h_{CG} = 2,85 + (0,6) - 1,2 = 2,25 \text{ m.}$$

A força hidrostática total que atua na comporta será dada por:

$$F = \rho_{\text{água}} g h_{CG} A_{\text{comporta}} = 979 \cdot 10,225 \cdot (1,2 \cdot 15) = 39649 \text{ N}$$

$$\sum M_A = B_x(1,2) - (39649)(0,654) = 0$$

$$B_x = 22685,93 \text{ N}$$

24. O centroide da comporta está a uma distância equivalente de $L/2$ do ponto A e uma profundidade equivalente $h/2$ abaixo da superfície, certo?

Então você vai concordar comigo também que, para qualquer que seja o ângulo, a força hidrostática pode ser escrita como sendo:

$$F = \rho \left(\frac{h}{2} \right) Lb$$

$$y_{cp} = \frac{L^2 \sin \theta}{6h}$$

Perceba também que o centro de pressão é dado então por $L/2 - y_{cp}$, partindo do ponto B. Somando então esses momentos, temos que:

$$\sum M_i = 0$$

$$PL = F \left(\frac{L}{2} - y_{cp} \right)$$

Resolvendo, temos então:

$$PL = \left(\rho \left(\frac{h}{2} \right) Lb \right) \left(\frac{L}{2} - \left(\frac{L^2 \sin \theta}{6h} \right) \right)$$

$$P = \left(\frac{\rho hb}{4} \right) \left(L - \frac{L^2 \sin \theta}{3h} \right)$$

25. A barragem é um **quarto de círculo** de raio

$$R = 20 \text{ m}$$

e largura

$$b = 50 \text{ m.}$$

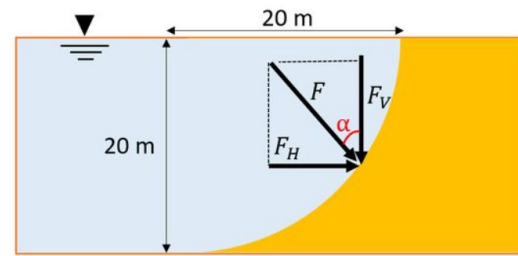
A água está à esquerda da superfície curva. Como $p_a = 0$, podemos trabalhar diretamente com a pressão manométrica:

$$p = \rho gh$$

com

$$\rho = 1000 \text{ kg/m}^3, g = 9,81 \text{ m/s}^2.$$

O centro de curvatura O está no nível da superfície livre, conforme indicado pela linha tracejada.



Para superfícies curvas, a componente horizontal da força hidrostática é igual à força sobre a **projeção vertical** da superfície.

A projeção vertical da parte curva é um retângulo de:

- altura: 20 m;
- largura: 50 m.

Logo,

$$A_V = 20(50) = 1000 \text{ m}^2.$$

O centroide dessa projeção está na metade da altura, portanto a profundidade do centroide é

$$h_c = \frac{20}{2} = 10 \text{ m.}$$

A pressão no centroide é

$$p_c = \rho gh_c.$$

Assim,

$$p_c = (1000)(9,81)(10)$$

$$p_c = 98\,100 \text{ Pa.}$$

A componente horizontal é

$$F_H = p_c A_V.$$

Substituindo:

$$F_H = (98\,100)(1000)$$

$$F_H = 98\,100\,000 \text{ N.}$$

Portanto,

$$F_H = 98,1 \text{ MN}$$

ou, em quilonewtons,

$$F_H = 98\,100 \text{ kN}$$

com sentido **para a direita**.

Componente vertical da força

A componente vertical sobre uma superfície curva é igual ao **peso da coluna imaginária de água situada acima da superfície curva**.

Neste caso, o volume correspondente é um quarto de cilindro.

A área da seção transversal desse quarto de círculo é

$$A_{\text{quarto}} = \frac{\pi R^2}{4}.$$

Substituindo $R = 20 \text{ m}$:

$$A_{\text{quarto}} = \frac{\pi(20)^2}{4} = 100\pi \text{ m}^2.$$

O volume de água imaginário é

$$V = A_{\text{quarto}} b.$$

Logo,

$$V = (100\pi)(50)$$

$$V = 5000\pi \text{ m}^3.$$

O peso dessa água é

$$W = \rho g V.$$

Portanto,

$$F_V = W = (1000)(9,81)(5000\pi).$$

Calculando:

$$F_V \approx 154\,095\,000 \text{ N}.$$

Assim,

$$F_V = 154,1 \text{ MN}$$

ou

$$F_V = 154\,100 \text{ kN}.$$

O sentido é **para baixo**.

