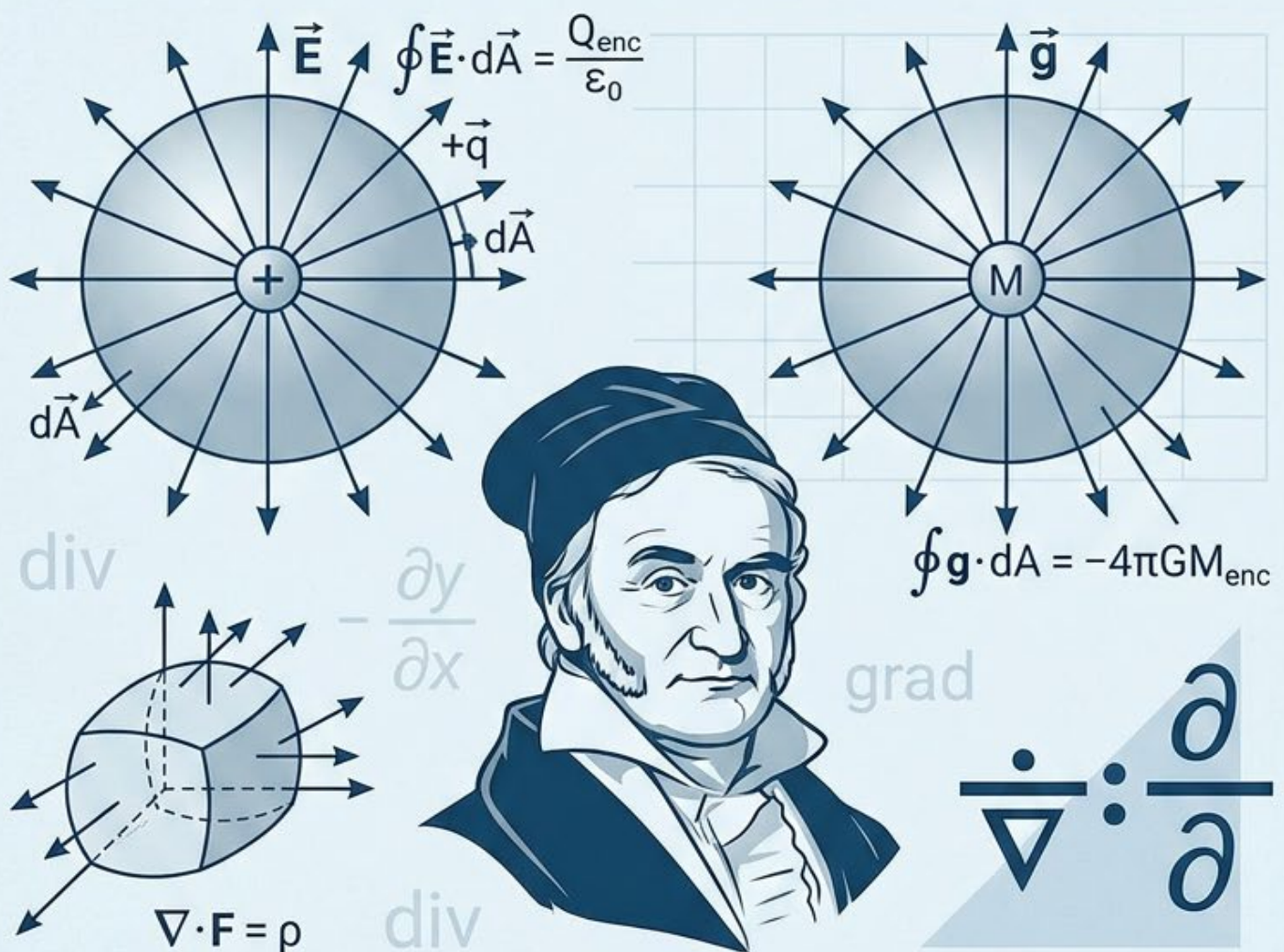


LEI DE GAUSS E FLUXO

Eletrostática, Gravitação e
o Teorema da Divergência



PROFESSOR LAERTE PEREIRA

1. Nova Visão da Lei de Coulomb

Se almejarmos descobrir o centro de massa de uma batata, poderemos fazê-lo através de medição no laboratório ou, então, por meio de laboriosos cálculos envolvendo o desenvolvimento numérico de uma integral tripla. Entretanto, se a batata for uma esfera não haverá qualquer trabalho a ser realizado. Sabemos exatamente onde encontrar esse centro de massa. Esta é uma das vantagens da simetria. Situações em que há simetria aparecem em todos os campos da Física e, sempre que possível, faz sentido buscarmos formalizar as equações das leis da Física, de modo a tirarmos plena vantagem desse fato.

A Lei de Coulomb é a principal lei da Eletrostática, mas não está formalizada de modo a vir simplificar os cálculos, nos casos de alta simetria. Neste tópico avançado, introduzimos uma nova formulação da Lei de Coulomb, chamada *Lei de Gauss*, que pode apresentar vantagem nesses casos especiais. A Lei de Gauss — em problemas de Eletrostática — é equivalente à Lei de Coulomb. Qual delas escolher vai depender do tipo de problema que tivermos. Apesar de ambas as leis serem válidas para todos os problemas de Eletrostática, uma coisa é a lei ser válida e outra bem distinta é ser útil.

Usa-se a Lei de Coulomb, a principal ferramenta da Eletrostática, em todos os problemas nos quais o grau de simetria é baixo. Mesmo o mais complicado desses problemas pode ser resolvido, com suficiente auxílio de computadores. Usaremos a Lei de Gauss quando a simetria for aproximadamente alta. Em tais casos, essa lei não só simplifica tremendamente o trabalho, mas, devido a sua simplicidade, frequentemente fornece novas ideias.

A Lei de Gauss, quando aplicada a problemas onde não existe simetria, simplesmente não nos leva a nenhuma conclusão importante sobre a solução dos mesmos. A Lei de Gauss estabelece a relação entre a carga elétrica e o campo elétrico criado por esta carga. A Lei de Coulomb também correlaciona essas duas quantidades. A Lei de Gauss é simplesmente uma outra maneira equivalente de fazer a mesma coisa. Antes de a apresentarmos formalmente, vamos primeiramente dar algumas noções sobre sua natureza.

A figura central da Lei da Gauss é uma hipotética superfície fechada, chamada *superfície gaussiana*. A superfície gaussiana pode ter a forma que desejarmos, mas será de maior utilidade quando usada de forma compatível com a simetria do problema específico em estudo. Decorre disto que, às vezes, a superfície gaussiana toma a forma esférica ou cilíndrica ou qualquer outra forma simétrica, porém

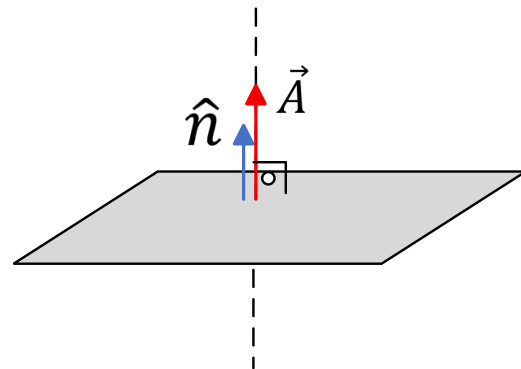
deverá ser sempre uma superfície *fechada*, de modo a obtermos uma clara distinção entre pontos internos, pontos sobre a superfície e pontos exteriores à mesma.

Antes de apresentarmos de forma quantitativa as ideias até aqui expostas, faremos uma pausa para desenvolver um novo conceito: o de *fluxo* de um campo vetorial.

2. Vetor área ($\vec{A}$)

Seja o retângulo acima, de lados m

e n . Considere um vetor perpendicular (normal) à sua superfície. Tal vetor será denominado vetor área ($\vec{A}$), e seu módulo será igual à área do retângulo, ou seja:



$$|\vec{A}| = \text{área da superfície}$$

Direção: normal à superfície

Sentido: saindo da superfície

O conceito de vetor área é geral e vale para áreas de qualquer formato.

3. Fluxo: analogia do escoamento de um fluido

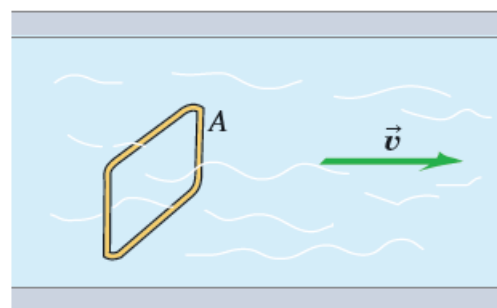


Figura 1: Uma espira retangular em um fluido

A figura indica um fluido escoando de modo constante da esquerda para a direita. Vamos examinar a vazão volumétrica dV/dt (digamos, em

metros cúbicos por segundo) através da espira retangular de arame com área A . Quando a área está perpendicular à velocidade do escoamento $\vec{v}$ e a velocidade do escoamento é a mesma em todos os pontos do fluido, a vazão volumétrica dV/dt é igual ao produto da área A pelo módulo da velocidade v :

$$\frac{dV}{dt} = vA$$

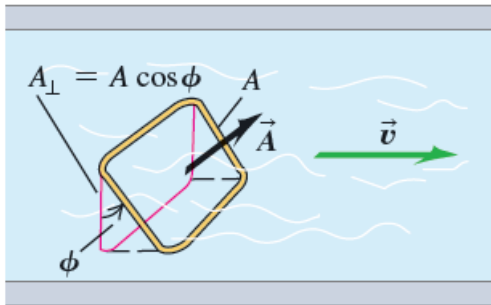


Figura 2: A espira retangular inclinada a um ângulo ϕ

Quando o retângulo está inclinado a um ângulo ϕ , de modo que sua face não é perpendicular a $\vec{v}$, a área que conta é o perfil da área quando observarmos o retângulo na direção de $\vec{v}$. Essa área, indicada pelo símbolo $A_{\perp}$ na Figura 2, é a projeção da área A sobre um plano perpendicular a $\vec{v}$. Dois lados da projeção do retângulo possuem o mesmo comprimento do retângulo original, porém os outros dois ficam diminuídos pelo fator de $\cos \phi$, de modo que a área projetada $A_{\perp}$ é dada por $A \cos \phi$. Então, a vazão volumétrica através de A é

$$\frac{dV}{dt} = vA \cos \phi$$

Quando $\phi = 90^\circ$, $dV/dt = 0$; o retângulo é paralelo ao escoamento e não passa nenhum fluido através dele.

Além disso, $v \cos \phi$ é o componente do vetor $\vec{v}$ perpendicular ao plano da área A . Usando o símbolo $v_{\perp}$ para esse componente, podemos reescrever a vazão volumétrica na forma

$$\frac{dV}{dt} = v_{\perp} A$$

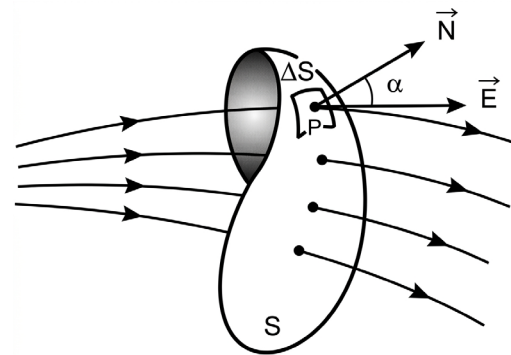
Podemos expressar mais resumidamente a vazão volumétrica usando o conceito de vetor área $\vec{A}$, uma grandeza vetorial cujo módulo fornece área A e cuja direção é perpendicular ao plano da área que estamos descrevendo. O vetor área $\vec{A}$ indica o tamanho da área e sua orientação no espaço. Com

base na área $\vec{A}$, podemos escrever a vazão volumétrica do fluido através do retângulo indicado na Figura 2 como um produto escalar:

$$\frac{dV}{dt} = \vec{v} \cdot \vec{A}$$

4. Fluxo do vetor-campo-elétrico

Consideremos um campo elétrico cujas linhas de força atravessem uma superfície S . Seja P um ponto desta superfície ao qual está associado o vetor-campo-elétrico $\vec{E}$. Tomemos, então, uma fração de área ΔS desta superfície que contenha o ponto P e que seja pequena a ponto de nela se poder considerar $\vec{E}$ constante.



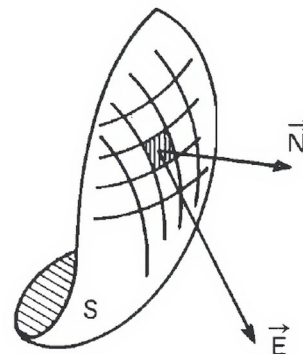
Nestas condições, denominamos fluxo elementar do vetor-campo-elétrico $\vec{E}$ a grandeza escalar $\Delta \phi$, definida pelo produto:

$$\Delta \phi = E \cdot \Delta S \cdot \cos \alpha$$

onde α é o ângulo formado pelo vetor-campo-elétrico $\vec{E}$ e o vetor-normal $\vec{N}$.

Para calcularmos o fluxo total através de toda a superfície, devemos dividi-la em várias superfícies elementares de área ΔS , calcular o fluxo em cada uma e somar todos os resultados, ou seja:

$$\phi_{\text{total}} = \sum \Delta \phi = \sum (E \cdot \Delta S \cdot \cos \alpha)$$



Dicas:

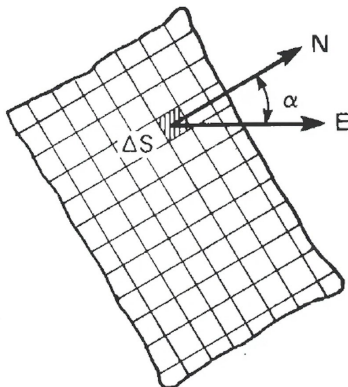
1. Para que o fluxo total seja exato, devemos fazer:

$$\phi_{\text{total}} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \sum (E \cdot \Delta S \cdot \cos \alpha)$$

2. Para o cálculo do fluxo não é necessária a existência física da superfície S .
3. No Sistema Internacional de Unidades, E é medido em N/C e ΔS é medida em m^2 . Assim, o fluxo ϕ será medido em $\text{N} \cdot \text{m}^2/\text{C}$.
4. O número de linhas de força que atravessam uma superfície num campo elétrico é proporcional à intensidade do correspondente fluxo do vetor-campo-elétrico.

5. Fluxo num campo elétrico uniforme

Seja um campo elétrico uniforme, onde o vetor-campo-elétrico é constante e igual a $\vec{E}$. Vamos determinar o seu fluxo elétrico através de uma superfície **plana** de área S , inclinada de um ângulo α com relação às linhas de força do campo,



Para uma fração de área ΔS desta superfície, podemos escrever:

$$\Delta \phi = E \cdot \Delta S \cdot \cos \alpha$$

Para a superfície toda, temos:

$$\phi = \sum \Delta \phi \Rightarrow \phi = \sum (E \cdot \Delta S \cdot \cos \alpha)$$

Sendo E e $\cos \alpha$ constantes, podemos colocá-los em evidência (fora da somatória), ou seja:

$$\phi = E \cdot \cos \alpha \cdot \sum \Delta S$$

A somatória de todas as frações ΔS resulta na área total S da superfície plana. Assim:

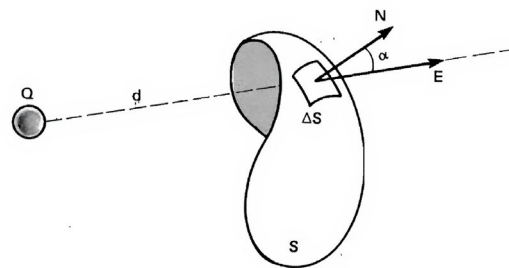
$$\sum \Delta S = S$$

Substituindo este resultado na expressão anterior, vem:

$$\phi = E \cdot \cos \alpha \cdot S \Rightarrow \boxed{\phi = ES \cdot \cos \alpha}$$

6. Fluxo devido a uma carga pontual através de um elemento de área

Seja Q uma carga pontual que gera um campo elétrico cujas linhas de força são interceptadas por uma superfície S .



Nesta superfície, consideremos um elemento de área ΔS e calculemos nele o fluxo do vetor-campo-elétrico $\vec{E}$ produzido por Q (ΔS é tal que possamos admitir $\vec{E}$ praticamente constante em sua extensão).

Assim, o vetor-campo-elétrico no elemento de área ΔS terá intensidade dada por:

$$E = K \cdot \frac{|Q|}{d^2} \quad \text{eq. 1}$$

Neste caso, o fluxo elementar é expresso por $\Delta \phi = E \cdot \Delta S \cdot \cos \alpha$.

Em módulo, temos:

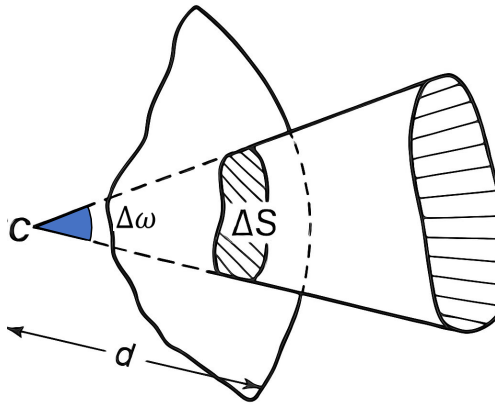
$$|\Delta \phi| = E \cdot \Delta S \cdot |\cos \alpha|$$

Substituindo a expressão (1) nesta última, vem:

$$|\Delta \phi| = K \cdot \frac{|Q|}{d^2} \cdot \Delta S \cdot |\cos \alpha| \Rightarrow$$

$$|\Delta\phi| = K \cdot |Q| \cdot \frac{\Delta S \cdot |\cos \alpha|}{d^2} \quad \text{eq. 2}$$

Recordemos, agora, o conceito matemático de ângulo sólido.

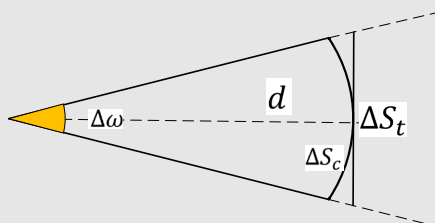


Define-se ângulo sólido ($\Delta\omega$) como o quociente entre a área ΔS do elemento de superfície subtendido pelos lados do ângulo e o quadrado da distância d entre o elemento de superfície e o vértice do ângulo, ou seja:

$$\Delta\omega = \frac{\Delta S}{d^2}$$

Dicas de ouro:

1. O ângulo sólido deve ser medido em esterradiano (sr).
2. Quando se toma um elemento de área ΔS da superfície, adequadamente pequeno, podemos dizer que a superfície da calota de área ΔS_c praticamente coincide com a correspondente superfície tangente de área ΔS_t .



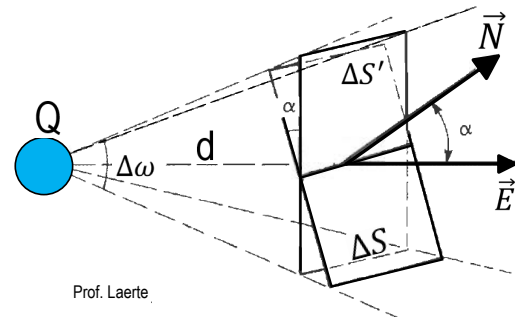
Assim, podemos escrever:

$$\Delta\omega = \frac{\Delta S_c}{d^2} \approx \frac{\Delta S_t}{d^2} \Rightarrow \Delta\omega = \frac{\Delta S_t}{d^2}$$

Voltemos à análise da expressão (2). Como o elemento de área ΔS é adequadamente pequeno, podemos aplicar a conclusão da segunda observação, ou seja:

$$\Delta\omega = \frac{\Delta S'}{d^2} \quad \text{eq. 3}$$

onde $\Delta S'$ se refere à área da superfície tangente (perpendicular ao vetor-campo-elétrico $\vec{E}$).



Prof. Laerte

Porém, o elemento de área ΔS , que aparece na expressão (2), é perpendicular ao vetor-normal $\vec{N}$.

Então, observando a figura acima, podemos escrever:

$$\frac{\Delta S'}{\Delta S} = |\cos \alpha| \Rightarrow \Delta S' = \Delta S \cdot |\cos \alpha|$$

Substituindo este resultado na expressão (3), vem:

$$\Delta\omega = \frac{\Delta S \cdot |\cos \alpha|}{d^2} \quad \text{eq. 4}$$

Comparando as expressões (2) e (4), concluímos que:

$$|\Delta\phi| = K \cdot |Q| \cdot \Delta\omega$$

ou

$$|\Delta\phi| = \frac{1}{4\pi\epsilon} \cdot |Q| \cdot \Delta\omega$$

O sinal de $\Delta\phi$ depende do sinal da carga pontual Q . Poderemos, então, escrever:

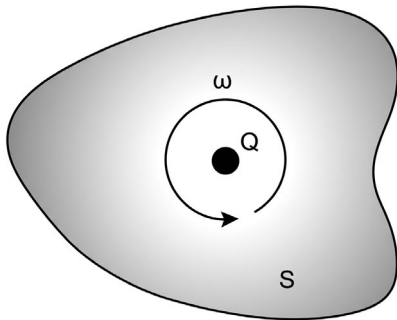
$$\Delta\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon} \cdot Q \cdot \Delta\omega$$

7. Fluxo através de uma superfície fechada

Calculemos, agora, o fluxo através de uma superfície fechada em torno da carga pontual Q .

Para um elemento de área ΔS , sabemos que o fluxo elementar é dado por:

$$\Delta\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon} \cdot Q \cdot \Delta\omega$$



Para a superfície total, temos:

$$\phi = \sum \Delta\phi = \sum \left(\frac{1}{4\pi\epsilon} \cdot Q \cdot \Delta\omega \right) \Rightarrow$$

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon} \cdot Q \cdot \sum \Delta\omega$$

Numa superfície fechada, o ângulo sólido central é de 4π sr. Assim:

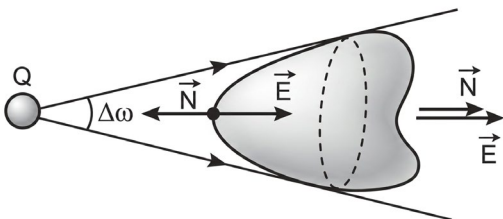
$$\sum \Delta\omega = \omega = 4\pi$$

Substituindo este resultado na expressão anterior, temos:

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon} \cdot Q \cdot 4\pi \Rightarrow \boxed{\phi = \frac{Q}{\epsilon}}$$

8. Fluxo para carga pontual externa à superfície

Quando a carga pontual é externa à superfície, devemos inicialmente calcular os fluxos para a superfície onde “entram” as linhas de campo e para a superfície onde “saem” essas linhas e, em seguida, somá-los algebricamente.



Para cada elemento de área ΔS temos o módulo do fluxo dado por

$$|\Delta\phi| = \frac{1}{4\pi\epsilon} \cdot |Q| \cdot \Delta\omega.$$

Como o ângulo sólido é o mesmo tanto para a “superfície de entrada” como para a “superfície de saída”, podemos escrever:

$$|\Delta\phi_{\text{entrada}}| = |\Delta\phi_{\text{saída}}|. \quad eq. 1$$

Porém, admitindo carga pontual positiva e observando a figura, notamos que na “superfície de entrada” o fluxo é negativo (o ângulo formado entre $\vec{N}$ e $\vec{E}$ é maior que 90°), enquanto que na “superfície de saída” o fluxo é positivo (o ângulo formado entre $\vec{N}$ e $\vec{E}$ é menor que 90°). Assim:

$$\Delta\phi_{\text{entrada}} < 0 \text{ e } \Delta\phi_{\text{saída}} > 0 \quad eq. 2$$

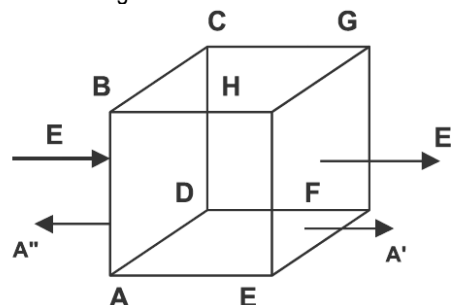
Das conclusões (1) e (2), podemos escrever:

$$\Delta\phi_{\text{entrada}} = -\Delta\phi_{\text{saída}} \Rightarrow \boxed{\Delta\phi_{\text{entrada}} + \Delta\phi_{\text{saída}} = 0}$$

Portanto, para a superfície total S teremos:

$$\boxed{\phi = 0}$$

Exemplo 1: Deseja-se calcular o fluxo total através do cubo imerso num campo elétrico uniforme $\vec{E}$, conforme a figura abaixo.



Solução:

É fácil notar que só há fluxo através das faces ABCD e EFGH, pois, nas demais faces, o respectivo vetor área é perpendicular ao vetor campo elétrico $\vec{E}$:

$$\vec{E} \cdot \vec{A} \cdot \cos 90^\circ = 0 \rightarrow \text{nas demais faces}$$

Outra maneira é notar que as faces que apresentam fluxo nulo não são, efetivamente, “furadas” pelas linhas de campo, que são paralelas a essas faces.

$$\Phi_{\text{TOTAL}} = \phi_{\text{ABCD}} + \phi_{\text{EFGH}}$$

Observe que:

$$\phi_{ABCD} = E \cdot A \cdot \cos 180^\circ = -EA$$

$$\phi_{EFGH} = E \cdot A \cdot \cos 0^\circ = +EA$$

$$\phi_{\text{TOTAL}} = -EA + EA = 0$$

Assim, concluímos que o fluxo total através da superfície fechada é nulo.

Interpretação: Simplificando, a grandeza fluxo “conta” o número de linhas que saem menos o número de linhas que entram na área fechada. Conforme percebemos na situação acima, esse valor é nulo.

$$\Phi = \left(\begin{array}{c} \text{Número de} \\ \text{linhas que saem} \end{array} \right) - \left(\begin{array}{c} \text{Número de} \\ \text{linhas que entram} \end{array} \right)$$

Se houvesse apenas uma carga positiva $+Q$ no interior do cubo, o fluxo total seria positivo, pois só haveriam linhas de campo saindo através da superfície do cubo.

8. LEI DE GAUSS - Eletrostática



Carl Friedrich Gauss

A lei de Gauss é uma alternativa à lei de Coulomb. Embora seja completamente equivalente à lei de Coulomb, a lei de Gauss apresenta uma forma diferente de expressar a relação entre carga elétrica e campo elétrico. Ela foi formulada por Carl Friedrich Gauss (1777–1855), um dos maiores matemáticos de todos os tempos.

Carga puntiforme no interior de uma superfície esférica

A lei de Gauss afirma que o fluxo elétrico total através de qualquer superfície fechada (a superfície interna de um volume definido) é proporcional à carga elétrica total (líquida) existente no interior da superfície. Vamos iniciar com o campo elétrico de uma única carga puntiforme positiva q . As linhas de campo se irradiam para fora da carga igualmente em todas as direções. Colocamos essa carga no centro de uma superfície esférica imaginária

de raio R . O módulo do campo elétrico E em qualquer ponto sobre a superfície é dado por

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R^2}$$

O vetor $\vec{E}$ é perpendicular a cada ponto da superfície e seu módulo é sempre o mesmo em todos os pontos. O fluxo elétrico resultante é dado pelo produto do módulo do campo elétrico E pela área total $A = 4\pi R^2$ da superfície da esfera:

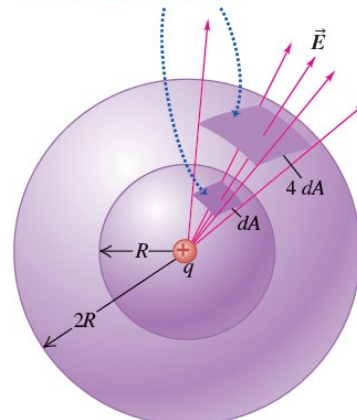
$$\Phi_E = EA = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R^2} (4\pi R^2) = \frac{q}{\epsilon_0} \quad eq1$$

O fluxo elétrico é independente do raio R da esfera. Ele depende apenas da carga q existente no interior da esfera.

Podemos também interpretar esse resultado com base nas linhas de campo. A Figura mostra duas esferas com raios R e $2R$, centralizadas sobre a carga puntiforme q . Cada linha de campo elétrico que passa pela esfera menor também passa pela maior, de modo que o fluxo elétrico é o mesmo nas duas esferas.

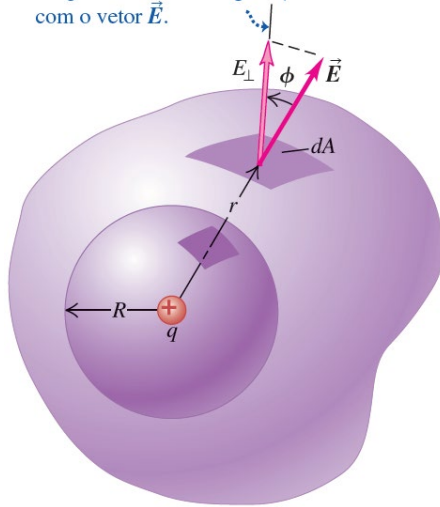
O que é verdade para a esfera como um todo também é verdade para qualquer porção de sua superfície. Na Figura, um elemento de área dA é assinalado sobre uma esfera de raio R e, a seguir, projetado sobre uma esfera concêntrica de raio $2R$, desenhando raios que passam pelo centro e pelos pontos limítrofes de dA . A área projetada sobre a esfera maior é claramente igual a $4 dA$. Porém, como o campo elétrico de uma carga puntiforme é inversamente proporcional a r^2 , o módulo do campo elétrico sobre a esfera de raio $2R$ é $\frac{1}{4}$ do módulo do campo elétrico sobre a esfera de raio R . Portanto, o fluxo elétrico é o mesmo para ambas as áreas e não depende do raio da esfera.

O mesmo número de linhas de campo e o mesmo fluxo elétrico passam através de cada elemento de área.



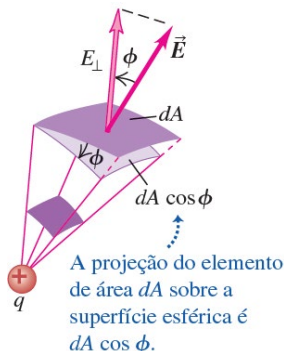
Carga puntiforme no interior de uma superfície não esférica

A normal saindo da superfície irregular forma um ângulo ϕ com o vetor $\vec{E}$.



Essa técnica de projeção mostra como generalizar a discussão para superfícies com formas não esféricas. Em vez de uma segunda esfera, vamos circundar a esfera de raio R com uma superfície de forma irregular, como indica a Figura. Considere um pequeno elemento de área dA sobre a superfície irregular; notamos que essa área é maior que um elemento de área correspondente sobre a superfície esférica que estivesse à mesma distância de q . Se a normal dA forma um ângulo ϕ com o raio que parte da carga q , a projeção dessa área sobre a superfície esférica mostra que dois lados se encurtam na medida de $\cos \phi$. Os outros dois lados não variam. Portanto, o fluxo elétrico através do elemento da superfície esférica é igual ao fluxo elétrico $E dA \cos \phi$ através do elemento correspondente da superfície irregular.

Podemos dividir a superfície irregular inteira em elementos dA , calcular o fluxo elétrico $E dA \cos \phi$ para cada elemento e somar os resultados fazendo a integral. Cada um dos elementos de área se projeta sobre um elemento correspondente da superfície esférica.



Logo, o fluxo elétrico total através da superfície irregular, deve ser igual ao fluxo elétrico total sobre a superfície esférica, o qual é igual a q/ϵ_0 . Portanto, a superfície irregular,

$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q}{\epsilon_0}$$

A Equação vale para qualquer forma e tamanho da superfície, desde que esta seja fechada e contenha uma carga q em seu interior. A circunferência em torno do sinal da integral serve para lembrar que a integração sempre deve ser feita sobre uma superfície fechada.

Os elementos de área $d\vec{A}$ e os vetores unitários $\hat{n}$ correspondentes sempre apontam para fora do volume delimitado pela superfície. Logo, o fluxo elétrico é positivo nas áreas sobre as quais o campo elétrico aponta para fora da superfície e negativo quando aponta para dentro da superfície. Portanto, $E_{\perp}$ é positivo nos pontos em que $\vec{E}$ aponta para fora da superfície e negativo nos pontos em que $\vec{E}$ aponta para dentro da superfície.

Se no interior de uma superfície não existe nenhuma carga,

$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = 0$$

A relação anterior é uma afirmação matemática de que, quando não existe nenhuma carga em uma região, qualquer linha de campo produzida por uma carga puntiforme, no exterior dessa região, que entre na superfície em um dado ponto, deve sair da superfície em outro ponto. Um campo elétrico só pode começar ou terminar em uma dada região quando existem cargas no interior dessa região.

Forma geral da lei de Gauss

Agora atingimos a etapa final para obtermos a forma geral da lei de Gauss. Suponha que, no interior da superfície, exista não apenas uma carga puntiforme q , mas diversas cargas $q_1, q_2, q_3, \dots$. O campo elétrico total (resultante) $\vec{E}$ em qualquer ponto é dado pela soma vetorial dos campos elétricos $\vec{E}$ das cargas individuais. Vamos designar por Q_{int} a carga total existente no interior da superfície:

$$Q_{\text{int}} = q_1 + q_2 + q_3 + \dots$$

Seja também $\vec{E}$ o campo elétrico total no ponto da superfície correspondente ao elemento de

área $d\vec{A}$, e seja $E_{\perp}$ o componente perpendicular ao plano desse elemento (ou seja, paralelo a $d\vec{A}$). Então, podemos escrever uma equação análoga à Equação $\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A}$ para cada carga com seu campo elétrico correspondente e somar os resultados. Fazendo isso, obtemos o enunciado matemático geral da lei de Gauss:

Lei de Gauss:

$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$$

Carga total no interior da superfície

↑

↓

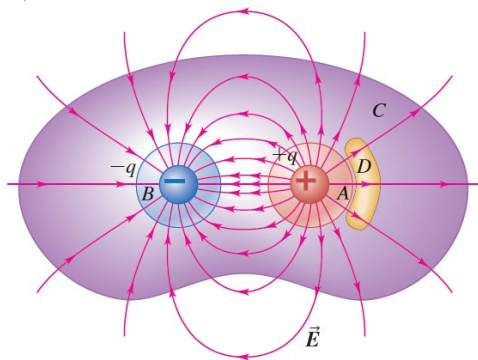
Constante elétrica

Fluxo elétrico através de uma superfície fechada de área $A =$ integral de superfície de E

O fluxo elétrico total através de qualquer superfície fechada é igual à carga elétrica total (líquida) existente no interior da superfície dividida por ϵ_0 .

ATENÇÃO As superfícies gaussianas são imaginárias. Lembre-se de que a superfície fechada na lei de Gauss é imaginária. Não é necessário nenhum objeto material na posição da superfície. Frequentemente, nos referimos à superfície fechada usada na lei de Gauss como uma superfície gaussiana.

EXEMPLO 2: A Figura indica o campo elétrico produzido por duas cargas puntiformes $+q$ e $-q$ (um dipolo elétrico). Determine o fluxo elétrico através de cada uma das superfícies fechadas A , B , C e D .



SOLUÇÃO:

A lei de Gauss, afirma que o fluxo elétrico total através de qualquer superfície fechada é igual ao valor da carga elétrica total no interior da superfície, dividido por ϵ_0 . Na Figura, a superfície A (em vermelho) engloba a carga positiva; logo, $Q_{\text{int}} = +q$; a superfície B (em azul) engloba a carga negativa; logo, $Q_{\text{int}} = -q$; a superfície C (em verde) engloba ambas as cargas; logo, $Q_{\text{int}} =$

$+q + (-q) = 0$; e a superfície D (em amarelo) não possui nenhuma carga em seu interior; logo, $Q_{\text{int}} = 0$. Portanto, não é necessário fazer nenhuma integração e concluímos que

$$\Phi_{EA} = \frac{+q}{\epsilon_0},$$

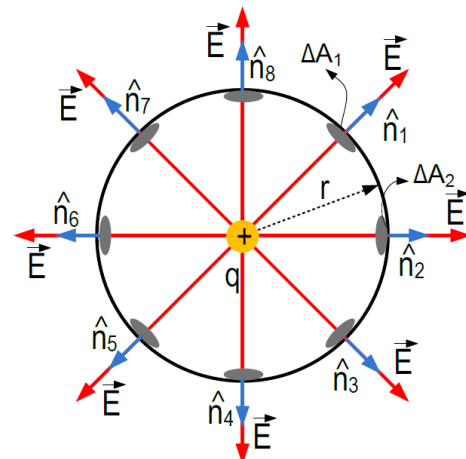
$$\Phi_{EB} = -\frac{q}{\epsilon_0}$$

$$\Phi_{EC} = \Phi_{ED} = 0.$$

Esses resultados dependem somente das cargas existentes no interior da superfície gaussiana, não da forma precisa de cada superfície.

Podemos obter conclusões semelhantes examinando as linhas de campo elétrico. Todas as linhas de campo que atravessam a superfície A apontam de dentro para fora, portanto, o fluxo através de A deve ser positivo. De modo análogo, a superfície B deve ser negativa, porque todas as linhas de campo que atravessam a superfície B apontam de fora para dentro. Tanto na superfície C quanto na superfície D existe o mesmo número de linhas de campo apontando para fora e para dentro da superfície; logo, o fluxo através de cada uma dessas superfícies é igual a zero.

EXEMPLO 3: Considere uma carga pontual positiva q localizada no centro de uma esfera de raio r , conforme a figura abaixo.



Conforme vimos no capítulo anterior, o módulo do campo elétrico será:

$$E = \frac{1}{4\pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2}$$

As linhas do campo elétrico são direcionadas radialmente para fora e, portanto, perpendiculares à superfície em todos os seus pontos. Em outras palavras, em cada ponto da superfície, $\vec{E}$ é paralelo ao vetor $\Delta\vec{A}_i$, em torno da superfície. Portanto:

$$\phi_{E(\text{SUPERFÍCIE})} = \sum_{i=1}^N |\vec{E}_i| \cdot |\Delta \vec{A}_i \cdot \cos \theta_i|$$

Observe que o ângulo entre o vetor normal a uma área infinitesimal é paralelo ao vetor campo elétrico em todos os pontos de sua superfície, assim:

$$\theta_i = 0^\circ$$

Logo:

$$\phi_{E(\text{SUPERFÍCIE})} = |\vec{E}| \cdot \sum_{i=1}^N |\Delta \vec{A}_i \cdot \cos(0^\circ)|$$

Observando a figura acima, concluímos a soma das áreas infinitesimais sobre a superfície gaussiana esférica será igual à área superficial da esfera, dessa forma podemos escrever:

$$\sum_{i=1}^N |\Delta \vec{A}_i| = 4\pi \cdot r^2$$

Finalmente, podemos determinar o fluxo sobre toda a superfície gaussiana.

$$\phi_{E(\text{SUPERFÍCIE})} = |\vec{E}| \cdot \left(\sum_{i=1}^N |\Delta \vec{A}_i| \right)$$

$$\phi_{E(\text{SUPERFÍCIE})} = \frac{1}{4\pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2} \cdot 4\pi \cdot r^2$$

$$\phi_{E(\text{SUPERFÍCIE})} = \frac{q}{\epsilon_0}$$

Apesar de ter deduzido o resultado acima para uma superfície gaussiana esférica, o professor Laerte afirma que a lei de Gauss pode ser escrita na forma:

$$\phi_{E(\text{SUPERFÍCIE})} = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{\text{ENV}}}{\epsilon_0}$$

Dica Geral: O fluxo elétrico líquido através de qualquer superfície fechada em torno de uma carga pontual q é dado por q/ϵ_0 e é independente da forma da superfície em questão.

EXEMPLO 4: Uma superfície gaussiana esférica envolve uma carga pontual q . Descreva o que ocorre com o fluxo total através da superfície se:

- 1º) a carga for triplicada;
- 2º) o raio da esfera for duplicado;
- 3º) a forma da superfície for alterada para um cubo;
- 4º) a carga for deslocada para outra posição no interior da superfície.

Resolução:

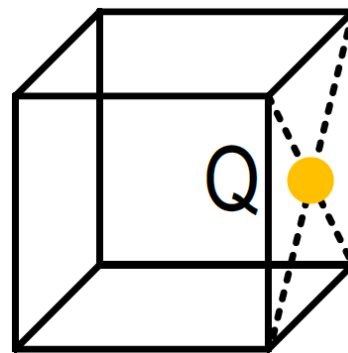
1º) O fluxo através da superfície será triplicado, porque é proporcional à quantidade de carga no interior da superfície.

2º) O fluxo não será alterado, porque todas as linhas do campo elétrico originadas na carga passam através da esfera, independentemente do seu raio.

3º) O fluxo não será alterado quando a forma da superfície gaussiana for alterada, pois todas as linhas do campo elétrico originadas na carga passam através da superfície, independentemente da sua forma.

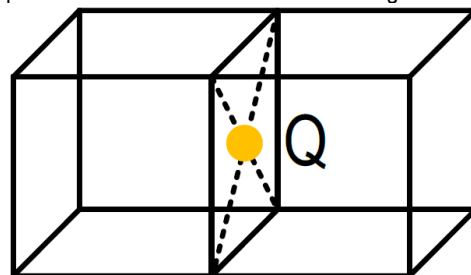
4º) O fluxo não será alterado quando a carga for deslocada para outra posição no interior da superfície, pois a Lei de Gauss refere-se à carga total envolvida, independente de onde a carga está localizada no interior da superfície.

EXEMPLO 5: Determine o fluxo sobre as faces de um cubo, quando colocamos a carga Q no centro de uma de suas faces.



RESOLUÇÃO:

Se a carga está no centro da face de um cubo, nós construiremos outro cubo (imaginário) similar ao primeiro de modo a envolver toda a carga.



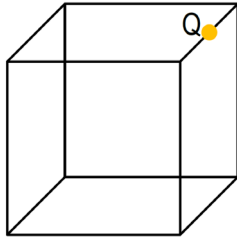
O fluxo total sobre os dois cubos será:

$$\phi_{\text{TOTAL}} = 2 \cdot \phi_{\text{CUBO}}$$

$$\frac{Q}{\epsilon_0} = 2 \cdot \phi_{\text{CUBO}}$$

$$\phi_{\text{CUBO}} = \frac{Q}{2 \cdot \epsilon_0}$$

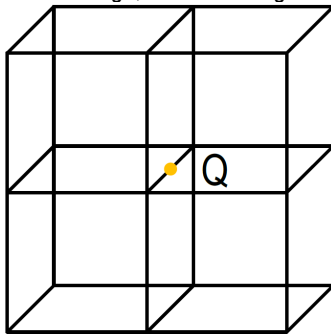
Exemplo 6: Na figura temos uma carga $+Q$ localizada no centro de uma das arestas de um cubo, conforme a figura abaixo. Sabendo-se que a aresta do cubo é igual a A , qual o fluxo elétrico através do cubo.



- a) $\phi = \frac{Q}{\epsilon_0}$
- b) $\phi = \frac{Q}{2 \cdot \epsilon_0}$
- c) $\phi = \frac{Q}{4 \cdot \epsilon_0}$
- d) $\phi = \frac{Q}{8 \cdot \epsilon_0}$
- e) $\phi = \frac{Q}{12 \cdot \epsilon_0}$

RESOLUÇÃO:

Se a carga está no centro de uma das arestas do cubo, nós construiremos outros três cubos (imaginários) similar ao primeiro de modo a envolver toda a carga, conforme a figura abaixo.