A força resultante é

$$F_R = \sqrt{F_H^2 + F_V^2}.$$

Usando os valores em MN:

$$F_R = \sqrt{(98,1)^2 + (154,1)^2}.$$

$$F_R \approx 182,7 \text{ MN}.$$

Portanto,

$$F_R \approx 182,7 \text{ MN}$$

ou

$$F_R \approx 182\,700 \text{ kN}.$$

A inclinação da resultante em relação à horizontal é dada por

$$\tan \theta = \frac{F_V}{F_H}.$$

Então,

$$\tan \theta = \frac{154,1}{98,1} \approx 1,5708.$$

Logo,

$$\theta = \tan^{-1}(1,5708)$$

$$\theta \approx 57,5^\circ$$

abaixo da horizontal.

Equivalentemente, a resultante faz um ângulo de aproximadamente

$$90^\circ - 57,5^\circ = 32,5^\circ$$

com a vertical.

Em cada ponto da superfície circular, a pressão hidrostática atua perpendicularmente à superfície. Como a superfície é circular, todas essas forças elementares passam pelo centro de curvatura O .

Consequentemente, a força resultante também passa por O .

Para encontrar onde a linha da resultante intercepta a barragem, usamos o triângulo formado pelas componentes:

$$\frac{y_{CP}}{x_{CP}} = \frac{F_V}{F_H}.$$

Como o ponto CP está sobre o círculo de raio $R = 20$ m,

$$x_{CP}^2 + y_{CP}^2 = R^2 = 400.$$

Podemos usar diretamente a direção da resultante:

$$x_{CP} = R \frac{F_H}{F_R}, \quad y_{CP} = R \frac{F_V}{F_R}.$$

Assim,

$$x_{CP} = 20 \frac{98,1}{182,7}$$

$$x_{CP} \approx 10,7 \text{ m}.$$

A coordenada vertical, medida para baixo a partir do centro O , é

$$y_{CP} = 20 \frac{154,1}{182,7}$$

$$y_{CP} \approx 16,9 \text{ m}.$$

Portanto, o ponto CP está:

- **10,7 m à direita** da linha vertical tracejada;
- **16,9 m abaixo** da superfície livre.

Como a superfície é um arco de raio 20 m, essas coordenadas satisfazem aproximadamente

$$(10,7)^2 + (16,9)^2 \approx 20^2.$$

Resposta final

$$F_H = 98,1 \text{ MN para a direita}$$

$$F_V = 154,1 \text{ MN para baixo}$$

$$F_R = 182,7 \text{ MN}$$

A resultante está inclinada de

$$57,5^\circ$$

abaixo da horizontal.

O ponto de aplicação CP está aproximadamente em

$$x_{CP} = 10,7 \text{ m}, \quad y_{CP} = 16,9 \text{ m}$$

medidos a partir do centro de curvatura indicado na figura.

26.

- **Hipóteses:** Aceleração horizontal de corpo rígido, $a_x = 7 \text{ m/s}^2$. Caneca de café simétrica.
- **Valores de propriedades:** Massa específica do café dada como 1.010 kg/m^3 .
- **Abordagem:** Determine o ângulo de inclinação com base em uma aceleração conhecida, depois determine a elevação da altura.

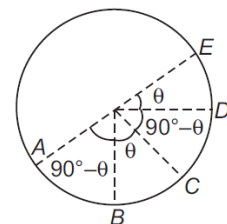
$$\theta = \tan^{-1} \frac{a_x}{g} = \tan^{-1} \frac{7,0 \text{ m/s}^2}{9,81 \text{ m/s}^2} = 35,5^\circ$$

Se a caneca é simétrica, a superfície inclinada passará pelo ponto central da posição de repouso, como mostra a Figura. Então o lado de trás da superfície livre do café subirá Δz dado por $\Delta z = (3 \text{ cm})(\tan 35,5^\circ) = 2,14 \text{ cm} < 3 \text{ cm}$ portanto não derramará Resposta (a)

- **Comentário:** Essa solução não considera a agitação, que pode ocorrer se a partida não for de modo uniforme.

27.

$$h_{AB} = r - r \cos(90^\circ - \theta) = r - r \sin \theta$$



$$h_{BC} = r - r \cos \theta$$

$$h_{CD} = r \sin(90^\circ - \theta) = r \cos \theta$$

$$h_{DE} = r \sin \theta$$

Escrevendo a equação da pressão entre os pontos A e E, temos:

$$p_A + (r - r \sin \theta) \rho g - (r - r \cos \theta) \rho g - (r \cos \theta) \sigma g - (r \sin \theta) \sigma g = p_E$$

Mas

$$p_A = p_E = p_{\text{gás}}$$

Resolvendo essa equação, obtemos:

$$\tan \theta = \left(\frac{\rho - \sigma}{\rho + \sigma} \right)$$

28. Solução

A pressão diminui ao se deslocar em direção ao eixo de rotação e aumenta ao se afastar do eixo:

$$\Delta p = \pm \frac{\rho \omega^2 x^2}{2}$$

Portanto,

$$p_A > p_B \text{ e } p_B < p_C$$

$$p_A - p_C = (p_A - p_B) + (p_B - p_C)$$

$$p_A - p_C = \left(+ \frac{\rho \omega^2 x_1^2}{2} \right) + \left(- \frac{\rho \omega^2 x_2^2}{2} \right)$$

Onde,

$$x_1 = AB = 2 \text{ m}$$

e

$$x_2 = BC = 4 \text{ m}$$

Substituindo os valores, temos:

$$p_A - p_C = \frac{(10^3)(2)^2(2)^2}{2} - \frac{(10^3)(2)^2(4)^2}{2}$$

$$p_A - p_C = -2,4 \times 10^3 \text{ N/m}^2$$

29. Usando a equação de Pascal, temos:

$$(l - x) \cdot 2 \rho g \sin 60^\circ + x 3 \rho g \sin 60^\circ$$

$$-(l - x) 3 \rho g \sin 60^\circ - x \rho g \sin 60^\circ = 0$$

$$2(l - x) + 3x - 3(l - x) - x = 0$$

$$3x = l$$

$$x = \frac{l}{3}$$

30. Eixo x: $\sum F = ma$

$$(W - E) \sin \theta - \mu N = ma \quad \dots (1)$$

Eixo y: $\sum F = 0$

$$N = (W - E) \cos \theta \quad \dots (2)$$

Substituindo (2) em (1):

$$(W - E) \sin \theta - \mu [(W - E) \cos \theta] = ma$$

$$(W - E) [\sin \theta - \mu \cos \theta] = ma \quad \dots (3)$$

Porém:

$$W = \rho g V$$

$$E = \rho_L g V_s$$

$$m = \rho V$$

Substituindo em (3):

$$(\rho g V - \rho_L g V_s) (\sin \theta - \mu \cos \theta) = (\rho V) a$$

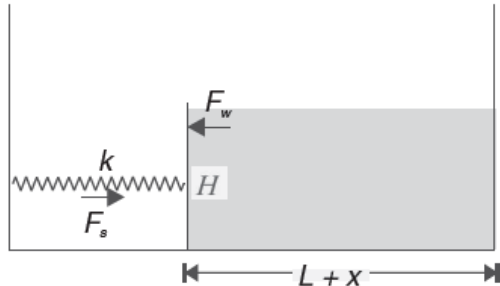
Além disso:

$$V_s = V \text{ (tudo está submerso)}$$

Portanto:

$$a = \frac{(\rho - \rho_L)g(\sin\theta - \mu \cos\theta)}{\rho}$$

31. Considere que a parede deslizante se desloca para a esquerda por uma distância x quando a água é colocada até a altura H na câmara direita.



A força exercida pela água sobre a parede móvel (F_w) deve ser igual à força da mola (F_s) nessa posição.

Para calcular a força exercida pela água sobre a parede, podemos considerar que a pressão média é

$$\frac{\rho g H}{2}.$$

Isso ocorre porque a pressão varia linearmente de zero até $\rho g H$ à medida que nos deslocamos da superfície da água até o fundo. Recomenda-se comprovar esse resultado realizando uma integração para calcular a força sobre a parede. Além disso, a pressão atmosférica não foi considerada, pois seu efeito atua em ambas as faces da parede.

$$\therefore F_w = \frac{\rho g H}{2} \cdot bH = \frac{\rho g b H^2}{2}$$

$$\therefore kx = \frac{\rho g b H^2}{2} \Rightarrow x = \frac{\rho g b H^2}{2k}$$

Volume de água:

$$V = Hb(L + x) = Hb \left(L + \frac{\rho g b H^2}{2k} \right)$$

32.

$$V = \text{volume do cone} = \frac{1}{3} \pi R^2 h$$

Volume da parte projetada para fora

$$V_{\text{out}} = \frac{1}{3} \pi \left(\frac{R}{2} \right)^2 \frac{h}{2} = \frac{V}{8}$$

$$\text{Volume do cone dentro da água } V_{\text{in}} = V - \frac{V}{8} = \frac{7V}{8}$$