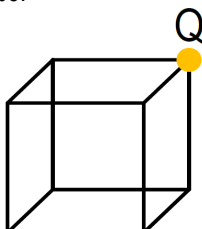
O fluxo total sobre todos os cubos será:

$$\phi_{\text{TOTAL}} = 4 \cdot \phi_{\text{CUBO}}$$

$$\frac{Q}{\epsilon_0} = 4 \cdot \phi_{\text{CUBO}}$$

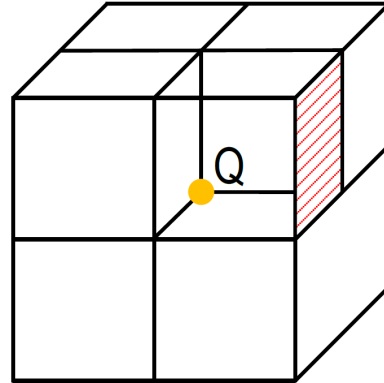
$$\phi_{\text{CUBO}} = \frac{Q}{4 \cdot \epsilon_0}$$

Exemplo 7: Determine o fluxo sobre as faces de um cubo, quando colocamos a carga Q em um dos vértices do cubo.



RESOLUÇÃO:

Se a carga Q é colocada no vértice de um cubo, mais sete cubos idênticos são necessários para incluir a carga completamente, em que dessa forma temos um outro cubo em que a carga estará em seu centro, em que dessa forma obtemos uma superfície gaussiana com alto grau de simetria conforme a figura abaixo.



O fluxo total através de todas as faces de 8 cubos é dado por:

$$\phi_{\text{TOTAL}} = \frac{Q}{\epsilon_0} = 8 \cdot \phi_{\text{CUBO}}$$

$$\phi_{\text{CUBO}} = \frac{Q}{8 \cdot \epsilon_0}$$

Esse fluxo emergindo igualmente através de três faces do cubo, enquanto as outras três faces em que a carga está no vértice das faces o fluxo será nulo através delas. Portanto, o fluxo através de cada uma das outras três faces será:

$$\phi_{\text{CUBO}} = 3 \cdot \phi_{\text{FACE}}$$

$$\frac{Q}{8 \cdot \epsilon_0} = 3 \cdot \phi_{\text{FACE}}$$

$$\phi_{\text{FACE}} = \frac{Q}{24 \cdot \epsilon_0}$$

Dica de ouro : Passos para a escolha de uma superfície gaussiana adequada a aplicação da **Lei De Gauss**:

1º) Pode-se demonstrar que o valor do campo elétrico é, por simetria, constante sobre a porção da superfície.

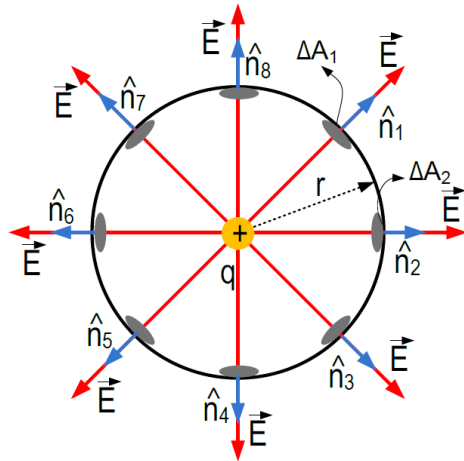
2º) O produto escalar $\vec{E} \cdot d\vec{A}$ pode assumir os seguintes valores:

$$\begin{cases} \vec{E} \cdot d\vec{A} = |\vec{E}| \cdot |d\vec{A}|, \theta = 0^\circ \\ \vec{E} \cdot d\vec{A} = 0, \theta = 90^\circ \end{cases}$$

3º) O campo elétrico é igual a zero sobre a porção da superfície.

A) CAMPO ELÉTRICO GERADO POR UMA CARGA ELÉTRICA PONTUAL:

O professor Laerte mostrará como se determina o campo elétrico de uma carga pontual a uma distância r conforme a figura abaixo.



O fluxo elétrico total do vetor campo elétrico $\vec{E}$ (paralelo ao vetor normal de cada ponto da superfície) em torno da carga será dado por:

$$\phi_{E(\text{SUPERFÍCIE})} = \sum_{i=1}^N |\vec{E}_i| \cdot |\Delta \vec{A}_i| \cdot \cos \theta_i$$

Observe que o ângulo entre o vetor normal a uma área infinitesimal é paralelo ao vetor campo elétrico em todos os pontos de sua superfície, assim:

$$\theta_i = 0^\circ$$

Logo:

$$\phi_{E(\text{SUPERFÍCIE})} = |\vec{E}| \cdot \left(\sum_{i=1}^N |\Delta \vec{A}_i| \cdot \cos 0^\circ \right)$$

Observando a figura acima, concluímos a soma das áreas infinitesimais sobre a superfície gaussiana esférica será igual à área superficial da esfera, dessa forma podemos escrever:

$$\sum_{i=1}^N |\Delta \vec{A}_i| = 4\pi \cdot r^2$$

Finalmente, podemos determinar o fluxo sobre toda a superfície gaussiana:

$$\phi_{E(\text{SUPERFÍCIE})} = |\vec{E}| \cdot \left(\sum_{i=1}^N |\Delta \vec{A}_i| \right)$$

$$\phi_{E(\text{SUPERFÍCIE})} = |\vec{E}| \cdot (4\pi \cdot r^2)$$

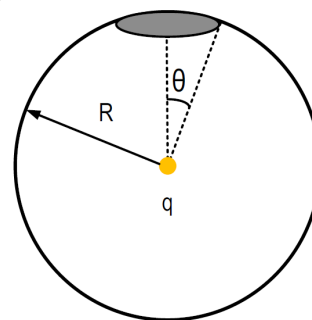
Da lei de Gauss:

$$\phi_{E(\text{SUPERFÍCIE})} = \frac{Q_{\text{ENV}}}{\epsilon_0}$$

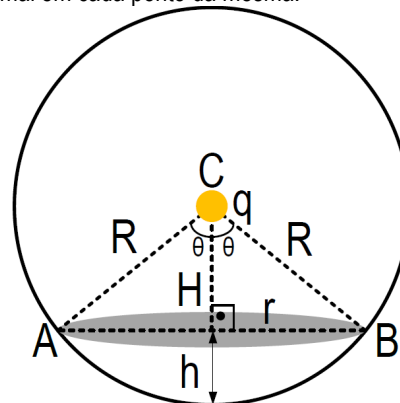
$$|\vec{E}| \cdot (4\pi \cdot r^2) = \frac{q}{\epsilon_0}$$

$$|\vec{E}| = \frac{1}{4\pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2}$$

Exemplo resolvido 8: Uma esfera de raio R envolve uma partícula de carga Q localizada em seu centro, conforme a figura abaixo. Determine o fluxo elétrico através de uma calota circular de semiângulo de abertura θ .



RESOLUÇÃO: Imagine uma superfície gaussiana esférica em torno da carga mostrada na figura abaixo. Devido à simetria esférica em todos os pontos da superfície esférica o módulo do vetor campo elétrico será constante e paralelo ao vetor normal em cada ponto da mesma.



Para a superfície esférica, podemos determinar a relação entre os fluxos elétricos total e parcial usando a definição de fluxo elétrico:

$$\Phi_{\text{PARCIAL}} = E \cdot A_{\text{PARCIAL}}$$

$$\Phi_{\text{TOTAL}} = E \cdot A_{\text{TOTAL}}$$

$$\frac{\Phi_{\text{PARCIAL}}}{\Phi_{\text{TOTAL}}} = \frac{E \cdot A_{\text{PARCIAL}}}{E \cdot A_{\text{TOTAL}}}$$

$$\frac{\Phi_{\text{PARCIAL}}}{\Phi_{\text{TOTAL}}} = \frac{A_{\text{PARCIAL}}}{A_{\text{TOTAL}}}$$

Sabe-se que:

A área total será igual à área da superfície esférica:

$$A_{TOTAL} = 4\pi \cdot R^2$$

A área parcial será a área da calota esférica:

$$A_{PARCIAL} = 2\pi \cdot R \cdot h$$

Por geometria elementar:

$$\cos \theta = \frac{H}{R} \Rightarrow H = R \cdot \cos \theta$$

Assim:

$$h = R - H = R - R \cdot \cos \theta$$

$$h = R(1 - \cos \theta)$$

Finalmente:

$$A_{PARCIAL} = 2\pi \cdot R \cdot R(1 - \cos \theta)$$

$$A_{PARCIAL} = 2\pi \cdot R^2 \cdot (1 - \cos \theta)$$

Logo:

$$\frac{\phi_{PARCIAL}}{\phi_{TOTAL}} = \frac{2\pi \cdot R^2 \cdot (1 - \cos \theta)}{4\pi \cdot R^2}$$

$$\frac{\phi_{PARCIAL}}{q/\epsilon_0} = \frac{1 - \cos \theta}{2}$$

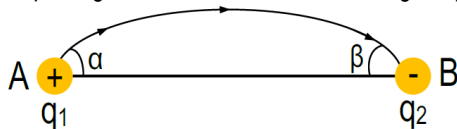
$$\phi_{PARCIAL} = \frac{q}{2\epsilon_0} \cdot (1 - \cos \theta)$$

Casos especiais:

$$\begin{cases} \theta = 90^\circ \Rightarrow \phi_{PARCIAL} = \frac{q}{2\epsilon_0} \\ \theta = 180^\circ \Rightarrow \phi_{PARCIAL} = \frac{q}{\epsilon_0} \end{cases}$$

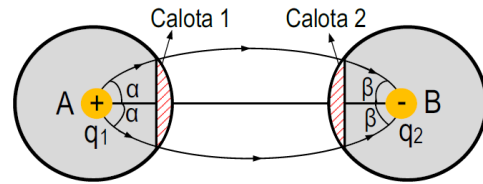
Comentário do Professor Laerte: O fluxo elétrico sobre a calota esférica (AB) será um mesmo de um disco de raio r (AB), já que o número de linhas que atravessam ambas as superfícies são iguais.

Exemplo resolvido 9: Duas cargas $+q_1$ e $-q_2$ estão colocadas, respectivamente, nos pontos A e B. Uma linha de força se origina na carga q_1 , formando um ângulo α com a linha AB. Determine em que ângulo essa linha terminará na carga $-q_2$.



RESOLUÇÃO: Primeiramente, o professor Laerte escolheu duas superfícies gaussianas em torno de cada uma das cargas pontuais mostradas na figura abaixo, em que ele delimita duas calotas esféricas

de ângulo de abertura iguais a α e β , que correspondem aos ângulos entre as linhas de forças e a reta que une as cargas.



Considerando-se que o número de linhas que atravessam ambas as calotas esféricas de aberturas iguais a α e β , assim podemos afirmar que o fluxo elétrico será igual em ambas as calotas. Assim, podemos escrever:

$$\Phi_{CALOTA(1)} = \Phi_{CALOTA(2)}$$

$$\frac{q_1}{2\epsilon_0} \cdot (1 - \cos \alpha) = \frac{q_2}{2\epsilon_0} \cdot (1 - \cos \beta)$$

$$q_1 \cdot (1 - \cos \alpha) = q_2 \cdot (1 - \cos \beta)$$

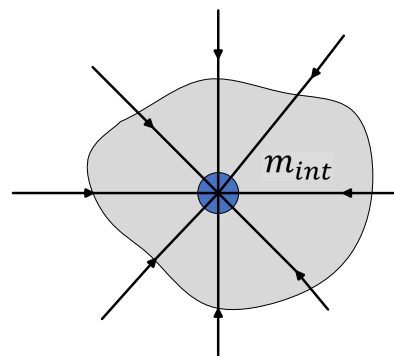
$$q_1 \cdot \sin^2 \left(\frac{\alpha}{2} \right) = q_2 \cdot \sin^2 \left(\frac{\beta}{2} \right)$$

Portanto:

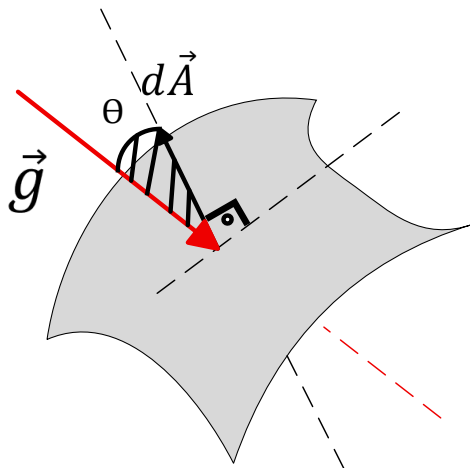
$$\sin \left(\frac{\beta}{2} \right) = \left(\sqrt{\frac{q_1}{q_2}} \right) \cdot \sin \left(\frac{\alpha}{2} \right)$$

9. Lei de Gauss para a Gravitação (Nível ITA - IME)

Considere uma superfície fechada S , denominada Gaussiana. Dentro desta superfície há uma massa interna (m_{int}). De forma análoga ao campo elétrico, um campo gravitacional pode ser representado por linhas de forças.



As linhas gravitacionais sempre estão entrando na superfície Gaussiana, pois em gravitação as forças são sempre atrativas. Considere o campo gravitacional atuando na superfície da Gaussiana. Chamaremos esse campo de g . Analisando uma pequena porção da superfície acima:



O fluxo que atravessa essa superfície é dado por:

$$d\Phi = |\vec{g}| \cdot |d\vec{A}| \cdot \cos \theta$$

$$\oint d\Phi = \frac{m_{int}}{C}$$

O termo "C" é uma constante que vale:

$$C = \left(-\frac{1}{4\pi \cdot G} \right)$$

Assim, reescrevendo:

$$\oint |\vec{g}| \cdot |d\vec{A}| \cdot \cos \theta = \frac{m_{int}}{C}$$

Transformando em o termo integrante em produto escalar:

$$\oint \vec{g} \cdot d\vec{A} = -m_{int} \cdot 4\pi \cdot G$$

A expressão acima é conhecida como **lei de Gauss para a gravitação**. Na aula de eletrostática, a lei de Gauss para a elétrica é praticamente idêntica.

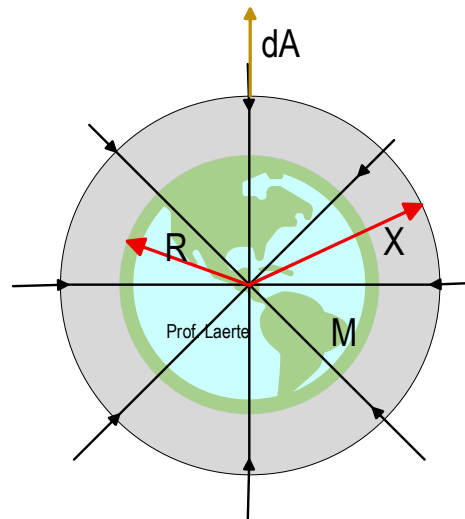
Dica de ouro 💡: Vale ressaltar que a expressão acima será útil somente em alguns casos. Os casos mais adequados para seu uso são:

- Problemas em que a superfície S apresenta enorme grau de simetria.
- Problemas em que o campo gravitacional é sempre perpendicular à superfície S .
- Problemas que envolvem fluxo gravitacional.

Precisaremos calcular os campos gravitacionais de inúmeras distribuições de massa. Veremos quais são as distribuições adequadas para aplicar a lei.

EXEMPLO 10: Lei de Gauss para distribuições esféricas.

Considere um corpo esférico de massa M e raio R . Considere também uma gaussiana esférica de raio x .



Note que as linhas do campo gravitacional são perpendiculares à Gaussiana. Aplicando a lei de Gauss:

$$\oint \vec{g} \cdot d\vec{A} = -m_{int} \cdot 4\pi \cdot G$$

$$\oint |\vec{g}| \cdot |d\vec{A}| \cdot \cos 180^\circ = -M \cdot 4\pi \cdot G$$

O campo gravitacional $\vec{g}$ tem o mesmo valor em todos os pontos da superfície gaussiana. Dessa maneira, ele é constante na superfície da gaussiana e, portanto, podemos retirá-lo para fora da integral.

$$|\vec{g}| \cdot \oint |d\vec{A}| = M \cdot 4\pi \cdot G$$

A integral $\oint |d\vec{A}|$ é a própria área da gaussiana.

$$|\vec{g}| \cdot 4\pi x^2 = M \cdot 4\pi \cdot G$$

$$|\vec{g}| = \frac{G \cdot M_{interna}}{x^2}$$

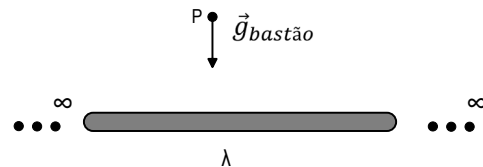
Note que pelo cálculo da lei de Gauss para a gravitação, o campo gravitacional para superfícies esféricas possui algumas características interessantes e muito importantes de serem fixadas. São elas:

1. O campo gravitacional gerado por um corpo esférico em um ponto do espaço, pertencente a uma gaussiana esférica de raio x , só depende da massa interna à gaussiana.
2. O módulo do campo gravitacional gerado por uma distribuição esférica em um ponto que dista x de seu centro, é o mesmo gerado por uma massa

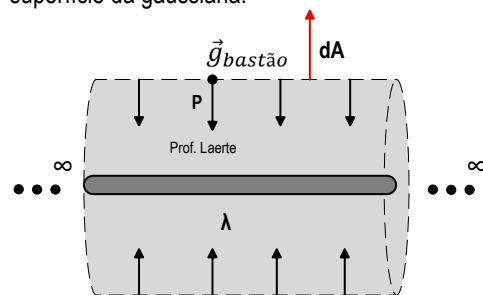
puntiforme (de massa igual a massa interna à gaussiana) no centro da esfera.

EXEMPLO 11: Bastão infinitamente longo

Considere um bastão infinitamente longo de densidade linear de massa λ . Considere o campo gravitacional ($g_{\text{bastão}}$) causado pelo bastão em um determinado ponto P.



Para determinar o campo gerado em P, devemos escolher uma gaussiana conveniente para aplicar a lei de Gauss. Se utilizarmos uma gaussiana esférica, os pontos da barra terão distâncias diferentes do ponto P e, portanto, o cálculo do campo ficará muito complexo. Note que se escolhermos uma gaussiana cilíndrica, concêntrica à barra, os pontos estarão a uma mesma distância e o campo gravitacional será perpendicular à superfície da gaussiana.



Aplicando a lei de Gauss para a gravitação:

$$\oint \vec{g} \cdot d\vec{A} = -m_{\text{int}} \cdot 4\pi \cdot G$$

A massa interna ao bastão pode ser calculada por:

$$\lambda = \frac{m_{\text{int}}}{l}$$

$$\oint |\vec{g}| \cdot |d\vec{A}| \cdot \cos 180^\circ = -\lambda \cdot l \cdot 4\pi \cdot G$$

O campo gravitacional é o mesmo na superfície da gaussiana e, portanto, podemos colocá-lo para fora da integral:

$$g_{\text{bastão}}^\infty \cdot \oint |d\vec{A}| = \lambda \cdot l \cdot 4\pi \cdot G$$

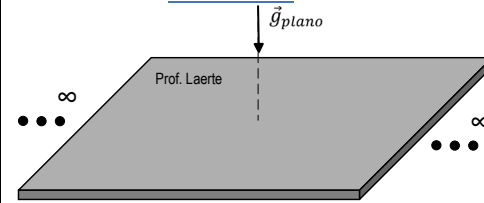
A integral a ser resolvida é numericamente igual à área lateral da gaussiana cilíndrica.

$$\oint |d\vec{A}| = A = 2\pi \cdot x \cdot l$$

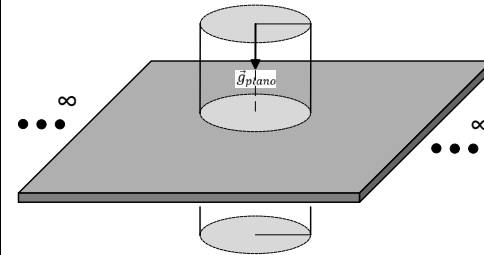
Dessa forma, o campo do gerado pelo bastão é dado por:

$$g_{\text{bastão}}^\infty = \frac{2 \cdot \lambda \cdot G}{x}$$

EXEMPLO 12: Plano infinito



Considere um plano infinito de densidade superficial de massa σ . O campo gerado pelo plano pode ser determinado utilizando diretamente a lei de Gauss.



Utilizando a lei de Gauss:

$$\oint \vec{g} \cdot d\vec{A} = -m_{\text{int}} \cdot 4\pi \cdot G$$

$$g_{\text{plano}} \cdot \oint |d\vec{A}| = \sigma \cdot \pi R^2 \cdot 4\pi \cdot G$$

A expressão da integral é numericamente igual à área das bases do cilindro.

$$\oint |d\vec{A}| = \pi R^2 + \pi R^2$$

$$g_{\text{plano}} \cdot 2\pi R^2 = \sigma \cdot \pi R^2 \cdot 4\pi \cdot G$$

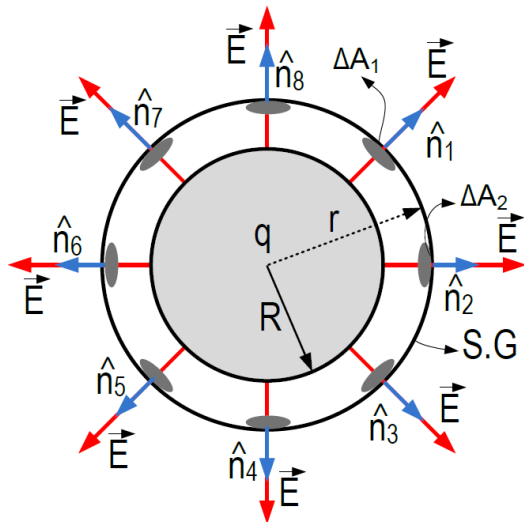
$$g_{\text{plano}} = 2 \cdot G \cdot \sigma \cdot \pi$$

Percebemos que a análise feita por lei de Gauss é infinitamente mais simples. Não foi preciso nenhum cálculo complexo de integrais e nem determinar o campo do disco previamente. A aplicação da lei de Gauss é uma ferramenta importantíssima para a prova do ITA.

10. ESFERA ISOLANTE:

Agora determinaremos o campo elétrico originado por uma carga q distribuída uniformemente no volume de uma esfera de raio R e um ponto de observação a uma distância r do centro da esfera. Devido à simetria esférica a superfície gaussiana será também esférica com o vetor normal à área apontando para fora dessa superfície.

1º caso: Pontos externos à esfera



O fluxo total sobre a superfície gaussiana será:

$$\Phi_{E(\text{SUPERFÍCIE})} = \sum_{i=1}^N |\vec{E}_i| \cdot |\Delta \vec{A}_i| \cdot \cos \theta_i$$

Observe que o ângulo entre o vetor normal a uma área infinitesimal é paralelo ao vetor campo elétrico em todos os pontos de sua superfície, assim:

$$\theta_i = 0^\circ$$

Logo:

$$\Phi_{E(\text{SUPERFÍCIE})} = |\vec{E}| \cdot \sum_{i=1}^N |\Delta \vec{A}_i| \cdot \cos(0^\circ)$$

Observando a figura acima, concluímos a soma das áreas infinitesimais sobre a superfície gaussiana esférica será igual à área superficial da esfera, dessa forma podemos escrever:

$$\sum_{i=1}^N |\Delta \vec{A}_i| = 4\pi \cdot r^2$$

Logo, o fluxo elétrico será:

$$\Phi_{E(\text{SUPERFÍCIE})} = |\vec{E}| \cdot 4\pi \cdot r^2$$

Da lei de Gauss:

$$\Phi_{\text{TOTAL}} = \frac{q_{\text{ENV}}}{\epsilon_0}$$

$$|\vec{E}| \cdot 4\pi \cdot r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

$$|\vec{E}| = \frac{Q}{4\pi \cdot \epsilon_0 \cdot r^2} \quad (r \geq R)$$

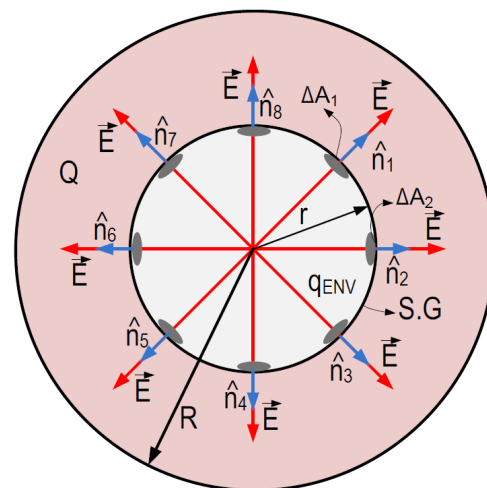
Podemos escrever esse campo em função da densidade volumétrica de cargas:

$$\rho = \frac{Q}{\frac{4\pi}{3} \cdot R^3} \Rightarrow Q = \rho \cdot \frac{4\pi}{3} \cdot R^3$$

$$|\vec{E}| = \frac{Q}{4\pi \cdot \epsilon_0 \cdot r^2} = \frac{\rho \cdot \frac{4\pi}{3} \cdot R^3}{4\pi \cdot \epsilon_0 \cdot r^2}$$

$$|\vec{E}| = \left(\frac{\rho \cdot R^3}{3 \cdot \epsilon_0} \right) \cdot \frac{1}{r^2}$$

2º caso: Pontos internos a esfera



Seja q_{ENV} a carga envolvida pela superfície gaussiana. Podemos determinar a carga envolvida usando a densidade volumétrica de cargas ρ . Será:

$$\rho = \frac{\text{carga}}{\text{volume}}$$

$$\rho = \frac{Q}{\frac{4\pi}{3} \cdot R^3} = \frac{q_{\text{ENV}}}{\frac{4\pi}{3} \cdot r^3}$$

$$q_{\text{ENV}} = \frac{Q \cdot r^3}{R^3}$$

Aplicando-se a lei de Gauss:

$$\Phi_{E(\text{SUPERFÍCIE})} = |\vec{E}| \cdot 4\pi \cdot r^2 = \frac{q_{\text{ENV}}}{\epsilon_0}$$

$$|\vec{E}| \cdot 4\pi \cdot r^2 = \frac{Q \cdot r^3}{\epsilon_0 R^3}$$

$$|\vec{E}| = \left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 \cdot R^3} \right) \cdot \frac{r}{R} \quad (r \leq R)$$

Outro modo de expressar o campo será:

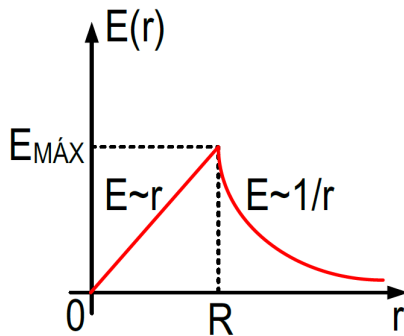
$$\rho = \frac{Q}{\frac{4\pi}{3} \cdot R^3} \Rightarrow Q = \rho \cdot \frac{4\pi}{3} \cdot R^3$$

O campo elétrico pode ser expresso da forma:

$$|\vec{E}| = \frac{Q \cdot r}{4\pi \cdot \epsilon_0 \cdot R^3} = \frac{\left(\rho \cdot \frac{4\pi}{3} \cdot R^3 \right) \cdot r}{4\pi \cdot \epsilon_0 \cdot R^3}$$

$$|\vec{E}| = \frac{\rho \cdot r}{3\epsilon_0} \quad (r \leq R)$$

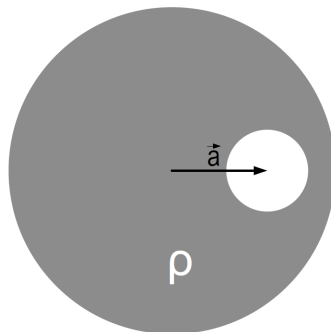
Observe o gráfico do campo elétrico em função do raio r :



Exemplo resolvido13 (RÚSSIA) Dentro de uma esfera carregada com densidade volumétrica constante igual a ρ , existe uma cavidade esférica. A distância entre o centro da esfera e o centro da cavidade é igual a a . Demonstre que a intensidade E do campo elétrico dentro da cavidade é igual a

$$|\vec{E}| = \frac{\rho \cdot |\vec{a}|}{3 \cdot \epsilon_0}$$

e tem sentido da reta, que une os centros das esferas.

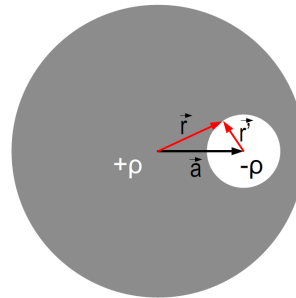


Resolução do Professor Laerte:

Para resolver este problema usaremos o princípio da superposição entre duas distribuições esféricas dielétricas de densidade volumétrica de cargas iguais a $+\rho$ e $-\rho$. Conforme demonstrado anteriormente para uma esfera dielétrica o campo elétrico em seu interior será dado por:

$$\vec{E} = \frac{\rho \cdot \vec{r}}{3 \cdot \epsilon_0}$$

Observe a figura abaixo:



O campo resultante no interior da cavidade esférica obtido por:

$$\vec{E}_R = \vec{E}_+ + \vec{E}_-$$

Em que:

$$\vec{E}_+ = \frac{\rho \cdot \vec{r}}{3 \cdot \epsilon_0}$$

$$\vec{E}_- = -\frac{\rho \cdot \vec{r}'}{3 \cdot \epsilon_0}$$

Finalmente:

$$\vec{E}_R = \frac{\rho \cdot (\vec{r} - \vec{r}')}{3 \cdot \epsilon_0}$$

Pelo diagrama vetorial podemos escrever:

$$\vec{r} = \vec{a} + \vec{r}'$$

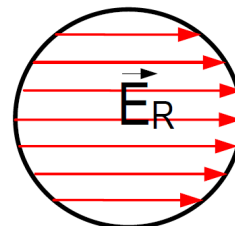
$$\vec{a} = \vec{r} - \vec{r}'$$

Finalmente:

$$\vec{E}_R = \frac{\rho \cdot \vec{a}}{3 \cdot \epsilon_0}$$

Dica de ouro:

O campo elétrico é uniforme no interior da cavidade e tem direção da reta que une o centro da esfera e da cavidade esférica.



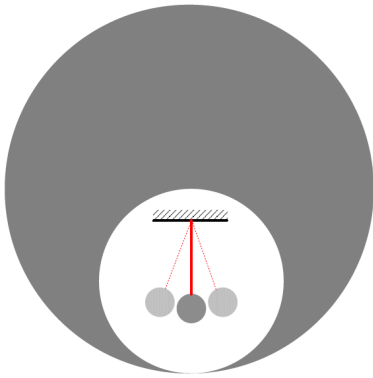
Exemplo resolvido 14: Uma esfera isolante de raio R , uniformemente eletrizada com densidade volumétrica de cargas $+\rho$, teve uma cavidade esférica de diâmetro R aberta em seu interior, como mostra a figura abaixo. Um pêndulo simples que normalmente oscila 30 vezes por minuto sob ação exclusiva da gravidade, foi colocado no interior da cavidade e passa a executar 90 oscilações por minuto, devido à ação do campo elétrico que a esfera isolante causa no interior da cavidade. Determine o módulo de carga elétrica da esfera pendular.

Dados:

m = massa da esfera pendular;

ε = permissividade elétrica no interior da cavidade;

g = gravidade local.



a) $\frac{24m \cdot g \cdot \varepsilon}{\rho \cdot R}$

b) $\frac{12m \cdot g \cdot \varepsilon}{\rho \cdot R}$

c) $\frac{48m \cdot g \cdot \rho}{R \cdot \varepsilon}$

d) $\frac{36m \cdot g \cdot \varepsilon}{\rho \cdot R}$

e) $\frac{24m \cdot g \cdot \varepsilon}{\rho \cdot R}$

Resolução do Professor Laerte:

Lembrando que a frequência de um pêndulo simples em um local em que a aceleração da gravidade é igual a g é dada por:

$$f = \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{g}{L}}$$

Em resumo, podemos afirmar que se a frequência aumenta, é porque a aceleração local aumentou, ou seja, as forças elétricas e peso se somam, o que significa que E tem mesmo sentido que a força elétrica, de onde podemos concluir que a carga q é positiva.

Logo, para a situação inicial temos:

$$f_1 = \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{g}{L}}$$

Para a situação final temos:

$$f_2 = \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{g' + g}{L}}$$

Em que g' é o módulo devido à atuação da força elétrica, assim:

$$\frac{g' + g}{g} = \left(\frac{f_2}{f_1}\right)^2 = 9$$

$$g' = 8g$$

Temos que:

$$F_E = q \cdot E = m \cdot g'$$

$$q = \frac{m \cdot g'}{E}$$

Sabendo que o campo elétrico no interior da cavidade é dado por (lei de Gauss):

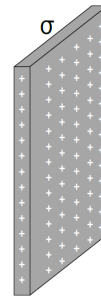
$$E = \frac{\rho R}{6\varepsilon_0}$$

Obtemos finalmente:

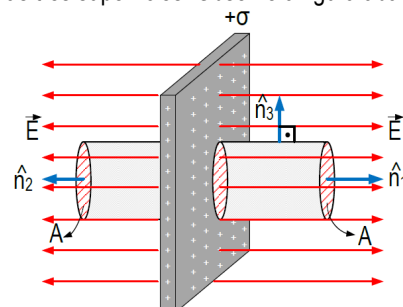
$$q = \frac{m \cdot g'}{E} = \frac{m \cdot 8g}{\frac{\rho R}{6\varepsilon_0}} = \frac{48m \cdot g \cdot \varepsilon_0}{R \cdot \rho}$$

EXEMPLO 15: PLANO CONDUTOR INFINITO

Uma das principais aplicações da Lei de Gauss será um plano condutor plano infinito carregado com uma densidade superficial de cargas uniforme σ conforme a figura abaixo.



A superfície gaussiana adequada será um cilindro de área da seção transversal A devido a simetria da mesma e a necessidade de calcular o fluxo em apenas três superfícies. Observe a figura abaixo:



O fluxo elétrico será calculado sobre as bases do cilindro e superfície lateral do mesmo.

$$\Phi_{LATERAL} = E \cdot A \cdot \cos(90^\circ) = 0 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}$$

$$\Phi_{BASE} = E \cdot A \cdot \cos(0^\circ) = E \cdot A$$

Finalmente, o fluxo total sobre a superfície gaussiana:

$$\Phi_{TOTAL} = \Phi_{BASE(1)} + \Phi_{BASE(2)} + \Phi_{LATERAL(3)}$$

$$\Phi_{TOTAL} = E \cdot A + E \cdot A + 0$$

$$\Phi_{TOTAL} = 2E \cdot A$$

Lembre-se que a densidade superficial de cargas será:

$$\sigma = \frac{q_{ENV}}{A} \Rightarrow q_{ENV} = \sigma \cdot A$$

Da lei de Gauss, podemos escrever:

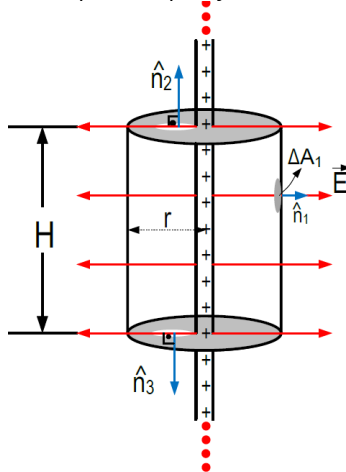
$$\Phi_{TOTAL} = \frac{q_{ENV}}{\epsilon_0}$$

$$2E \cdot A = \frac{\sigma \cdot A}{\epsilon_0}$$

$$E = \frac{\sigma}{2 \cdot \epsilon_0}$$

EXEMPLO 16: LINHA INFINITA DE CARGAS

Na figura abaixo, o professor Laerte mostra uma linha de cargas infinita de densidade linear de cargas igual a λ uniformemente distribuída. Como a linha de cargas é infinitamente longa, o campo elétrico é o mesmo em todos os pontos equidistantes da linha, independentemente da posição vertical do ponto. Assim, como a carga está uniformemente distribuída ao longo da linha, a distribuição de cargas tem uma simetria cilíndrica que será adequada à aplicação da Lei de Gauss.



O fluxo total será dado por:

$$\Phi_{TOTAL} = \Phi_{TAMPA(2,3)} + \Phi_{LATERAL}$$

Observe que $\Phi_{TAMPA(2,3)}$ representa a soma dos fluxos nas tampas do cilindro escolhido como superfície gaussiana:

$$\Phi_{TAMPA(2,3)} = E \cdot A_{TAMPA} \cdot \cos(90^\circ)$$

$$\Phi_{TAMPA(2,3)} = 0 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}$$

Agora $\Phi_{LATERAL}$ representa a soma dos fluxos na superfície lateral do cilindro escolhido como superfície gaussiana:

$$\Phi_{LATERAL} = |\vec{E}_i| \cdot \sum_{i=1}^N |\Delta \vec{A}_i| \cdot \cos(0^\circ)$$

A soma das áreas infinitesimais na lateral do cilindro será:

$$\sum_{i=1}^N |\Delta \vec{A}_i| = A_{LATERAL}$$

$$\Phi_{LATERAL} = E \cdot A_{LATERAL}$$

Lembrando-se que a área lateral do cilindro será:

$$A_{LATERAL} = 2\pi \cdot r \cdot H$$

Dessa maneira, podemos escrever:

$$\Phi_{LATERAL} = E \cdot (2\pi \cdot r \cdot H)$$

Logo, o fluxo elétrico total será dado por:

$$\Phi_{TOTAL} = \Phi_{TAMPA(2,3)} + \Phi_{LATERAL}$$

$$\Phi_{TOTAL} = 0 + E \cdot (2\pi \cdot r \cdot H)$$

$$\Phi_{TOTAL} = E \cdot (2\pi \cdot r \cdot H)$$

Sabe-se que a densidade linear de cargas (λ) é dada por:

$$\lambda = \frac{q_{ENV}}{H} \Rightarrow q_{ENV} = \lambda \cdot H$$

Da Lei de Gauss:

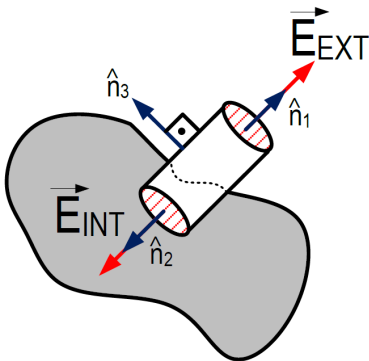
$$\Phi_{TOTAL} = \frac{q_{ENV}}{\epsilon_0}$$

$$E \cdot (2\pi \cdot r \cdot H) = \frac{\lambda \cdot H}{\epsilon_0}$$

$$E = \frac{\lambda}{2\pi \cdot \epsilon_0 \cdot r}$$

11. Campo elétrico na superfície de um condutor

Considere um condutor de forma irregular carregado. A densidade superficial de cargas varia de ponto a ponto. Tomemos um pequeno elemento de área carregado com densidade superficial igual a σ . Vamos construir uma superfície gaussiana de forma cilíndrica. O campo elétrico na superfície do condutor é perpendicular à superfície no ponto considerado. O fluxo elétrico neste caso só possuirá contribuições nas bases do cilindro pois o campo elétrico é perpendicular ao vetor normal da superfície lateral do cilindro.



$$\Phi_{TOTAL} = \Phi_{BASE(1,2)} + \Phi_{LATERAL}$$

Nas bases do cilindro infinitesimal, temos:

$$\Phi_{BASE(1)} = E_{EXT} \cdot A_{BASE} \cdot \cos(0^\circ)$$

$$\boxed{\Phi_{BASE(1)} = E_{EXT} \cdot A}$$

$$\Phi_{BASE(2)} = E_{INT} \cdot A_{BASE} \cdot \cos(0^\circ)$$

$$\boxed{\Phi_{BASE(2)} = E_{INT} \cdot A = 0 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}}$$

Na superfície lateral do cilindro:

$$\Phi_{LATERAL} = E \cdot A_{LATERAL} \cdot \cos(90^\circ) = 0 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}$$

Finalmente:

$$\boxed{\Phi_{TOTAL} = E_{EXT} \cdot A}$$

Da Lei de Gauss:

$$\Phi_{TOTAL} = \frac{q_{ENV}}{\epsilon_0}$$

Lembre-se que:

$$\sigma = \frac{q_{ENV}}{A} \Rightarrow q_{ENV} = \sigma \cdot A$$

Da Lei de Gauss:

$$\Phi_{TOTAL} = \frac{q_{ENV}}{\epsilon_0}$$

$$E_{EXT} \cdot A = \frac{\sigma \cdot A}{\epsilon_0}$$

$$\boxed{E_{EXT} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}}$$

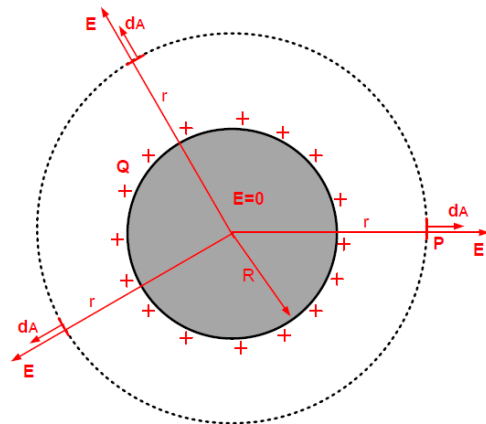
Observações:

O campo elétrico varia descontinuamente na superfície de um condutor elétrico. Vimos que dentro do condutor o campo elétrico é nulo e em sua superfície externa ele é máximo e vale $E = \sigma/\epsilon_0$. Na verdade, o campo elétrico decresce de $E = \sigma/\epsilon_0$ até um valor nulo em uma camada de espessura de 4 a 5 diâmetros atômicos.

Condutor com forma esférica

A figura a seguir pode ser considerada como um condutor esférico maciço ou uma casca esférica, ou seja, uma esfera com cavidade.

a) pontos externos ao condutor esférico ($r > R$)



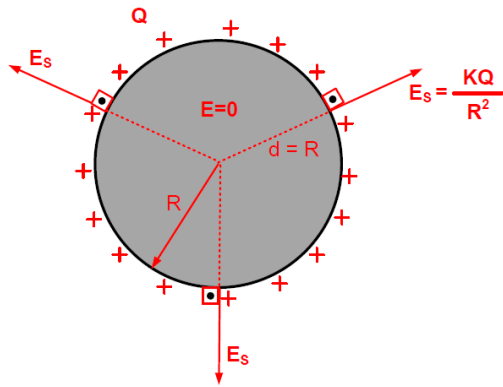
Considere uma carga Q uniformemente distribuída sobre a superfície externa de uma esfera de raio R e p um ponto a uma distância r do centro da esfera. Construindo uma superfície Gaussiana passando por p , conforme figura acima temos:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q}{\epsilon_0} \Rightarrow \oint E \cdot dA = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \quad (r > R)$$

b) Pontos na superfície do condutor esférico ($r = R$)

Agora repare que as cargas na superfície da esfera apresentam densidade superficial constante, uma vez que a distribuição é uniforme.



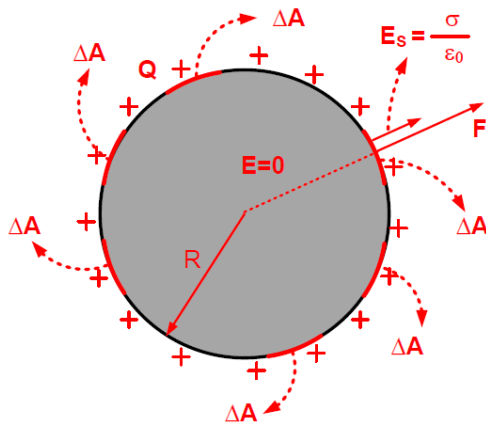
O campo elétrico na superfície da esfera vale:

$$E_s = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \text{ como } \sigma = \frac{Q}{4\pi R^2}$$

$$E_s = \frac{Q}{4\pi R^2 \epsilon_0} \Rightarrow E_s = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{Q}{R^2} \quad (r = R)$$

Força sobre uma superfície eletrizada

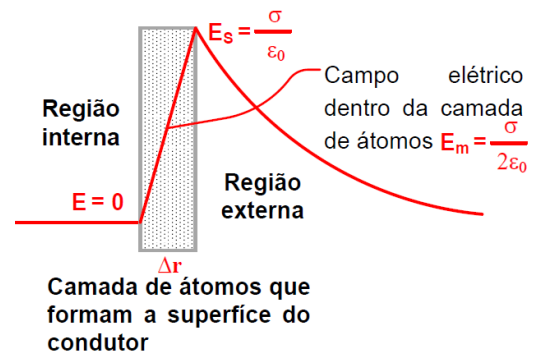
Nós sabemos que cargas de sinais iguais se repelem e desse modo uma pequena região superficial ΔA de um condutor eletrizado é repelida por todos os outros elementos de cargas do restante da esfera condutora conforme figura a seguir.



Sabemos que a intensidade do campo elétrico na superfície da esfera vale $E_s = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$, enquanto que dentro da esfera vale $E = 0$. A questão aqui é qual valor que deve ser usado para calcular a força sobre cada elemento de carga?

Na realidade cargas superficiais não se encontram numa camada de espessura nula. Cargas na superfície de um metal podem estar distribuídas através de uma camada de vários angstroms de profundidade. A figura a seguir mostra uma pequena porção da esfera ampliada mostrando o campo

elétrico dentro, no interior da camada de átomos e na superfície do condutor.



Como estamos considerando uma distribuição de cargas numa camada de espessura muito pequena, mas finita (Δr), podemos desprezar a curvatura da superfície e considerar cada elemento de superfície ΔA como uma camada plana. Assim, baseado na lei de Gauss podemos mostrar que o campo elétrico cresce linearmente através da camada atingindo seu valor máximo na superfície externa conforme figura acima.

Assim a intensidade do campo elétrico médio nessa camada de cargas é dada pela média aritmética dos valores extremos.

$$E_m = \frac{0 + E_s}{2} \Rightarrow E_m = \frac{0 + \frac{\sigma}{\epsilon_0}}{2} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

$$E_m = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

A força experimentada por um elemento de carga Δq distribuído em cada elemento de superficial ΔA é dado por:

$$F = \Delta q E_m \Rightarrow F = \Delta q \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

Usando o conceito de densidade superficial temos:

$$\sigma = \frac{\Delta q}{\Delta A} \Rightarrow \Delta q = \sigma \Delta A$$

Substituindo na equação de força vem:

$$F = \Delta q \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \Rightarrow F = \sigma \Delta A \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

$$\frac{F}{\Delta A} = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0}$$

A expressão acima que fornece a força por unidade de área recebe o nome de **tensão ou pressão eletrostática**.

O campo elétrico resultante imediatamente fora da superfície é dado por:

$$E_{\text{resultante em } M} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

Na equação $\frac{F}{\Delta A} = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0}$, podemos substituir o valor de σ , obtendo:

$$P_e = \frac{(\epsilon_0 E_{\text{resultante}})^2}{2\epsilon_0}$$

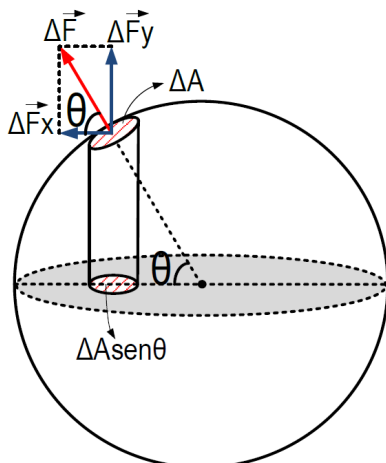
$$P_e = \frac{1}{2} \epsilon_0 E_{\text{resultante}}^2$$

Para um corpo metálico carregado, em qualquer ponto de sua superfície, a pressão elétrica é dada pela equação $\frac{F}{\Delta A} = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0}$ ou pela equação $P_e = \frac{1}{2} \epsilon_0 E_{\text{resultante}}^2$. Como discutido, essa pressão é causada pelas cargas presentes nas outras partes do corpo. A equação $\frac{F}{\Delta A} = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0}$ fornece a pressão elétrica em termos da densidade superficial de carga do corpo no ponto local da superfície, enquanto a equação $\frac{1}{2} \epsilon_0 E_{\text{resultante}}^2$ fornece a pressão elétrica em termos do campo elétrico resultante imediatamente fora do ponto da superfície do corpo onde a pressão elétrica está sendo exercida.

EXEMPLO 17: Uma esfera condutora de raio R é cortada em duas metades iguais que são mantidas pressionadas juntas por uma mola rígida dentro da esfera.

- Encontre a mudança de tensão na mola se a esfera receber uma carga Q .
- Encontre a mudança de tensão na mola correspondente à carga máxima que pode ser colocada na esfera se a rigidez dielétrica do ar que circunda a esfera for E_0 .

Resolução:



A pressão eletrostática na superfície da esfera carregada com densidade superficial σ é dada por:

$$P = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0}$$

A carga infinitesimal (Δq) em uma área infinitesimal ΔS é dada por:

$$\Delta q = \sigma \cdot \Delta S$$

A força infinitesimal ΔF na direção radial é dada por:

$$\Delta F = P \cdot \Delta S = \left(\frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} \right) \cdot \Delta S$$

Levando-se em conta argumentos de simetria a força resultante que atua sobre os hemisférios ao longo do eixo x é dada por:

$$F = \sum_i \Delta F \cdot \sin \theta = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} \cdot \sum_i \Delta S \cdot \sin \theta$$

Lembre-se que a área projetada é dada por:

$$\sum_i \Delta S \cdot \sin \theta = A_{\text{PROJETADA}} = \pi \cdot R^2$$

$$F = \sum_i \Delta F \cdot \sin \theta = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} \cdot (\pi \cdot R^2)$$

Lembrando:

$$\sigma = \frac{Q}{4\pi \cdot R^2}$$

Logo:

$$F = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} \cdot (\pi \cdot R^2) = \frac{Q^2}{32\pi \cdot \epsilon_0 \cdot R^2}$$

b) Conforme anteriormente, o campo elétrico na superfície externa de um condutor é dado por:

$$E_0 = \frac{\sigma_{\text{MÁX}}}{\epsilon_0} \Rightarrow \sigma_{\text{MÁX}} = \epsilon_0 \cdot E_0$$

$$Q_{\text{MÁX}} = \sigma_{\text{MÁX}} \cdot 4\pi \cdot R^2 = (\epsilon_0 \cdot E_0) \cdot 4\pi \cdot R^2$$

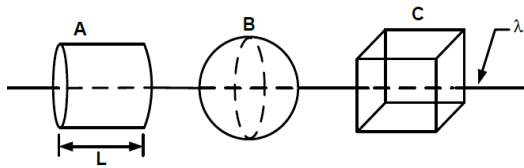
$$F = \frac{(Q_{\text{MÁX}})^2}{32\pi \cdot \epsilon_0 \cdot R^2} = \frac{(\epsilon_0 \cdot E_0 \cdot 4\pi \cdot R^2)^2}{32\pi \cdot \epsilon_0 \cdot R^2}$$

$$F = \frac{\pi \cdot \epsilon_0 \cdot E_0^2 \cdot R^2}{2}$$

EXERCÍCIOS

1. Determine o fluxo elétrico sobre a superfície $\vec{S} = 2\hat{j}$, sabendo que o campo elétrico sobre a superfície é dado por: $\vec{E} = \hat{i} - 7\hat{j} + \hat{k}$?

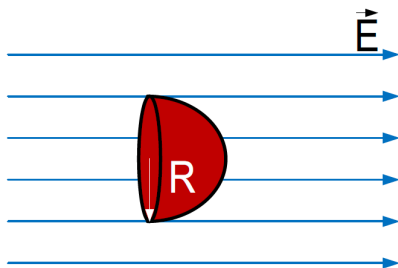
2. (ITA-2000) Um fio de densidade linear de carga positiva λ atravessa três superfícies fechadas A , B e C , de formas respectivamente cilíndrica, esférica e cúbica, como mostra a figura. Sabe-se que A tem comprimento $L =$ diâmetro de $B =$ comprimento de um lado de C , e que o raio da base de A é a metade do raio da esfera B .



Sobre o fluxo do campo elétrico, Φ , através de cada superfície fechada pode-se concluir que:

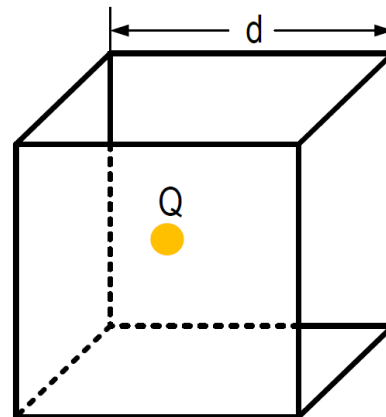
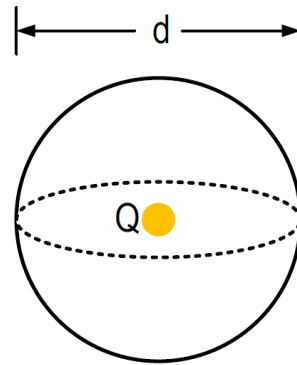
- a) $\Phi_A = \Phi_B = \Phi_C$
- b) $\Phi_A > \Phi_B > \Phi_C$
- c) $\Phi_A < \Phi_B < \Phi_C$
- d) $\frac{\Phi_A}{2} = \Phi_B = \Phi_C$
- e) $\Phi_A = 2\Phi_B = \Phi_C$

3. Um corpo hemisférico de raio R é colocado em um campo elétrico uniforme de módulo E conforme a figura abaixo.



Determine O fluxo elétrico total no interior da superfície hemisférica fechada.

4. A figura a seguir mostra duas superfícies gaussianas: uma delas é cúbica de aresta d e uma esfera de diâmetro igual a d . A carga elétrica líquida envolvida por ambas as superfícies é igual a Q . Se Φ_C denota o fluxo elétrico no cubo e Φ_E denota o fluxo elétrico da esfera. Qual a relação entre os fluxos elétricos em ambas as superfícies?



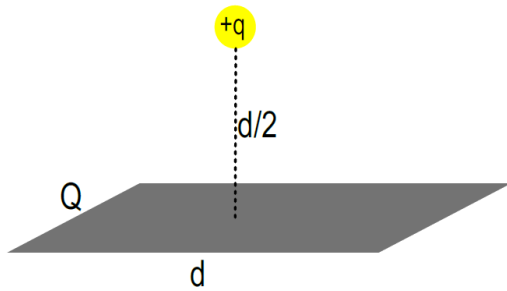
- a) $\Phi_C = \left(\frac{\pi}{6}\right) \cdot \Phi_E$
- b) $\Phi_C = \left(\frac{\pi}{3}\right) \cdot \Phi_E$
- c) $\Phi_C = \Phi_E$
- d) $\Phi_C = \left(\frac{3}{\pi}\right) \cdot \Phi_E$
- e) $\Phi_C = \left(\frac{6}{\pi}\right) \cdot \Phi_E$

5. Calcule o fluxo elétrico sobre uma superfície gaussiana de área A que envolve um dipolo elétrico em que cada carga do dipolo possui uma carga de módulo igual a q .

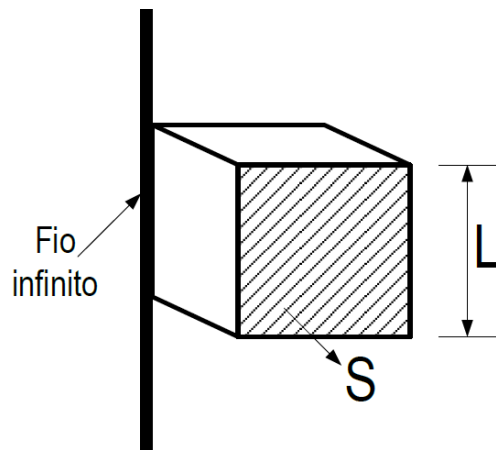
- a) $\Phi_E = 0$
- b) $\Phi_E = \frac{q \cdot A}{4\pi \cdot \epsilon}$
- c) $\Phi_E = \frac{q^2 \cdot A}{4\pi \cdot \epsilon}$
- d) $\Phi_E = \frac{q \cdot A}{2\pi \cdot \epsilon}$
- e) $\Phi_E = \frac{q^2 \cdot A}{2\pi \cdot \epsilon}$

6. Um quadrado de lado d , feito de uma fina placa isolante, está uniformemente carregado com uma carga Q . Uma carga pontual q está localizada simetricamente sobre o eixo normal do quadrado a uma distância $d/2$ da placa. Determine a força

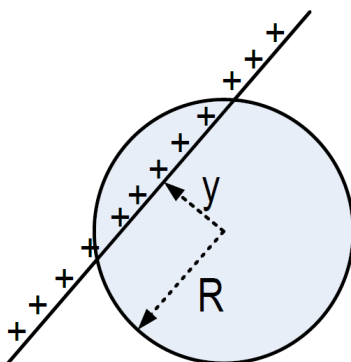
atuando sobre a carga puntiforme q . ($k_0 =$ constante eletrostática)



7. Um fio infinito tem densidade linear de carga λ e está em contato com uma aresta de um cubo, conforme figura. Determine o fluxo elétrico através da superfície S . $\epsilon_0 \rightarrow$ permissividade elétrica.



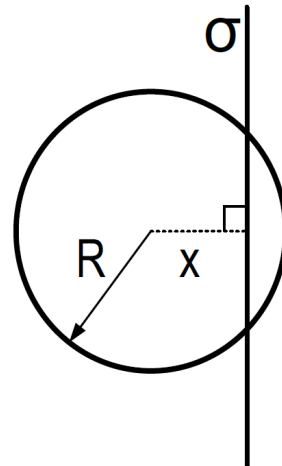
8. Uma longa linha tem densidade linear de carga λ e está localizada a uma distância y de um ponto O . Considere uma esfera imaginária de raio R , com centro no ponto O e $R > y$. O fluxo elétrico através da superfície da esfera é:



- a) zero
- b) $\frac{2\lambda R}{\epsilon_0}$
- c) $\frac{2\lambda\sqrt{R^2-y^2}}{\epsilon_0}$

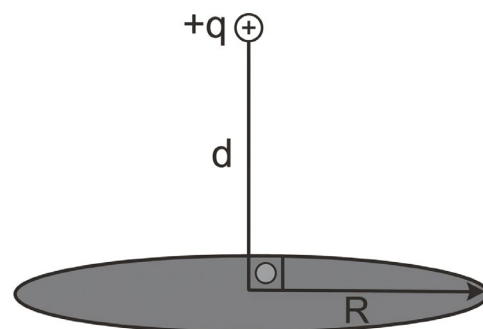
d) $\frac{\lambda\sqrt{R^2+y^2}}{\epsilon_0}$

9. Uma superfície plana infinita, uniformemente carregada com densidade superficial σ , tem uma parte envolvida por uma esfera de raio R , centrada em um ponto situado a uma distância x do plano, conforme mostra a figura. Determine o fluxo do campo elétrico através da superfície esférica.

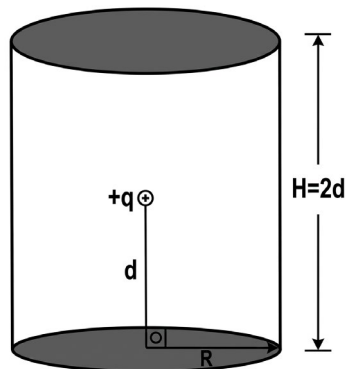


- a) $\frac{\pi \cdot R^2 \cdot \sigma}{\epsilon_0}$
- b) $\frac{2\pi \cdot R^2 \cdot \sigma}{\epsilon_0}$
- c) $\frac{\pi \cdot (R-x)^2 \cdot \sigma}{\epsilon_0}$
- d) $\frac{\pi \cdot (R^2-x^2) \cdot \sigma}{\epsilon_0}$
- e) $\frac{2\pi \cdot (R^2-x^2) \cdot \sigma}{\epsilon_0}$

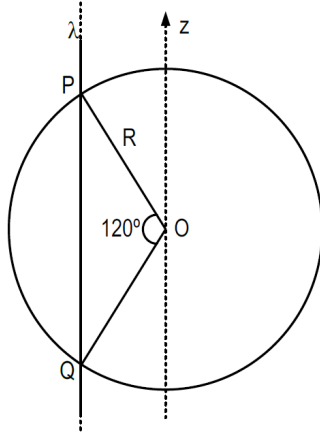
10. (KUMAR SHARMA) Uma carga puntiforme $+q$ encontra-se a uma distância d do centro de um disco circular, de raio R , sobre o seu eixo. Se a permissividade elétrica do meio vale ϵ , determine o fluxo do campo elétrico gerado por essa carga através desse disco.



11. Uma carga elétrica $+Q$ se encontra no centro de um cilindro de altura d e raio R . O professor Laerte pede que você determine o fluxo elétrico através da superfície lateral do cilindro.

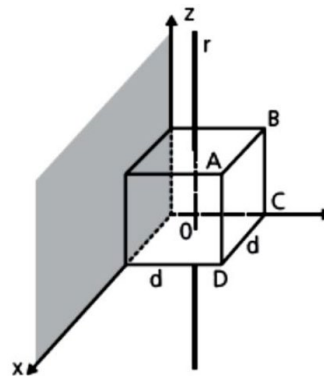


12. Um fio não condutor, infinitamente longo, é paralelo ao eixo de uma esfera. A linha infinita de cargas possui uma densidade de carga igual a λ . Ele perfura uma fina camada esférica não condutora de raio R , de tal forma que o arco PQ subtende um ângulo de 120° no centro O da casca esférica, como mostrado na figura. A permissividade elétrica do vácuo é ϵ_0 . Qual o valor do fluxo elétrico sobre a casca esférica?



- a) $\Phi = \frac{\lambda \cdot R}{\epsilon_0}$
- b) $\Phi = \frac{\sqrt{2} \cdot \lambda \cdot R}{\epsilon_0}$
- c) $\Phi = \frac{\sqrt{3} \cdot \lambda \cdot R}{\epsilon_0}$
- d) $\Phi = \frac{2 \cdot \lambda \cdot R}{\epsilon_0}$
- e) $\Phi = \frac{\sqrt{5} \cdot \lambda \cdot R}{\epsilon_0}$

13. Na figura está esquematizado um cubo de aresta d , com um dos seus vértices na origem de um sistema de coordenadas cartesianas x , y e z . As arestas do cubo são paralelas aos eixos coordenados. Um fio retilíneo r , paralelo ao eixo z , passa pelo centro geométrico do cubo e está eletrizado com densidade linear de carga λ . O plano xz está carregado com densidade superficial de carga σ . Supondo que o meio seja o vácuo e sabendo que o campo eletrostático gerado por um plano uniformemente eletrizado é dado por $E = \frac{\sigma}{2 \cdot \epsilon_0}$ o fluxo do vetor campo eletrostático resultante na face $ABCD$, é:



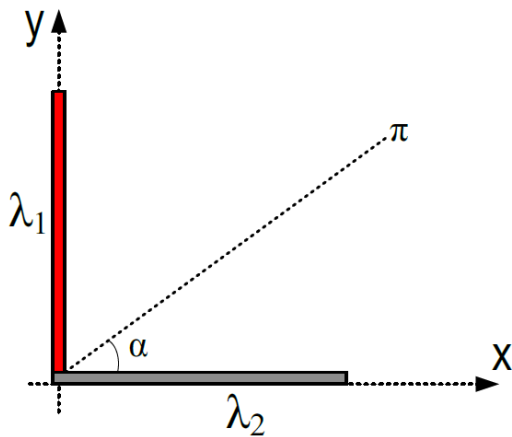
- a) $\Phi = \frac{\sigma \cdot d^2}{2 \cdot \epsilon_0} + \frac{\lambda \cdot d}{4 \cdot \epsilon_0}$
- b) $\Phi = \frac{\sigma \cdot d^2}{4 \cdot \epsilon_0} + \frac{\lambda \cdot d}{\epsilon_0}$
- c) $\Phi = \frac{\sigma \cdot d^2}{4 \cdot \epsilon_0}$
- d) $\Phi = \frac{\lambda \cdot d}{\epsilon_0}$
- e) $\Phi = \frac{\sigma \cdot d^2}{2 \cdot \epsilon_0} + \frac{\lambda \cdot d}{\pi \cdot \epsilon_0}$

14. Determine o módulo da força por unidade de comprimento exercida por uma lâmina dielétrica delgada, carregada uniformemente com densidade superficial de carga σ sobre um fio muito longo, carregado uniformemente com densidade linear de carga λ .

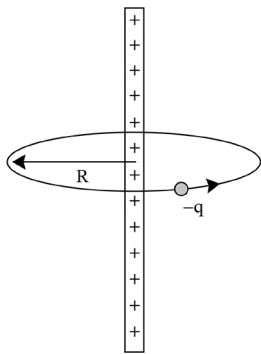
- a) $\frac{\sigma \cdot \lambda}{\epsilon_0}$
- b) $\frac{\sigma \cdot \lambda}{2 \epsilon_0}$
- c) $\frac{\sigma \cdot \lambda}{\pi \epsilon_0}$
- d) $\frac{\sigma \cdot \lambda}{2 \pi \cdot \epsilon_0}$

e) Não se pode encontrar a resposta sem que seja fornecida a distância entre a lâmina e o fio.

15. Dois fios mutuamente perpendiculares com densidade linear de cargas λ_1 e λ_2 estão representados na figura abaixo. Entre várias linhas de força que representam os campos elétricos, há a linha π que passa pelo ponto de intersecção dos fios. Determine o valor do ângulo α em função de λ_1 e λ_2 e das constantes pertinentes.

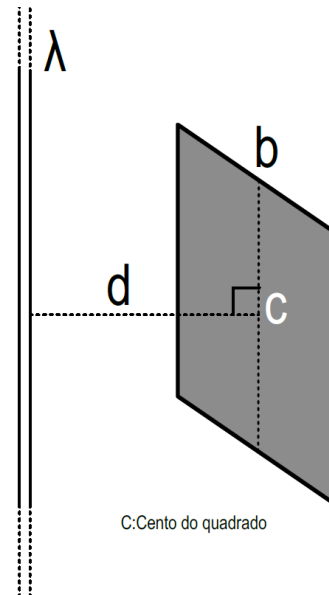


16. Considere um fio retilíneo infinitamente longo uniformemente eletrizado com densidade linear de cargas positiva $+\lambda$, imerso no vácuo, cuja permissividade elétrica vale ϵ_0 . Uma partícula puntiforme de massa m e carga elétrica $-q$ descreve um MCU de raio R em volta desse fio sob ação exclusiva da atração eletrostática exercida por ele. O período desse MCU corresponde a:

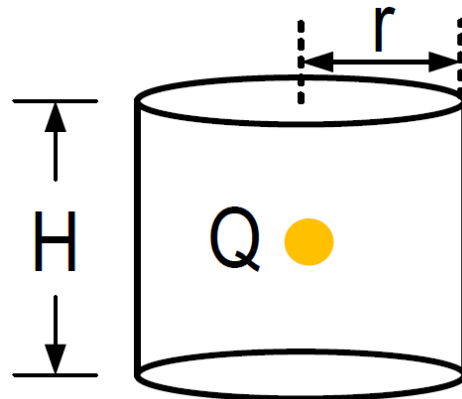


- a) $2\pi R \cdot \sqrt{\frac{2\pi m \epsilon_0}{\lambda q}}$
- b) $4\pi R \cdot \sqrt{\frac{2\pi m \epsilon_0}{\lambda q}}$
- c) $2\pi R \cdot \sqrt{\frac{m \epsilon_0}{\lambda q}}$
- d) $2\pi R \cdot \sqrt{\frac{\pi m \epsilon_0}{\lambda q}}$
- e) $4\pi R \cdot \sqrt{\frac{\pi m \epsilon_0}{\lambda q}}$

17. Considere um fio muito longo de comprimento b , com densidade linear de carga λ . Determine o fluxo elétrico através da superfície quadrada de lado b , localizada a uma distância d , a partir do seu centro, do fio.

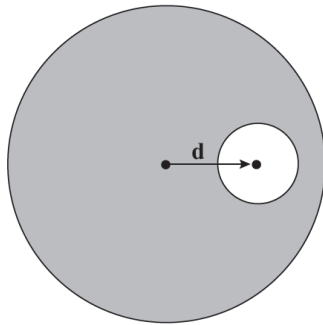


18. Na figura abaixo, temos uma carga Q no centro de um cilindro de altura $H = 2R$ e cuja base é uma circunferência de raio $r = 2\sqrt{2}R$. Determine o fluxo elétrico através da área lateral do cilindro.

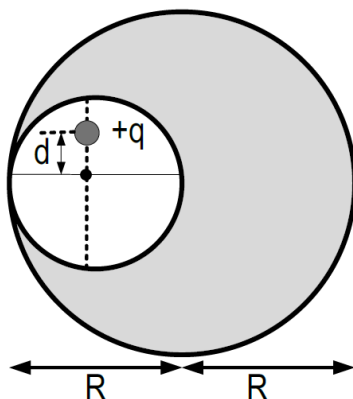


- a) $\Phi = \frac{Q}{\epsilon_0}$
- b) $\Phi = \frac{Q}{2\epsilon_0}$
- c) $\Phi = \frac{Q}{3\epsilon_0}$
- d) $\Phi = \frac{Q}{4\epsilon_0}$
- e) $\Phi = \frac{Q}{5\epsilon_0}$

19. (H. MOYSÉS) Uma esfera uniformemente carregada com densidade volumétrica ρ contém em seu interior uma cavidade esférica. Mostre que o campo no interior da cavidade é uniforme e é dado por $\vec{E} = \rho \vec{d} / (3\epsilon_0)$, onde $\vec{d}$ é o vetor que liga os centros das duas esferas (figura). *Sugestão:* Use o princípio de superposição.



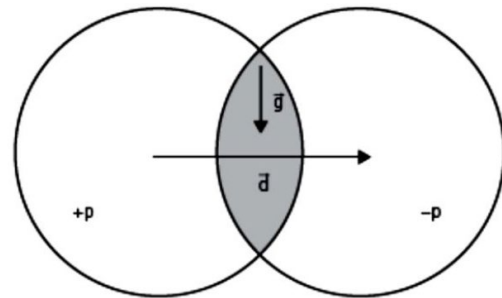
20. Uma esfera maciça isolante de raio R , eletrizada positivamente com densidade volumétrica de carga $+\rho$, tem em seu interior uma cavidade vazia de diâmetro R . Uma carga puntiforme $+q$ foi posicionada no interior da cavidade a uma distância $d < R/4$ do centro da esfera, num meio de permissividade elétrica ϵ . A intensidade da força que atuará na carga puntiforme $+q$ será:



- a) $\frac{\rho \cdot q \cdot R}{3\epsilon}$
- b) $\frac{\rho \cdot q \cdot R}{6\epsilon}$
- c) $\frac{\rho \cdot q \cdot d}{6\epsilon}$
- d) $\frac{\rho \cdot q \cdot R}{2\epsilon}$
- e) $\frac{\rho \cdot q \cdot (R-2d)}{6\epsilon}$

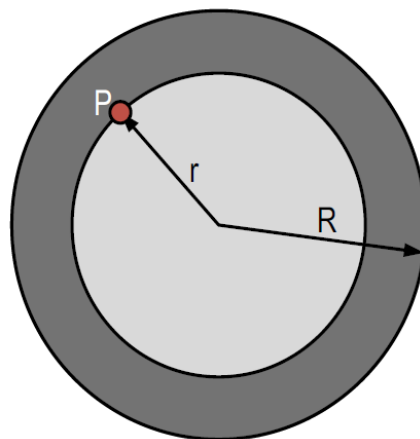
21. Um aluno muito curioso estava estudando eletricidade e teve uma ideia nada convencional. Ele imaginou duas esferas de mesmo raio R e com distribuições volumétricas de carga $+\rho$ e $-\rho$,

respectivamente, e que estão posicionadas de forma que se sobreponham parcialmente. Chame o vetor do centro positivo até o centro negativo de $\vec{d}$ (a linha que liga os centros é horizontal). Nesta região de interseção ele imaginou um pêndulo simples (carregado) e este começa a oscilar com ângulos pequenos. Se m é a massa do pêndulo, g é o módulo da gravidade na região, l é o comprimento do fio e T é o período das pequenas oscilações, o garoto pode afirmar que a carga do pêndulo é dada por:



- a) $Q = \frac{3\epsilon_0 \cdot m}{2\rho \cdot d} \sqrt{l^2 \cdot \left(\frac{\pi}{T}\right)^4 + g^2}$
- b) $Q = \frac{\sqrt{3}\epsilon_0 \cdot m}{2\rho \cdot d} \sqrt{l^2 \cdot \left(\frac{2\pi}{T}\right)^4 - g^2}$
- c) $Q = \frac{3\epsilon_0 \cdot m}{\sqrt{2}\rho \cdot d} \sqrt{l^2 \cdot \left(\frac{2\pi}{T}\right)^4 + g^2}$
- d) $Q = \frac{3\epsilon_0 \cdot m}{\rho \cdot d} \sqrt{l^2 \cdot \left(\frac{2\pi}{T}\right)^4 - g^2}$
- e) $Q = \frac{3\epsilon_0 \cdot m}{\rho \cdot d} \sqrt{l^2 \cdot \left(\frac{2\pi}{T}\right)^4 - g^2}$

22. Uma esfera dielétrica de raio R contém uma carga total de $-Q$, distribuída uniformemente por todo o seu volume (isto é, a densidade volumétrica de carga ρ é constante). O módulo do campo elétrico no ponto P , a uma distância $r < R$ do centro da esfera, é igual a:



a) $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{R^3} \cdot r$

b) $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{R^3} \cdot r^2$

c) $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{R^3} \cdot r^3$

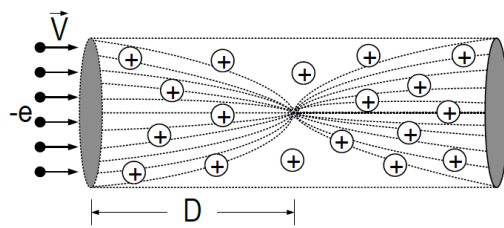
d) $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2}$

23. Considere um cilindro dielétrico com densidade volumétrica uniforme ρ de raio R , calcule o módulo do campo elétrico para duas situações distintas.

a) Ponto externos do cilindro ($r \geq R$);

b) Pontos internos do cilindro ($r \leq R$).

24. Um feixe de elétrons é focalizado em função de uma carga volumétrica positiva distribuída ao longo de um cilindro. Determine a distância D onde os elétrons se focalizam, sabendo-se que na entrada a velocidade é V e a densidade de carga positiva é ρ .



Dados:

$-e \rightarrow$ carga do elétron

$m \rightarrow$ massa do elétron

$\epsilon_0 \rightarrow$ permissividade elétrica

a) $V \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{2m \cdot \epsilon_0}{\rho \cdot e}}$

b) $\frac{V \cdot \pi}{2} \cdot \sqrt{\frac{2m \cdot \epsilon_0}{\rho \cdot e}}$

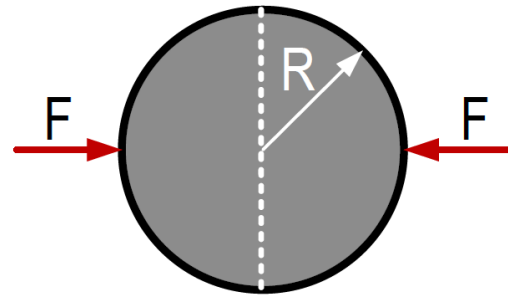
c) $\frac{V \cdot \pi}{4} \cdot \sqrt{\frac{2m \cdot \epsilon_0}{\rho \cdot e}}$

d) $\frac{V \cdot \pi}{2} \cdot \sqrt{\frac{m \cdot \epsilon_0}{\rho \cdot e}}$

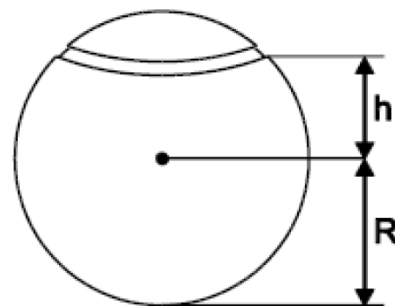
e) $\frac{V \cdot \pi}{8} \cdot \sqrt{\frac{2m \cdot \epsilon_0}{\rho \cdot e}}$

25. Um invólucro esférico fino e uniformemente carregado de raio R tem uma densidade superficial de carga uniforme de σ por unidade de área. É feito de duas conchas hemisféricas, mantidas unidas

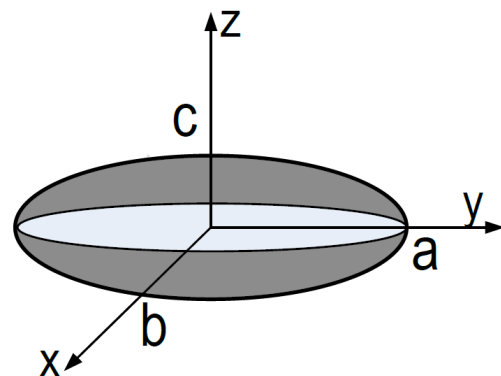
pressionando-as com força F . Encontre o valor da força F .



26. Considere uma esfera oca condutora carregada com $+Q$. Conforme a figura, é dado um corte a uma altura h acima do centro da esfera. Determine a carga q necessária que deverá ser colocada no centro para que as esferas não se separem.



27. A figura representa um elipsoide metálico, com densidade superficial de carga σ . Sendo ϵ_0 a permissividade elétrica, determine a força de repulsão (em módulo) entre as partes do elipsoide, isto é, a parte de cima do plano xyz e a parte de baixo do plano xyz .



a) $\frac{\pi \cdot \sigma^2}{2\epsilon_0} \cdot \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

b) $\frac{\pi \cdot \sigma^2}{2\epsilon_0} \cdot \sqrt{a^4 + b^4 + c^4}$

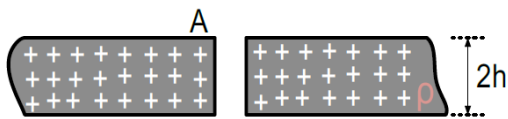
c) $\frac{\pi \cdot \sigma^2}{2\epsilon_0} \cdot a \cdot b$

d) $\frac{\pi \cdot \sigma^2}{2\epsilon_0} \cdot (ab + c^2)$

e) $\frac{\pi \cdot \sigma^2}{2\epsilon_0} \cdot \frac{a^4 + b^4 + c^4}{a^2 + b^2 + c^2}$

Dica: Use o conceito de pressão eletrostática.

28. Considere uma placa infinita, de espessura $2h$, uniformemente carregada com uma densidade volumétrica ρ . Fez-se um furo de pequeno diâmetro, perpendicular à placa, conforme ilustrado na figura a seguir. Se uma pequena carga $-q$, de massa m , for abandonada no ponto A, ela iniciará um movimento harmônico simples, cujo período é indicado na alternativa.



a) $T = \pi \sqrt{\frac{m\epsilon}{q\rho}}$

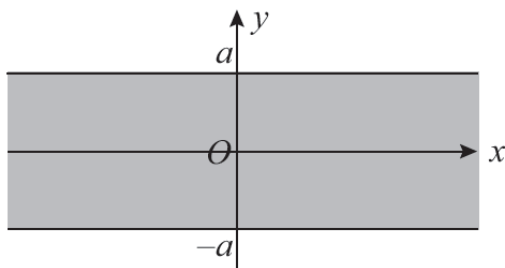
b) $T = 2\pi \sqrt{\frac{m\epsilon}{2q\rho}}$

c) $T = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{m\epsilon}{q\rho}}$

d) $T = 2\pi \sqrt{\frac{m\epsilon}{q\rho}}$

e) $T = 2\pi \sqrt{\frac{m\epsilon}{9q\rho}}$

29. (H. MOYSÉS) Uma camada carregada infinita compreendida entre os planos $y = -a$ e $y = a$ (figura) tem densidade volumétrica de carga ρ constante. Não há cargas fora dela. Calcule o campo elétrico E dentro, acima e abaixo da camada.



30. Determine o módulo do campo elétrico no centro de um cubo de lado a , cujas cinco faces estão carregadas uniformemente com uma densidade superficial σ , e cuja sexta face está descarregada.

a) $\frac{\sigma}{2\epsilon_0}$

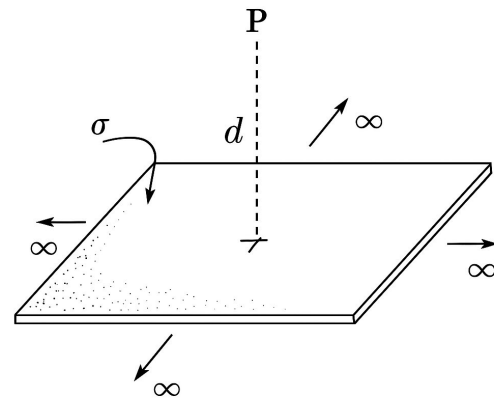
b) $\frac{\sigma}{5\epsilon_0}$

c) $\frac{\sigma}{4\epsilon_0}$

d) $\frac{\sigma}{3\epsilon_0}$

e) $\frac{\sigma}{6\epsilon_0}$

31. Na Figura, determine o módulo do campo elétrico no ponto P, criado por uma placa infinita muito fina, com densidade superficial uniforme de carga $\sigma = 4 \cdot 10^{-10} \text{ C/m}^2$. A distância do ponto P ao plano é $d = 10 \text{ cm}$. ($k = 9 \cdot 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2$)



a) 20,6 N/C

b) 22,6 N/C

c) 24,6 N/C

d) 26,6 N/C

e) 28,6 N/C

32. Demonstre que, se o campo elétrico produzido por uma carga pontual é dado por

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^{2+\epsilon_0}},$$

em que ϵ_0 é um número pequeno, então não se pode validar a Lei de Gauss.

Sugestão: Avalie o fluxo total que atravessa uma superfície esférica que rodeia a carga Q .

GABARITO

1. Na aula

2. Pela Lei de Gauss sabemos que o fluxo é proporcional a quantidade de carga dentro da superfície Ω :

$$\Phi_{\Omega,E} = \frac{q_{\text{interna}}}{\epsilon_0}$$

$$\Phi_A = \frac{L\lambda}{\epsilon_0}$$

$$\Phi_B = \frac{D_B\lambda}{\epsilon_0} = \frac{L\lambda}{\epsilon_0} = \Phi_A$$

$$\Phi_C = \frac{a_C\lambda}{\epsilon_0} = \frac{L\lambda}{\epsilon_0} = \Phi_A$$

Gabarito: A

3. Na aula

4. Resolução Comentada:

Os fluxos elétricos nas superfícies são iguais, pois a carga elétrica envolvida por elas é igual. Logo:

$$\Phi_{\text{ESFERA}} = \Phi_{\text{CUBO}} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

5. Resolução Comentada:

A carga líquida no interior da superfície gaussiana é dada por:

$$Q_{\text{ENV}} = +q + (-q) = 0$$

O fluxo elétrico através da superfície gaussiana será dado por:

$$\Phi_E = \frac{Q_{\text{ENV}}}{\epsilon_0} = 0 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2$$

6. Resolução Comentada:

O fluxo através de um cubo de lado d que envolve a carga q é dado por:

$$\Phi_{\text{CUBO}} = \frac{q}{\epsilon_0} = 6 \cdot \Phi_{\text{FACE}}$$

$$\Phi_{\text{FACE}} = \frac{q}{6 \cdot \epsilon_0} = \sum_{i=1}^n |\vec{E}_i| \cdot \Delta A_i \cdot \cos \theta$$

Sobre o elemento infinitesimal de área há uma carga dada por:

$$\sigma = \frac{Q}{d^2} = \frac{|\Delta q|}{\Delta A_i}$$

$$|\Delta q| = \sigma \cdot \Delta A_i$$

A força sobre um elemento de carga ΔA_i é dada por:

$$|\Delta \vec{F}_i| = |\Delta q| \cdot |\vec{E}_i| = \sigma \cdot \Delta A_i \cdot |\vec{E}_i|$$

Por simetria, percebemos que apenas os componentes verticais de $|\Delta \vec{F}_i|$ vão contribuir para a força resultante $|\vec{F}_R|$:

$$|\vec{F}_R| = \sum_{i=1}^n |\Delta \vec{F}_i| \cdot \cos \theta$$

$$|\vec{F}_R| = \sum_{i=1}^n \sigma \cdot \Delta A_i \cdot |\vec{E}_i| \cdot \cos \theta$$

$$|\vec{F}_R| = \sigma \cdot \left(\sum_{i=1}^n |\vec{E}_i| \cdot \Delta A_i \cdot \cos \theta \right)$$

$$|\vec{F}_R| = \sigma \cdot \frac{q}{6 \cdot \epsilon_0} = \frac{\sigma \cdot q}{6 \cdot \epsilon_0}$$

$$|\vec{F}_R| = \frac{Q}{d^2} \cdot \frac{q}{6 \cdot \epsilon_0}$$

7. Resolução Comentada:

A carga elétrica em um comprimento L será dada por:

$$\lambda = \frac{Q}{L} \Rightarrow Q = \lambda \cdot L$$

Pela simetria do problema, o fluxo total Φ_{TOTAL} está relacionado ao fluxo na superfície escolhida (Φ) da forma:

$$\Phi_{\text{TOTAL}} = \frac{Q}{\epsilon_0} = 8 \cdot \Phi$$

$$\Phi = \frac{Q}{8 \cdot \epsilon_0} = \frac{\lambda \cdot L}{8 \cdot \epsilon_0}$$

8. Resolução Comentada:

$$x^2 + y^2 = R^2 \Rightarrow x = \sqrt{R^2 - y^2}$$

$$\lambda = \frac{Q_{ENV}}{2x} \Rightarrow Q_{ENV} = 2 \cdot \lambda \cdot \sqrt{R^2 - y^2}$$

$$\Phi_E = \frac{Q_{ENV}}{\epsilon_0} = \frac{2 \cdot \lambda \cdot \sqrt{R^2 - y^2}}{\epsilon_0}$$

9. Resolução comentada:

$$R^2 = x^2 + r^2 \Rightarrow r^2 = R^2 - x^2$$

$$A = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot (R^2 - x^2)$$

$$\sigma = \frac{Q_{ENV}}{A} \Rightarrow Q_{ENV} = \sigma \cdot A = \sigma \cdot \pi \cdot (R^2 - x^2)$$

$$\Phi_E = \frac{Q_{ENV}}{\epsilon_0} = \frac{\sigma \cdot \pi \cdot (R^2 - x^2)}{\epsilon_0}$$

10. Resolução Comentada:

$$r = (d^2 + R^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\cos \theta = \frac{d}{r} = \frac{d}{(d^2 + R^2)^{\frac{1}{2}}}$$

Envolvendo a carga por uma esfera de raio r , podemos calcular o fluxo elétrico sobre a calota esférica de abertura angular θ , como já visto na teoria:

$$\Phi_{CALOTA} = \frac{q}{2\epsilon_0} \cdot [1 - \cos \theta] = \frac{q}{2\epsilon_0} \cdot \left[1 - \frac{d}{(d^2 + R^2)^{\frac{1}{2}}} \right]$$

Como o número de linhas de força que atravessa a calota esférica é idêntico ao número de linhas que atravessam o disco, podemos escrever:

$$\Phi_{CALOTA} = \Phi_{DISCO} = \frac{q}{2\epsilon_0} \cdot \left[1 - \frac{d}{(d^2 + R^2)^{\frac{1}{2}}} \right]$$

11. Resolução Comentada:

Do problema resolvido anteriormente, podemos escrever:

$$\Phi_{DISCO} = \frac{q}{2\epsilon_0} \left[1 - \frac{d}{(d^2 + R^2)^{\frac{1}{2}}} \right]$$

O fluxo total através do cilindro é dado por:

$$\Phi_{TOTAL} = 2 \cdot \Phi_{DISCO} + \Phi_{LATERAL}$$

$$\frac{q}{\epsilon_0} = 2 \cdot \frac{q}{2\epsilon_0} \left[1 - \frac{d}{(d^2 + R^2)^{\frac{1}{2}}} \right] + \Phi_{LATERAL}$$

$$\Phi_{LATERAL} = \frac{q}{\epsilon_0} \left[\frac{d}{(d^2 + R^2)^{\frac{1}{2}}} \right]$$

12. Resposta: C

Resolução Comentada:

$$\sin(60^\circ) = \frac{x}{R} \Rightarrow x = R \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$L = 2x = R \cdot \sqrt{3}$$

$$\lambda = \frac{Q_{ENV}}{L} \Rightarrow Q_{ENV} = \lambda \cdot L = \lambda \cdot R \cdot \sqrt{3}$$

$$\Phi_E = \frac{Q_{ENV}}{\epsilon_0} = \frac{\lambda \cdot R \cdot \sqrt{3}}{\epsilon_0}$$

13. Resolução Comentada:

O fluxo elétrico que o plano promove através da face ABCD é dado por:

$$\Phi_{PLANO}^{ABCD} = |\vec{E}_{PLANO}| \cdot A_{FACE} \cdot \cos(0^\circ)$$

$$\Phi_{PLANO}^{ABCD} = \frac{|\sigma|}{2 \cdot \epsilon_0} \cdot d^2$$

O fluxo elétrico que a linha promove através das faces do cubo é dado por:

$$\Phi_{LINHA}^{CUBO} = \frac{|Q_{LINHA}|}{\epsilon_0} = 4 \cdot \Phi_{LINHA}^{ABCD}$$

$$\Phi_{\text{LINHA}}^{ABCD} = \frac{\lambda \cdot d}{4 \cdot \epsilon_0}$$

Assim, o fluxo através da face ABCD é dado por:

$$\Phi_{ABCD} = \Phi_{\text{PLANO}}^{ABCD} + \Phi_{\text{LINHA}}^{ABCD}$$

$$\Phi_{ABCD} = \frac{|\sigma| \cdot d^2}{2 \cdot \epsilon_0} + \frac{\lambda \cdot d}{4 \cdot \epsilon_0}$$

Nota: Nas faces superior e inferior do cubo o fluxo será nulo, pois, devido à simetria do fluxo promovido pela linha de cargas e pelo plano infinito, os vetores campo elétricos são ortogonais aos vetores normais a essas faces.

14. Resolução Comentada:

$$\lambda = \frac{\Delta q}{\Delta l} \Rightarrow \Delta q = \lambda \cdot \Delta l$$

$$|\Delta \vec{F}| = |\Delta q| \cdot |\vec{E}|$$

$$|\Delta \vec{F}| = (\lambda \cdot \Delta l) \cdot \frac{|\sigma|}{2 \cdot \epsilon_0}$$

$$\frac{|\Delta \vec{F}|}{\Delta l} = \frac{\lambda \cdot \sigma}{2 \cdot \epsilon_0}$$

15. Campo elétrico produzido por um fio infinito

Para determinar o campo elétrico de um fio infinito, utilizamos uma superfície gaussiana cilíndrica, coaxial com o fio.

Pela Lei de Gauss:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$$

Devido à simetria cilíndrica:

- O campo possui módulo constante na superfície lateral do cilindro;
- O campo é perpendicular à superfície lateral;
- O fluxo pelas bases é nulo.

Assim, considerando um cilindro de raio r e comprimento L :

$$\Phi_E = E \cdot 2\pi r L$$

A carga envolvida pelo cilindro é:

$$Q_{\text{int}} = \lambda L$$

Portanto:

$$E \cdot 2\pi r L = \frac{\lambda L}{\epsilon_0}$$

Cancelando L :

$$E \cdot 2\pi r = \frac{\lambda}{\epsilon_0}$$

Logo:

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$$

Como $k_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$, também podemos escrever:

$$E = \frac{2k_0\lambda}{r}$$

Campo produzido pelo fio de densidade λ_1

Considere um ponto P pertencente à reta π , situado no primeiro quadrante.

Se P está a uma distância r da origem e a reta π forma ângulo α com o eixo x , então suas coordenadas são:

$$x = r \cos \alpha$$

$$y = r \sin \alpha$$

O fio λ_1 está sobre o eixo y . Portanto, a distância entre P e esse fio é x :

$$r_1 = x = r \cos \alpha$$

Aplicando a expressão obtida pela Lei de Gauss:

$$E_1 = \frac{\lambda_1}{2\pi\epsilon_0 r_1}$$

Substituindo $r_1 = r \cos \alpha$:

$$E_1 = \frac{\lambda_1}{2\pi\epsilon_0 r \cos \alpha}$$

Como $\lambda_1 > 0$, o campo produzido pelo fio aponta para fora do fio. No primeiro quadrante, isso significa que $\vec{E}_1$ aponta no sentido positivo do eixo x . Assim:

$$\vec{E}_1 = \frac{\lambda_1}{2\pi\epsilon_0 r \cos \alpha} \hat{i}$$

Campo produzido pelo fio de densidade λ_2

O fio λ_2 está sobre o eixo x . A distância entre P e esse fio é y :

$$r_2 = y = r \sin \alpha$$

Novamente, pela Lei de Gauss:

$$E_2 = \frac{\lambda_2}{2\pi\epsilon_0 r_2}$$

Substituindo $r_2 = r \sin \alpha$:

$$E_2 = \frac{\lambda_2}{2\pi\epsilon_0 r \sin \alpha}$$

Como $\lambda_2 > 0$, o campo aponta para fora do fio. No primeiro quadrante, $\vec{E}_2$ aponta no sentido positivo do eixo y :

$$\vec{E}_2 = \frac{\lambda_2}{2\pi\epsilon_0 r \sin \alpha} \hat{j}$$

Campo elétrico resultante

Os campos $\vec{E}_1$ e $\vec{E}_2$ são perpendiculares entre si. Portanto:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$$

As componentes do campo resultante são:

$$E_x = \frac{\lambda_1}{2\pi\epsilon_0 r \cos \alpha}$$

e

$$E_y = \frac{\lambda_2}{2\pi\epsilon_0 r \sin \alpha}$$

Como a reta π é uma linha de força, o campo resultante deve ser paralelo a ela.

Para um vetor que forma ângulo α com o eixo x :

$$\tan \alpha = \frac{E_y}{E_x}$$

Substituindo as componentes:

$$\tan \alpha = \frac{\frac{\lambda_2}{2\pi\epsilon_0 r \sin \alpha}}{\frac{\lambda_1}{2\pi\epsilon_0 r \cos \alpha}}$$

Invertendo e simplificando:

$$\tan \alpha = \frac{\lambda_2 \cos \alpha}{\lambda_1 \sin \alpha}$$

Agora usamos:

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

Então:

$$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\lambda_2 \cos \alpha}{\lambda_1 \sin \alpha}$$

Multiplicando os dois lados por $\lambda_1 \sin \alpha \cos \alpha$:

$$\lambda_1 \sin^2 \alpha = \lambda_2 \cos^2 \alpha$$

Dividindo por $\lambda_1 \cos^2 \alpha$:

$$\tan^2 \alpha = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$$

Como o ângulo mostrado está no primeiro quadrante:

$$\tan \alpha = \sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}$$

Portanto:

$$\alpha = \arctan \left(\sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}} \right)$$

COMENTÁRIOS DO LAERTE: Se $\lambda_1 = \lambda_2$

$$\tan \alpha = \sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}} = 1$$

Logo:

$$\alpha = 45^\circ$$

Quando os dois fios possuem a mesma densidade linear de carga, a linha de força faz 45° com os eixos.

Observação sobre os sinais das cargas

A expressão obtida considera as duas densidades de carga positivas. Se uma das cargas for negativa, o sentido do campo produzido por aquele fio será invertido, e a linha de força poderá ocupar outro quadrante. Nesse caso, deve-se analisar cuidadosamente os sinais das componentes do campo, mas os módulos continuam obedecendo à relação:

$$|\tan \alpha| = \sqrt{\left| \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right|}$$

A conclusão principal, para a situação representada na figura, é:

$$\alpha = \arctan\left(\sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}\right)$$

16. Resolução do Professor Laerte:

Usando a Lei de Gauss com a superfície cilíndrica, temos:

$$E(2\pi RL) = \frac{q}{\epsilon_0}$$

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R}$$

A força que atua na partícula em movimento circular é dada por:

$$F = q \cdot E$$

E corresponde à resultante centrípeta, sendo assim:

$$q \cdot \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R} = m\omega^2 R$$

Daí, temos:

$$\frac{q\lambda}{2\pi\epsilon_0 m R^2} = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2$$

$$T = 2\pi R \sqrt{\frac{\pi\epsilon_0 m}{q\lambda}}$$

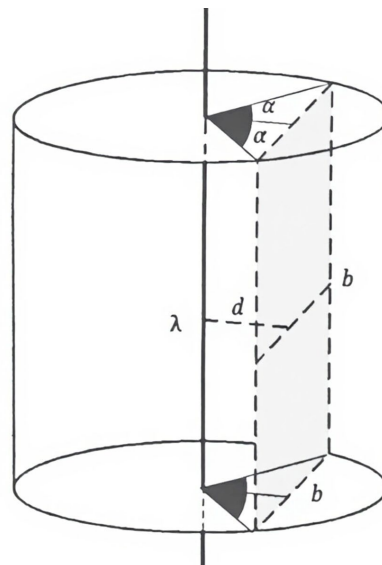
17. Resolução Comentada:

Primeiramente devemos perceber que a simetria no plano perpendicular à linha infinita de cargas é radial.

Em seguida, perceber que podemos imaginar um cilindro de raio igual a

$$R = \left(d^2 + \frac{b^2}{4}\right)^{\frac{1}{2}}$$

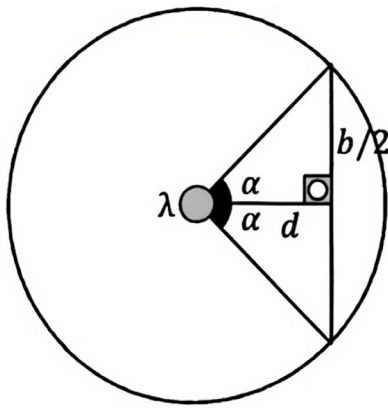
e altura igual a b , envolvendo a linha de cargas, e que o número de linhas de força que atravessam a placa é igual ao número de linhas que atravessam a superfície lateral do cilindro, cuja abertura angular é igual a 2α .



A carga elétrica envolvida pelo cilindro é dada por:

$$Q_{\text{ENV}} = \lambda \cdot b$$

A visão de cima para o plano perpendicular ao cilindro é dada por:



Da geometria elementar:

$$\tan \alpha = \frac{b/2}{d} = \frac{b}{2 \cdot d}$$

$$\alpha = \arctg\left(\frac{b}{2 \cdot d}\right)$$

Note que o fluxo elétrico através da superfície do cilindro é diretamente proporcional ao ângulo, logo:

$$\begin{cases} \Phi_{\text{TOTAL}} \rightarrow 2\pi \text{ rad} \\ \Phi_{\text{PARCIAL}} \rightarrow 2\alpha \end{cases}$$

$$\Phi_{\text{PARCIAL}} = \Phi_{\text{TOTAL}} \cdot \frac{\alpha}{\pi}$$

Finalmente:

$$\Phi_{\text{PARCIAL}} = \left(\frac{Q_{\text{ENV}}}{\epsilon_0}\right) \cdot \frac{\alpha}{\pi}$$

$$\Phi_{\text{PARCIAL}} = \left(\frac{\lambda \cdot b}{\pi \cdot \epsilon_0}\right) \cdot \arctg\left(\frac{b}{2 \cdot d}\right)$$

18. Aplicação da Lei de Gauss

A superfície completa do cilindro é composta por:

1. Base superior;
2. Base inferior;
3. Superfície lateral.

Pela Lei de Gauss:

$$\Phi_{\text{total}} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

Assim:

$$\Phi_{\text{total}} = \Phi_{\text{sup}} + \Phi_{\text{inf}} + \Phi_{\text{lat}}$$

Como a carga está no centro do cilindro, as duas bases são simétricas:

$$\Phi_{\text{sup}} = \Phi_{\text{inf}}$$

Para determinar o fluxo através de cada base, precisamos calcular a fração do fluxo total que atravessa um disco circular visto a partir da carga.

Fluxo através de uma base circular

Considere a base superior. A distância entre a carga Q e essa base é:

$$d = \frac{H}{2} = R$$

O raio da base é:

$$r = 2\sqrt{2} R$$

A geometria formada pela carga, pelo centro da base e pela borda da base fornece um triângulo retângulo. Seja θ o ângulo entre o eixo do cilindro e a linha que liga a carga à borda da base.

Nesse triângulo:

$$\cos \theta = \frac{d}{\sqrt{d^2 + r^2}}$$

Substituindo os valores:

$$\cos \theta = \frac{R}{\sqrt{R^2 + (2\sqrt{2} R)^2}}$$

Como:

$$(2\sqrt{2} R)^2 = 8R^2$$

temos:

$$\cos \theta = \frac{R}{\sqrt{R^2 + 8R^2}}$$

$$\cos \theta = \frac{R}{\sqrt{9R^2}}$$

$$\boxed{\cos \theta = \frac{1}{3}}$$

Fluxo de uma carga através de um disco

O fluxo produzido por uma carga puntiforme Q através de um disco circular é dado por:

$$\Phi_{\text{disco}} = \frac{Q}{2\epsilon_0} (1 - \cos \theta)$$

Essa expressão resulta do fato de que o fluxo através de uma superfície aberta é proporcional ao ângulo sólido subtendido por essa superfície.

Substituindo $\cos \theta = \frac{1}{3}$:

$$\Phi_{\text{base}} = \frac{Q}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{1}{3}\right)$$

$$\Phi_{\text{base}} = \frac{Q}{2\epsilon_0} \cdot \frac{2}{3}$$

$$\boxed{\Phi_{\text{base}} = \frac{Q}{3\epsilon_0}}$$

Como as duas bases são equivalentes:

$$\Phi_{\text{sup}} + \Phi_{\text{inf}} = 2 \cdot \frac{Q}{3\epsilon_0}$$

$$\boxed{\Phi_{\text{bases}} = \frac{2Q}{3\epsilon_0}}$$

Determinação do fluxo lateral

Pela Lei de Gauss:

$$\Phi_{\text{total}} = \Phi_{\text{bases}} + \Phi_{\text{lateral}}$$

Substituindo os valores:

$$\frac{Q}{\epsilon_0} = \frac{2Q}{3\epsilon_0} + \Phi_{\text{lateral}}$$

Logo:

$$\Phi_{\text{lateral}} = \frac{Q}{\epsilon_0} - \frac{2Q}{3\epsilon_0}$$

$$\Phi_{\text{lateral}} = \frac{3Q - 2Q}{3\epsilon_0}$$

Portanto:

$$\boxed{\Phi_{\text{lateral}} = \frac{Q}{3\epsilon_0}}$$

19. RESOLUÇÃO:

Só precisamos aplicar a lei de Gauss

$$\Phi_s = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = EA = \frac{q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$$

A área é a área da esfera da superfície gaussiana

$$A = 4\pi r^2$$

A carga é a carga localizada dentro da esfera gaussiana

$$q_{\text{int}} = \rho \frac{4}{3}\pi r^3$$

Isso nos dá um campo

$$E = \frac{q_{\text{int}}}{\epsilon_0 A} = \frac{\rho \frac{4}{3}\pi r^3}{\epsilon_0 4\pi r^2} = \frac{\rho r}{3\epsilon_0}$$

Como o campo aponta para fora na direção radial

$$\vec{E} = \frac{\rho \vec{r}}{3\epsilon_0}$$

Agora vamos calcular o campo dentro da cavidade, beleza?!

Vamos considerar que a casca está carregada negativamente de modo que somando-a à esfera, a carga se anulará.

O campo produzido pela cavidade, de forma análoga ao que acabamos de fazer para a esfera será

$$\vec{E} = \frac{\rho \vec{a}}{3\epsilon_0}$$

Se repararmos na imagem, podemos ver que

$$\vec{a} = \vec{r} - \vec{d}$$

Agora só precisamos fazer a soma dos campos

$$\vec{E}_R = \frac{\rho \vec{r}}{3\epsilon_0} - \frac{\rho \vec{a}}{3\epsilon_0} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} [\vec{r} - (\vec{r} - \vec{d})] = \frac{\rho \vec{d}}{3\epsilon_0}$$

Sendo assim, podemos perceber que o campo é uniforme e depende apenas do vetor $\vec{d}$.

20. Resolução Comentada:

O módulo do campo elétrico no interior da cavidade será dado por:

$$|\vec{E}_{\text{INT}}| = \frac{\rho \cdot d}{3\epsilon_0}$$

Observe que $d = a/2$, assim:

$$|\vec{E}_{\text{INT}}| = \frac{\rho \cdot \left(\frac{R}{2}\right)}{3 \cdot \epsilon_0} = \frac{\rho \cdot R}{6 \cdot \epsilon_0}$$

Logo, o módulo da força elétrica na situação proposta é dado por:

$$|\vec{F}_E| = |q| \cdot |\vec{E}_{\text{INT}}| = |q| \cdot \frac{\rho \cdot R}{6 \cdot \epsilon_0}$$

21. Resolução Comentada:

O período de um pêndulo simples de comprimento l em um campo gravitacional aparente (g_{AP}) é dado por:

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g_{AP}}} \Rightarrow g_{AP} = l \cdot \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2$$

Na situação proposta, a gravidade aparente é dada por:

$$g_{AP} = \sqrt{g^2 + a^2} \Rightarrow \left[l \cdot \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2\right]^2 = g^2 + a^2$$

$$a^2 = \left[l \cdot \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2\right]^2 - g^2$$

$$a = \sqrt{\left[l \cdot \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2\right]^2 - g^2}$$

A aceleração elétrica do pêndulo é:

$$\frac{Q \cdot |\vec{E}|}{m} = \sqrt{\left[l \cdot \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2\right]^2 - g^2}$$

Sabe-se que, para o interior da cavidade, o módulo do campo elétrico é dado por:

$$|\vec{E}| = \frac{\rho \cdot d}{3\epsilon_0}$$

Dessa forma:

$$\frac{Q \cdot \frac{\rho \cdot d}{3\epsilon_0}}{m} = \sqrt{\left[l \cdot \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2\right]^2 - g^2}$$

Logo:

$$Q = \frac{3m \cdot \epsilon_0}{\rho \cdot d} \sqrt{l^2 \cdot \left(\frac{2\pi}{T}\right)^4 - g^2}$$

22. Resolução Comentada:

Conforme demonstramos na teoria, o módulo do campo elétrico em uma esfera dielétrica com distribuição volumétrica de cargas igual a ρ , a uma distância r do seu centro, é dado por:

$$|\vec{E}_P| = \frac{\rho \cdot r}{3 \cdot \epsilon_0}$$

Como a carga total distribuída uniformemente no volume da esfera é Q , temos:

$$\rho = \frac{Q}{\frac{4\pi \cdot R^3}{3}} = \frac{3Q}{4\pi \cdot R^3}$$

Substituindo a densidade volumétrica de carga na expressão do campo elétrico:

$$|\vec{E}_P| = \frac{\left(\frac{Q}{\frac{4\pi \cdot R^3}{3}}\right) \cdot r}{3 \cdot \epsilon_0}$$

Logo:

$$|\vec{E}_P| = \left(\frac{Q}{4\pi \cdot \epsilon_0 \cdot R^3}\right) \cdot r$$

Portanto:

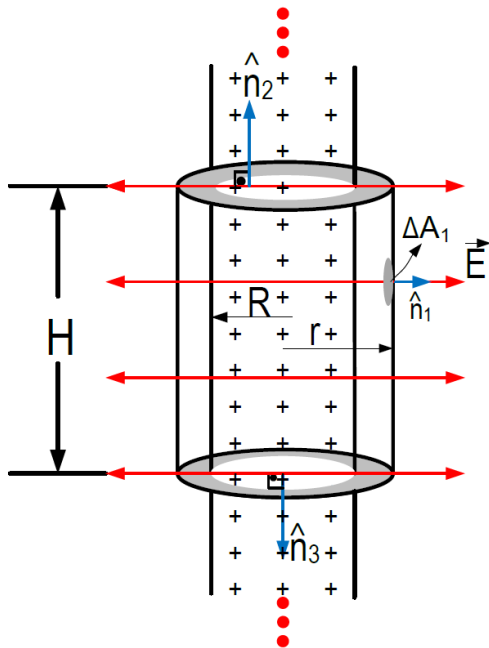
$$|\vec{E}_P| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{R^3} \cdot r$$

Resposta: alternativa a.

Nota: Como a carga total da esfera é $-Q$, o vetor campo elétrico aponta radialmente para o centro da esfera. Entretanto, como a questão solicita o **módulo** do campo, utiliza-se o valor positivo Q .

23

a) A superfície gaussiana será uma superfície cilíndrica de raio $r \geq R$, conforme a figura abaixo:



O fluxo total será dado por:

$$\Phi_{TOTAL} = \Phi_{TAMPA(2,3)} + \Phi_{LATERAL}$$

Observe que $\Phi_{TAMPA(2,3)}$ representa a soma dos fluxos nas tampas do cilindro escolhido como superfície gaussiana;

$$\Phi_{TAMPA(2,3)} = E \cdot A_{TAMPA} \cdot \cos(90^\circ)$$

$$\Phi_{TAMPA(2,3)} = 0 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}$$

Agora $\Phi_{LATERAL}$ representa a soma dos fluxos na superfície lateral do cilindro escolhido como superfície gaussiana:

$$\Phi_{LATERAL} = |\vec{E}_l| \cdot \sum_{i=1}^N |\Delta \vec{A}_l \cdot \cos(0^\circ)|$$

A soma das áreas infinitesimais na lateral do cilindro será:

$$\sum_{i=1}^N |\Delta \vec{A}_l| = A_{LATERAL}$$

Logo,

$$\Phi_{LATERAL} = E \cdot A_{LATERAL}$$

Lembrando-se que a área lateral do cilindro será:

$$A = 2\pi r H$$

$$\sum_{i=1}^N |\Delta \vec{A}_l| = A_{LATERAL}$$

Dessa maneira, podemos escrever:

$$A_{LATERAL} = 2\pi \cdot r \cdot H$$

$$\Phi_{LATERAL} = E \cdot (2\pi \cdot r \cdot H)$$

Logo, o fluxo elétrico total será dado por:

$$\Phi_{TOTAL} = \Phi_{TAMPA(2,3)} + \Phi_{LATERAL}$$

$$\Phi_{TOTAL} = 0 + E \cdot (2\pi \cdot r \cdot H)$$

$$\Phi_{TOTAL} = E \cdot (2\pi \cdot r \cdot H)$$

Da Lei de Gauss:

$$\Phi_{TOTAL} = \frac{q_{ENV}}{\epsilon_0}$$

$$E \cdot (2\pi \cdot r \cdot H) = \frac{q_{ENV}}{\epsilon_0}$$

$$E = \frac{q_{ENV}}{2\pi \cdot \epsilon_0 \cdot r \cdot H}$$

A carga elétrica envolvida será:

$$\rho = \frac{q_{ENV}}{\pi \cdot R^2 \cdot H} \Rightarrow q_{ENV} = \rho \cdot \pi \cdot R^2 \cdot H$$

Finalmente:

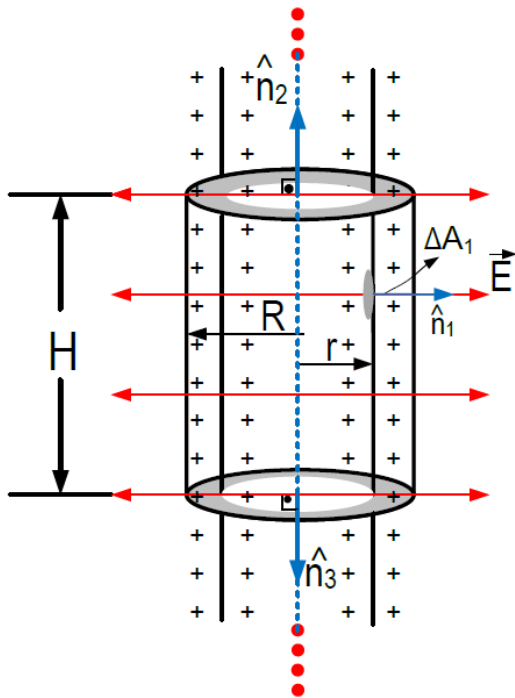
$$E = \frac{\rho \cdot \pi \cdot R^2 \cdot H}{2\pi \cdot \epsilon_0 \cdot r \cdot H}$$

$$E = \frac{\rho \cdot R^2}{2 \cdot \epsilon_0 \cdot r} \quad (r \geq R)$$

Se $r = R$:

$$E = \frac{\rho \cdot R}{2 \cdot \epsilon_0}$$

b) A superfície gaussiana será uma superfície cilíndrica de raio $r \leq R$, conforme a figura abaixo:



O fluxo total será dado por:

$$\Phi_{TOTAL} = \Phi_{TAMPA(2,3)} + \Phi_{LATERAL}$$

Observe que $\Phi_{TAMPA(2,3)}$ representa a soma dos fluxos nas tampas do cilindro escolhido como superfície gaussiana:

$$\Phi_{TAMPA(2,3)} = E \cdot A_{TAMPA} \cdot \cos(90^\circ)$$

$$\Phi_{TAMPA(2,3)} = 0 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}$$

Agora $\Phi_{LATERAL}$ representa a soma dos fluxos na superfície lateral do cilindro escolhido como superfície gaussiana:

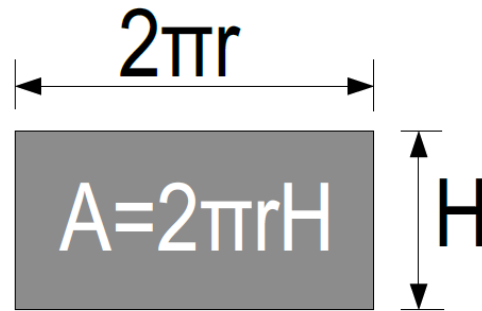
$$\Phi_{(LATERAL)} = |\vec{E}_l| \cdot \sum_{i=1}^N |\Delta \vec{A}_l \cdot \cos(0^\circ)|$$

A soma das áreas infinitesimais na lateral do cilindro será:

$$\sum_{i=1}^N |\Delta \vec{A}_l| = A_{LATERAL}$$

$$\Phi_{LATERAL} = E \cdot A_{LATERAL}$$

Lembrando-se que a área lateral do cilindro será:



$$A_{LATERAL} = 2\pi \cdot r \cdot H$$

Dessa maneira, podemos escrever:

$$\Phi_{LATERAL} = E \cdot (2\pi \cdot r \cdot H)$$

Logo, o fluxo elétrico total será dado por:

$$\Phi_{TOTAL} = \Phi_{TAMPA(2,3)} + \Phi_{LATERAL}$$

$$\Phi_{TOTAL} = 0 + E \cdot (2\pi \cdot r \cdot H)$$

$$\Phi_{TOTAL} = E \cdot (2\pi \cdot r \cdot H)$$

Da Lei de Gauss:

$$\Phi_{TOTAL} = \frac{q_{ENV}}{\epsilon_0}$$

$$E \cdot (2\pi \cdot r \cdot H) = \frac{q_{ENV}}{\epsilon_0}$$

$$E = \frac{q_{ENV}}{2\pi \cdot \epsilon_0 \cdot r \cdot H}$$

A carga elétrica envolvida será:

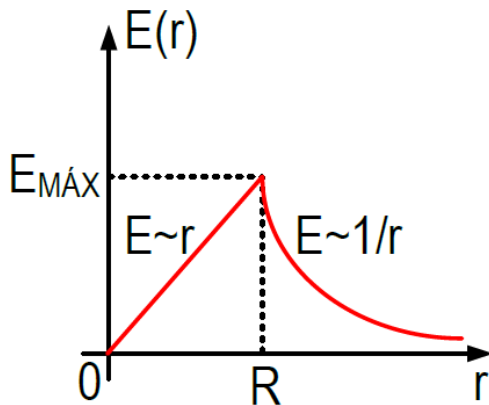
$$\rho = \frac{q_{ENV}}{\pi \cdot r^2 \cdot H} \Rightarrow q_{ENV} = \rho \cdot \pi \cdot r^2 \cdot H$$

Finalmente:

$$E = \frac{\rho \cdot \pi \cdot r^2 \cdot H}{2\pi \cdot \epsilon_0 \cdot r \cdot H}$$

$$E = \frac{\rho \cdot r}{2 \cdot \epsilon_0} \quad (r \leq R)$$

Observe o gráfico do campo elétrico em função do raio r :



24. Resolução do Professor Laerte:

Um M.H.S na direção radial e M.R.U ao longo do eixo do cilindro, sendo assim vou usar a ideia da independência dos movimentos em cada direção (tratando eles como simultâneos, ok). É possível mostrar na turma ITA que o campo elétrico de um cilindro de raio R uniformemente carregado (densidade volumétrica de carga ρ) em pontos no interior do cilindro na direção radial é dado por:

$$E = \frac{\rho \cdot r}{2 \cdot \epsilon_0} \quad (r < R)$$

Facilmente podemos determinar a força elétrica nos elétrons que ingressam no interior do cilindro na direção radial:

$$F_r = e \cdot E = \left(\frac{e \cdot \rho}{2 \cdot \epsilon_0} \right) \cdot r$$

Logo essa partícula está sujeita a uma força restauradora do tipo

$$|F_r| = k \cdot x$$

logo a constante de força será:

$$k = \frac{e \cdot \rho}{2 \cdot \epsilon_0}$$

O período de oscilação do elétron ao longo do eixo radial será:

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}}$$

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{\frac{e \cdot \rho}{2 \cdot \epsilon_0}}} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{2m \cdot \epsilon_0}{e \cdot \rho}}$$

O tempo necessário para a partícula focalizar será igual a $\frac{1}{4}$ do seu ciclo completo ao longo da direção radial:

$$D = V \cdot \Delta t = V \cdot \frac{T}{4}$$

$$D = V \cdot \frac{2\pi \cdot \sqrt{\frac{2m \cdot \epsilon_0}{e \cdot \rho}}}{4}$$

$$D = \frac{V}{2} \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{2m \cdot \epsilon_0}{e \cdot \rho}}$$

Observação: Desprezamos qualquer influência da distribuição de cargas no movimento ao longo do eixo longitudinal das cargas.

25. A pressão eletrostática é:

$$p = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0}$$

A força resultante exercida sobre um hemisfério é igual à pressão multiplicada pela **área projetada** do hemisfério na direção da separação.

A área projetada é a área do círculo máximo:

$$A_{\text{proj}} = \pi R^2$$

Portanto:

$$F = p A_{\text{proj}}$$

$$F = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} \cdot \pi R^2$$

Assim:

$$F = \frac{\pi R^2 \sigma^2}{2\epsilon_0}$$

Essa abordagem evita o cálculo detalhado das componentes porque reconhece diretamente que a projeção do hemisfério é um círculo de raio R .

26. Resolução:

A pressão eletrostática é dada por:

$$p = \frac{\sigma^2}{2 \cdot \epsilon_0} = \frac{1}{2 \cdot \epsilon_0} \cdot \left(\frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot R^2} \right)^2 = \frac{Q^2}{32 \cdot \pi^2 \cdot \epsilon_0 \cdot R^4}$$

A força entre os hemisférios é dada por:

$$F = p \cdot A_{\text{EFETIVA}}$$

Em que a área efetiva é dada por:

$$F = \frac{Q^2 \cdot \pi \cdot (R^2 - h^2)}{32 \cdot \pi^2 \cdot \epsilon_0 \cdot R^4}$$

Campo gerado pela parte superior no centro:

$$E = \frac{\sigma \cdot r^2}{4 \cdot \epsilon_0 \cdot R^2}$$

Assim podemos escrever:

$$q \cdot E = \frac{Q^2 \cdot \pi \cdot (R^2 - h^2)}{32 \cdot \pi^2 \cdot \epsilon_0 \cdot R^4}$$

$$q \cdot \frac{(R^2 - h^2)}{R^2} \cdot \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot R^2} \cdot \frac{1}{4 \cdot \epsilon_0} = \frac{Q^2 \cdot \pi \cdot (R^2 - h^2)}{32 \cdot \pi^2 \cdot \epsilon_0 \cdot R^4}$$

$$q = \frac{Q}{2}$$

27. Em uma superfície condutora carregada, o campo elétrico imediatamente externo ao condutor é:

$$E_{\text{ext}} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

No interior do condutor, o campo elétrico é nulo:

$$E_{\text{int}} = 0$$

Para calcular a força que atua sobre um pequeno elemento da superfície, utiliza-se o campo elétrico médio entre os dois lados da superfície:

$$E_{\text{médio}} = \frac{E_{\text{ext}} + E_{\text{int}}}{2}$$

Portanto:

$$E_{\text{médio}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\sigma}{\epsilon_0} + 0 \right) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

Sobre um elemento de área dA , a carga é:

$$dq = \sigma dA$$

Assim, a força elétrica sobre esse elemento é:

$$dF = dq \cdot E_{\text{médio}}$$

$$dF = \sigma dA \cdot \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

$$dF = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} dA$$

Logo, a pressão eletrostática é:

$$p = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0}$$

Essa pressão atua perpendicularmente à superfície do condutor, tendendo a afastar as cargas e a expandir o elipsoide.

A força de pressão atua em diversas direções sobre a superfície curva do elipsoide. Portanto, não podemos simplesmente multiplicar a pressão pela área curva da metade do elipsoide.

Devemos considerar apenas a componente da força na direção z , pois essa é a direção em que uma metade tende a se afastar da outra.

A força resultante pode ser calculada pela pressão multiplicada pela **área projetada** da superfície sobre um plano perpendicular à direção z :

$$F = p \cdot A_{\text{projetada}}$$

Esse é o ponto central da questão.

Ao projetarmos a metade superior do elipsoide sobre o plano xy , obtemos uma elipse de semieixos a e b .

A área dessa elipse é:

$$A_{\text{projetada}} = \pi ab$$

Observe que o semieixo c não aparece nessa área. Ele determina a altura do elipsoide, mas não altera sua projeção sobre o plano xy .

Substituindo a pressão eletrostática e a área projetada na expressão da força:

$$F = p \cdot A_{\text{projetada}}$$

$$F = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} \cdot \pi ab$$

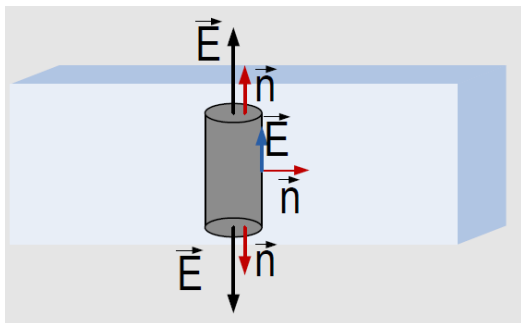
Portanto:

$$F = \frac{\pi \sigma^2 ab}{2\epsilon_0}$$

Logo, a alternativa correta é:

(c)

28. Resolução:



Aplicando-se a Lei de Gauss à superfície cilíndrica contida no interior do material dielétrico a uma distância X do centro, temos:

$$\Phi_{\text{TOTAL}} = 2 \cdot \Phi_{\text{BASE}} + \Phi_{\text{LATERAL}} = \frac{Q_{\text{ENVOLVIDA}}}{\epsilon}$$

$$2 \cdot E_{\text{BASE}} \cdot \pi \cdot R^2 = \frac{\pi R^2 \cdot \rho \cdot 2x}{\epsilon}$$

$$E_{\text{BASE}} = \frac{\rho \cdot x}{\epsilon}$$

Dica: O fluxo elétrico na superfície lateral é nulo, pois o ângulo entre o campo elétrico e o vetor normal à superfície lateral é igual a 90° . Logo, a força elétrica restauradora para uma distância x do centro do cilindro será dada por:

$$F_R = q \cdot E_{\text{BASE}} = \left(\frac{q \cdot \rho}{\epsilon} \right) x$$

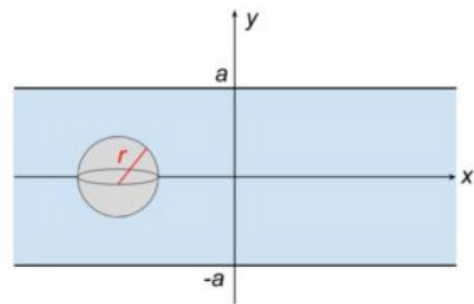
Assim, a constante de força será dada por:

$$K_F = \left(\frac{q \cdot \rho}{\epsilon} \right)$$

Por comparação com o sistema massa-mola, podemos escrever:

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{K_F}} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{\frac{q \cdot \rho}{\epsilon}}} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m \cdot \epsilon}{q \cdot \rho}}$$

29. Para verificar o campo dentro da camada podemos utilizar uma superfície gaussiana para simetria esférica. Veja a figura.



Agora precisamos lembrar da nossa famosa lei de Gauss:

$$\Phi_s = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = EA = \frac{q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$$

Lembra que a densidade é a carga sobre o volume?

$$\rho = \frac{q_{\text{int}}}{\frac{4}{3}\pi r^3} \Rightarrow q_{\text{int}} = \frac{4}{3}\pi \rho r^3$$

E qual é a área de interesse? Sim, a área correspondente à superfície da nossa esfera de raio r :

$$A = 4\pi r^2$$

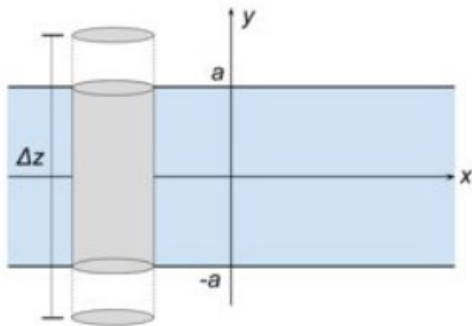
Então, agora só precisamos retornar para nossa expressão e substituir os q_{int} e A :

$$E = \frac{\rho r}{3\epsilon_0}$$

Levando em consideração que o campo aponta para fora da esfera na direção radial, temos:

$$\vec{E} = \frac{\rho r}{3\epsilon_0} \hat{r}$$

Para saber o campo fora, teremos que adotar um outro tipo de simetria, agora usaremos um cilindro. Se liga como vai ficar.



Podemos novamente usar a lei de Gauss:

$$\Phi_s = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = EA = \frac{q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$$

Agora a área de interesse é a superfície lateral do cilindro:

$$A = 2\pi r^2 \Delta y$$

E a carga vai ser a carga dentro cilindro:

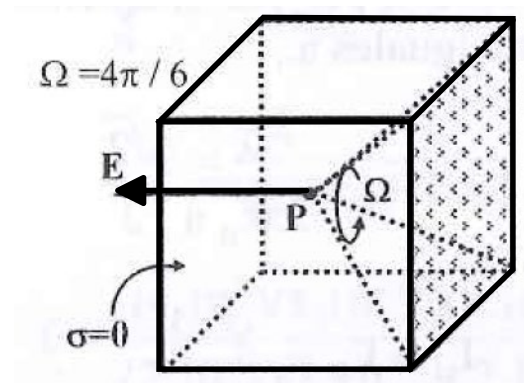
$$q_{\text{int}} = \rho \pi r^2 2a$$

Assim o campo fora fica:

$$\vec{E} = \frac{\rho a}{\epsilon_0 \Delta z} \hat{r}$$

30. Resolução:

Representemos, no centro do cubo, o campo elétrico criado pela face sombreada.



Na figura, o módulo do campo elétrico resultante é igual ao campo criado pela face do cubo oposta à face não carregada, pois os campos criados pelas outras faces se anulam dois a dois. Assim:

$$E = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{4\pi}{6} \right)$$

Isso ocorre porque o ângulo sólido total ao redor do ponto P é 4π , e o ângulo sólido subtendido por uma face do cubo corresponde à sexta parte desse ângulo sólido total.

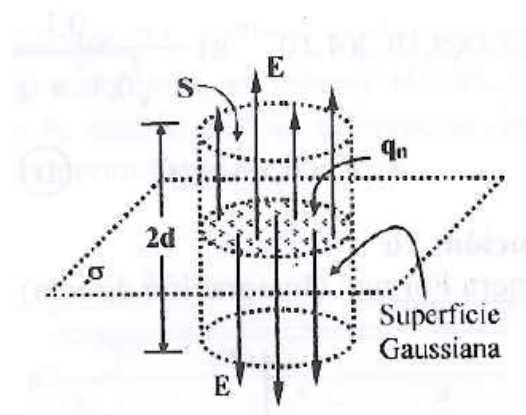
Logo, o módulo do campo elétrico resultante no centro do cubo é:

$$E = \frac{\sigma}{6\epsilon_0}$$

Alternativa correta: e).

31. (Lei de Gauss)

Tomamos como superfície gaussiana um cilindro de comprimento $2d$ e área da base S , conforme mostrado na figura.



Só existe fluxo através das superfícies das bases do cilindro, de modo que a soma desses fluxos deve ser proporcional à carga líquida encerrada nessa superfície gaussiana, isto é:

$$\Phi = \frac{q_n}{\epsilon_0}$$

$$ES + ES = \frac{\sigma S}{\epsilon_0}$$

$$\therefore E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \text{ (B)}$$

(Ângulo sólido)

O plano infinito divide o espaço em duas partes idênticas, portanto, o ângulo sólido limitado ou subtendido pelo plano infinito é 2π . Logo, o módulo do campo elétrico é:

$$E = \left(\frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \right) \Omega = \left(\frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \right) (2\pi)$$

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} = (2\pi)(9 \cdot 10^9)(4 \cdot 10^{-10})$$

$$\therefore E \approx 22,6 \text{ N/C}$$

$$\Phi = \int_S \vec{E} \cdot \hat{n} dS$$

$$\Phi = \int_S E \cos \theta dS$$

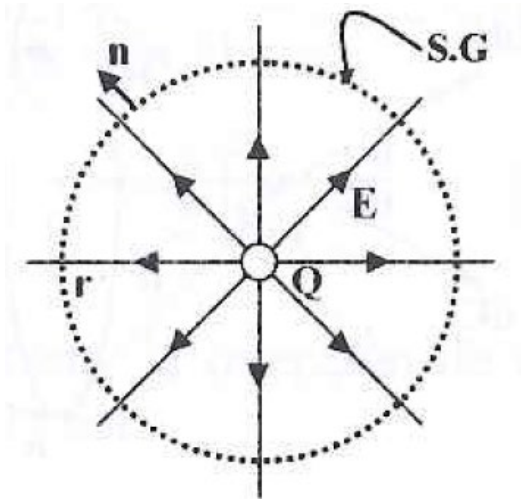
Como $\vec{E}$ e $\hat{n}$ estão na mesma direção, ambos se afastando radialmente do centro da esfera, $\theta = 0^\circ$, $\cos \theta = 1$, e tomando o elemento de área dS em coordenadas esféricas, temos:

$$\Phi = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} (r^2 \sin \theta d\theta d\phi)$$

$$\Phi = \frac{Q}{\epsilon_0 r^2}$$

Como se observa, o fluxo Φ depende do raio da esfera, de acordo com o inverso do raio elevado à potência ϵ_0 . Portanto, a Lei de Gauss não é satisfeita, pois viola o princípio de conservação do fluxo elétrico.

32. Como superfície gaussiana, escolhemos uma esfera de raio r , em cujo centro se encontra a carga pontual Q , como se aprecia na figura.



Assumindo que o campo elétrico da carga pontual Q é radial, então o fluxo através da superfície gaussiana é:

$$\Phi = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$$