Imagine que a parte do cone que se projeta através do orifício seja removida e que o espaço sob o recipiente seja preenchido com água. A força de empuxo seria, então:

$$F_0 = \rho g V_{\text{in}} = \frac{7V\rho g}{8}$$

Como não há água abaixo do orifício, falta uma contribuição igual a

$$\pi \left(\frac{R}{2} \right)^2 \rho g h$$

Portanto, a força de empuxo resultante é:

$$F = F_0 - \pi \frac{R^2}{4} \rho g h$$

$$F = \frac{7}{8} V \rho g - \frac{3V}{4} \rho g$$

$$F = \frac{V\rho g}{8}$$

33. Comentário:

A pressão inicial do gás é:

$$P_i = P_0 + \frac{\rho \cdot g \cdot S \cdot d}{S}$$

A pressão final do gás é:

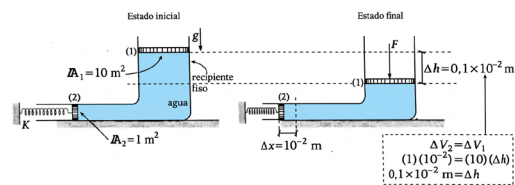
$$P_f = P_0 - \frac{\rho \cdot g \cdot S \cdot d}{S}$$

Considerando que houve uma transformação isotérmica entre a situação final e inicial,

$$P_i \cdot V = P_f \cdot V'$$

$$(P_0 + \rho \cdot g \cdot d) S \cdot H = (P_0 - \rho \cdot g \cdot d) \cdot S H'$$

$$H' = H \frac{P_0 + \rho \cdot g \cdot d}{P_0 - \rho \cdot g \cdot d}$$



Se a mola se comprime em mais 1 cm, o êmbolo 1 deve descer de Δh mantendo o volume do tubo.

Logo:

$$0,01 \cdot A_2 = \Delta h \cdot A_1 \Rightarrow \Delta h = 10^{-3}$$

Na situação inicial, o equilíbrio do êmbolo 2 é:

$$k \cdot \Delta x_1 = \rho \cdot g \cdot h$$

Após a aplicação da força:

$$k \cdot \Delta x_2 = \rho \cdot g \cdot (h - \Delta h) + \frac{F_y}{A_1}$$

A questão afirma que $\Delta x_2 - \Delta x_1 = 1 \text{ cm}$.

Subtraindo as equações:

$$k \cdot (\Delta x_2 - \Delta x_1) = -\rho \cdot g \cdot \Delta h + \frac{F_y}{A_1} \Rightarrow$$

$$10 \cdot 10^{-2} = -10^3 \cdot 10 \cdot 10^{-3} + \frac{F_y}{10}$$

$$10^{-1} + 10 = \frac{F_y}{10} \Rightarrow$$

$$F_y = 101 \text{ N}$$

$$\frac{F_3}{A_3} = \frac{F_2}{A_2} + \rho \cdot g \cdot d_2 \Rightarrow d_2 = \frac{1}{\rho \cdot g} \left(\frac{F_3}{A_3} - \frac{F_2}{A_2} \right)$$

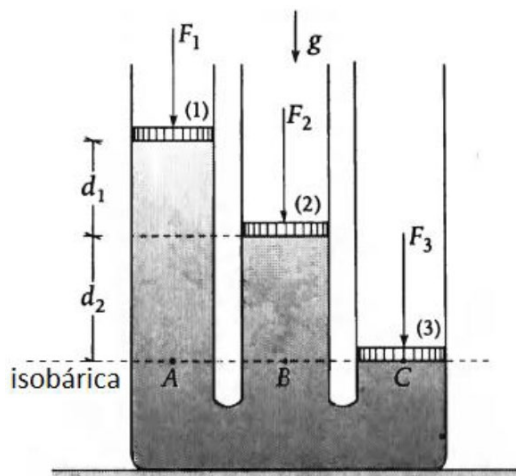
Pela segunda igualdade:

$$\frac{F_2}{A_2} = \frac{F_1}{A_1} + \rho \cdot g \cdot d_1 \Rightarrow d_1 = \frac{1}{\rho \cdot g} \left(\frac{F_2}{A_2} - \frac{F_1}{A_1} \right)$$

Gabarito: A

Gabarito: D

35. Traçando-se uma isobárica rente ao êmbolo 3:



$$\frac{F_3}{A_3} + p_{atm} = \frac{F_2}{A_2} + p_{atm} + \rho \cdot g \cdot d_2 = \frac{F_1}{A_1} + p_{atm} + \rho \cdot g \cdot (d_1 + d_2)$$

Pela primeira igualdade: