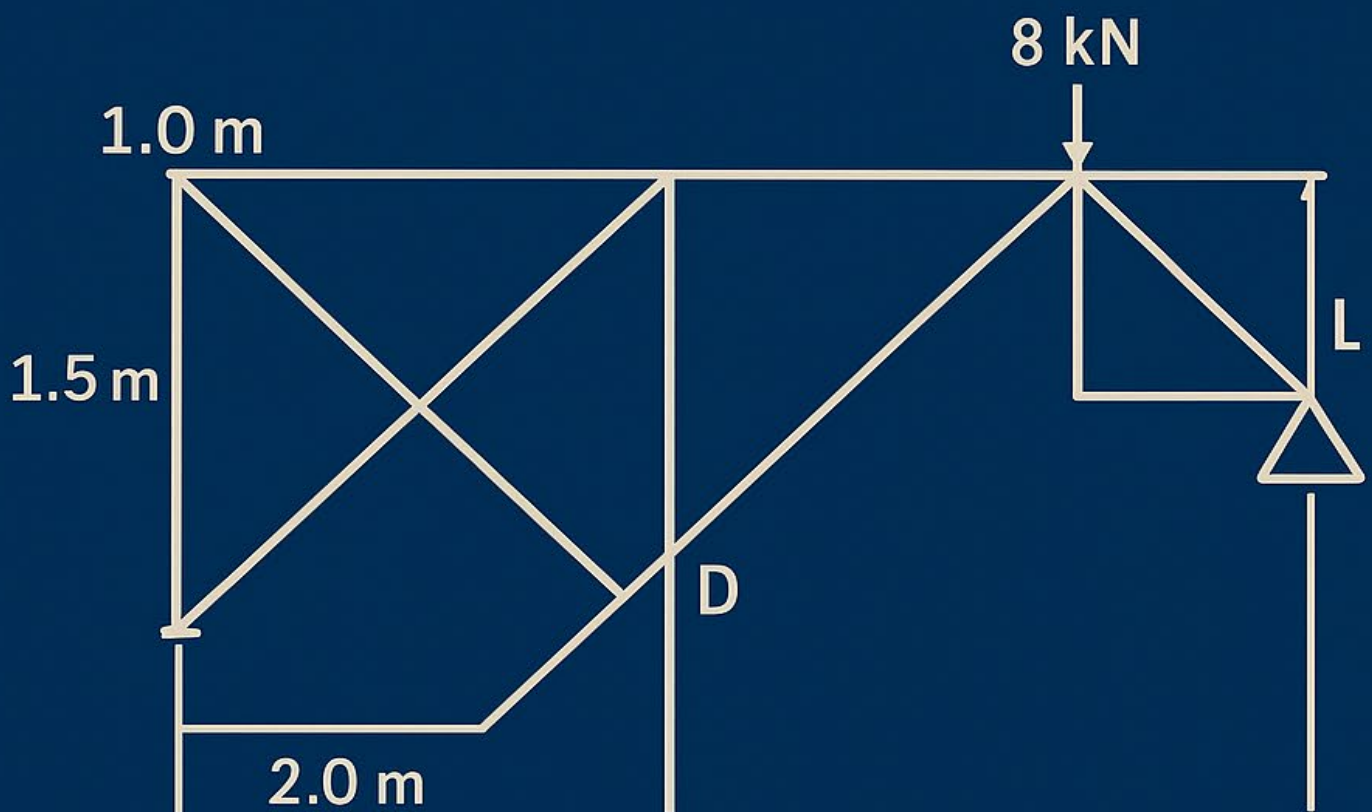


ESTÁTICA DE UM CORPO PUNTIFORME, ESTÁTICA DO CORPO EXTENSO E TRELIÇAS

VESTIBULAR ITA E IME



**PROFESSOR
LAERTE PEREIRA**

1. INTRODUÇÃO

A Estática é o ramo da física que estuda corpos em equilíbrio estático, ou seja, com velocidade nula. Certamente, é uma das áreas da física que possui maior enfoque nos dias atuais, visto que tem um alcance prático enorme. Na engenharia civil, por exemplo, é fundamental para a construção e manutenção de pontes e prédios. Além disso, propiciou o desenvolvimento de diversos aparatos que reduzem a necessidade do homem de realizar forças, como alavancas e parafusos. Enfim, é impossível pensar no dia-a-dia atual sem o desenvolvimento

A Estática se divide em duas áreas: a Estática dos Sólidos e a Estática dos Fluidos, também chamada de Hidrostática.

2. EQUILÍBRIO DE UM PONTO MATERIAL

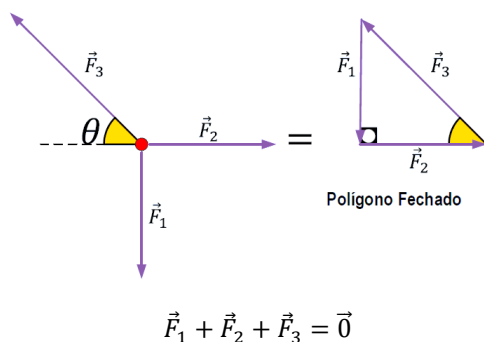
Para uma partícula sujeita a diversas forças, podemos escrever a 2ª Lei de Newton:

$$\vec{F}_R = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_N = m \cdot \vec{a}$$

É condição necessária para o equilíbrio da partícula que a força resultante nela atuante seja nula, assim:

$$\vec{F}_R = \vec{0} \therefore \vec{a} = \vec{0}$$

Para que a partícula fique em equilíbrio basta que os vetores associados as forças atuantes nela formem um polígono fechado.



Relação entre os módulos das forças, para que formem um polígono fechado:

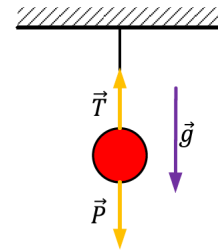
$$\sin\theta = \frac{F_1}{F_3} \therefore F_1 = F_3 \cdot \sin\theta$$

$$\cos\theta = \frac{F_2}{F_3} \therefore F_2 = F_3 \cdot \cos\theta$$

$$F_3^2 = F_1^2 + F_2^2$$

Podemos resumir que na condição de equilíbrio temos duas possibilidades:

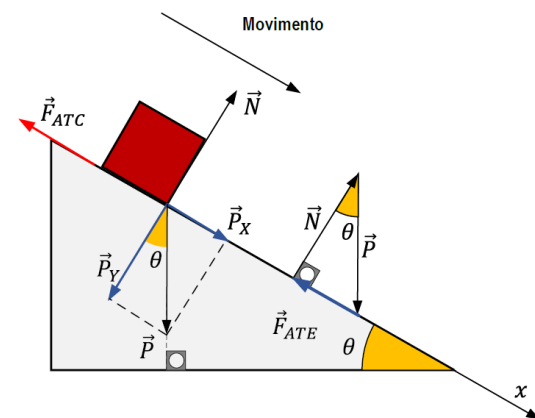
1ª Possibilidade: EQUILÍBRIO ESTÁTICO



O objeto encontra-se em repouso e aceleração nula;

2ª Possibilidade: EQUILÍBRIO DINÂMICO

Na figura abaixo o bloco está descendo a rampa com **velocidade constante**.



3. REGRA DO POLÍGONO FECHADO

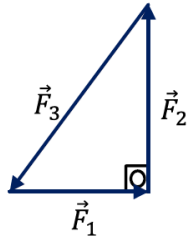
Assim, podemos afirmar que a força resultante que atua sobre este ponto material será nula.

$$\vec{F}_R = \vec{0}$$

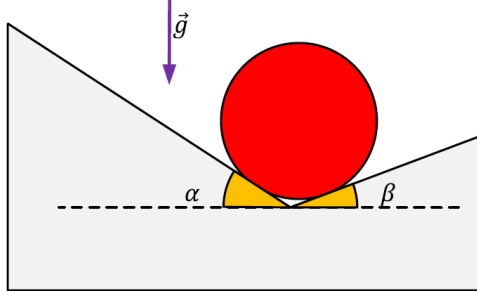
Sobre o ponto material da figura acima, temos:

$$\vec{F}_R = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \vec{0}$$

Logo a disposição dos vetores deve ser tal que formará um **POLÍGONO FECHADO**.

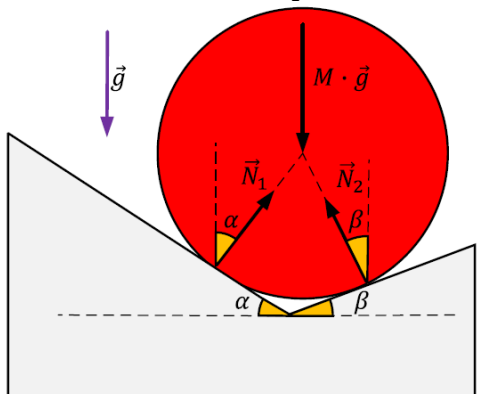


EXEMPLO 1: Uma esfera sólida de raio R e massa M é colocada em uma calha conforme mostrado na figura. As superfícies internas da calha não têm atrito. Determine as forças exercidas pela calha na esfera nos dois pontos de contato.



RESOLUÇÃO COMENTADA:

As forças atuantes na esfera serão a força peso e as forças normais exercidas pelas superfícies da calha conforme mostrado na figura abaixo.



Para que a esfera esteja em equilíbrio, é necessário que as forças atuantes formem um polígono fechado, pois:

$$\vec{N}_1 + \vec{N}_2 + \vec{P} = \vec{0}$$

Logo, o diagrama vetorial é dado na figura abaixo: Para relacionar os módulos das forças no diagrama vetorial podemos usar a Lei dos Senos:

$$\frac{N_1}{\sin \beta} = \frac{N_2}{\sin \alpha} = \frac{Mg}{\sin[180^\circ - (\alpha + \beta)]}$$

Usando a identidade trigonométrica:

$$\sin[180^\circ - (\alpha + \beta)] = \sin(\alpha + \beta)$$

chegamos:

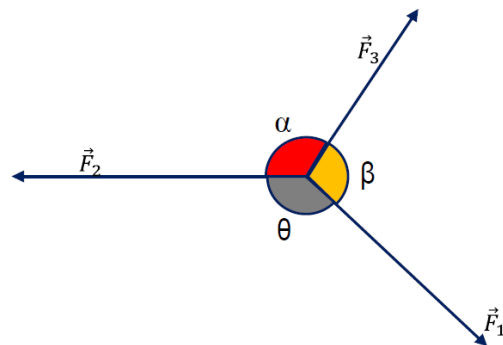
$$N_1 = \frac{mg \cdot \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)}$$

$$N_2 = \frac{mg \cdot \sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)}$$

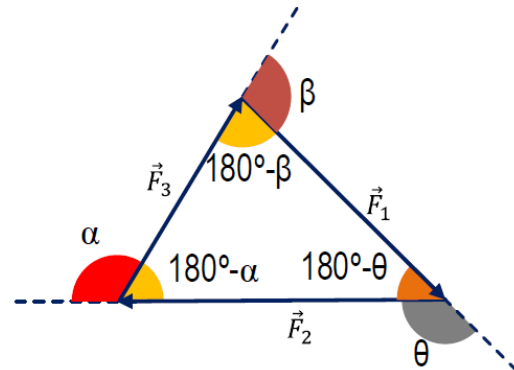
Teorema de Lamy

Quando uma partícula, sujeita à ação de três forças, está em equilíbrio, os módulos das forças são proporcionais aos senos dos ângulos determinados pelas outras duas forças.

Seja a situação proposta pelo teorema acima:



Podemos demonstrar essa relação construindo o polígono de forças:



Aplicando a Lei dos Senos ao triângulo ABC, obtemos:

$$\frac{F_1}{\sin(180^\circ - \theta)} = \frac{F_2}{\sin(180^\circ - \alpha)} = \frac{F_3}{\sin(180^\circ - \beta)}$$

Usando $\sin(180^\circ - \theta) = \sin \theta$

$$\frac{F_1}{\sin(\alpha)} = \frac{F_2}{\sin(\beta)} = \frac{F_3}{\sin(\theta)}$$

4. DECOMPOSIÇÃO DE UM VETOR

Dada uma força $\vec{F}$ atuante em uma partícula com a orientação indicada em relação a um sistema de referência (coordenadas) indicadas.

Podemos decompor essa força em suas componentes cartesianas $\vec{F}_x$ e $\vec{F}_y$, o módulo das componentes cartesianas mostradas na figura serão dadas por:

$$\cos \theta = \frac{F_x}{F} \therefore F_x = F \cdot \cos \theta$$

$$F_x = F \cdot \cos \theta$$

$$\sin \theta = \frac{F_y}{F} \therefore F_y = F \cdot \sin \theta$$

$$F_y = F \cdot \sin \theta$$

A força aplicada à partícula pode ser escrita na forma:

$$\vec{F} = F_x \hat{i} + F_y \hat{j}$$

O módulo da força aplicada será:

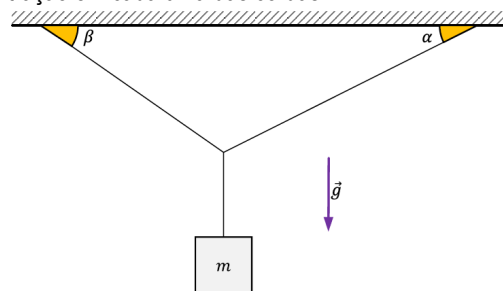
$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}$$

5. MÉTODO DAS COMPONENTES CARTESIANAS:

Tal método consiste em escolher um par de eixos ortogonais entre si, de modo a impor o equilíbrio das forças em cada uma das direções (horizontal e vertical), em outras palavras:

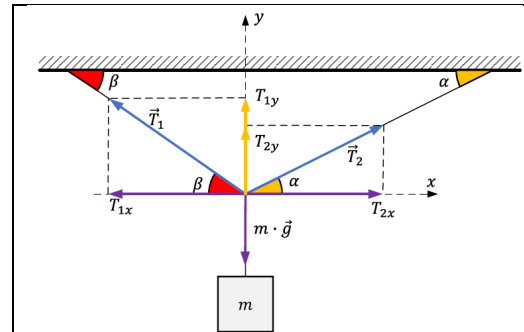
$$\begin{cases} \sum F_x (\rightarrow) = \sum F_x (\leftarrow) \\ \sum F_y (\uparrow) = \sum F_y (\downarrow) \end{cases}$$

EXEMPLO 2: Um pequeno bloco de massa m é suspenso por cordas ideais conforme mostra a figura abaixo. Determine o módulo da força de tração em cada uma das cordas.



RESOLUÇÃO COMENTADA:

As forças atuantes no nó (ponto de encontro das cordas) são mostradas na figura abaixo.



A força de tração no fio ligado ao bloco possui o mesmo módulo de sua força peso, daí simplificamos representado o peso do bloco puxando o nó. Agora determinaremos os valores das componentes da tração no fio 1:

$$\sin \beta = \frac{T_{1y}}{T_1} \therefore T_{1y} = T_1 \cdot \sin \beta$$

$$\cos \beta = \frac{T_{1x}}{T_1} \therefore T_{1x} = T_1 \cdot \cos \beta$$

Agora determinaremos os valores das componentes da tração no fio 2:

$$\sin \alpha = \frac{T_{2y}}{T_2} \therefore T_{2y} = T_2 \cdot \sin \alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{T_{2x}}{T_2} \therefore T_{2x} = T_2 \cdot \cos \alpha$$

Impondo-se o equilíbrio na direção horizontal, podemos escrever:

$$T_{1x} = T_{2x} \therefore T_2 \cdot \cos \alpha = T_1 \cdot \cos \beta$$

$$T_2 = \frac{T_1 \cdot \cos \beta}{\cos \alpha}$$

Impondo-se o equilíbrio na direção vertical, podemos escrever:

$$T_{2y} + T_{1y} = m \cdot g$$

$$T_2 \cdot \sin \alpha + T_1 \cdot \sin \beta = m \cdot g$$

Substituindo-se o valor de T_2 , obtemos:

$$\left(\frac{T_1 \cdot \cos \beta}{\cos \alpha} \right) \cdot \sin \alpha + T_1 \cdot \sin \beta = m \cdot g$$

$$T_1 \left(\frac{\cos \beta \cdot \sin \alpha + \cos \alpha \cdot \sin \beta}{\cos \alpha} \right) = m \cdot g$$

Da identidade trigonométrica:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \sin \beta \cdot \cos \alpha$$

Finalmente:

$$T_1 \cdot \left[\frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \alpha} \right] = m \cdot g$$

$$T_1 = \frac{m \cdot g \cdot \cos \alpha}{\sin(\alpha + \beta)}$$

Além disso:

$$T_2 = \frac{T_1 \cdot \cos \beta}{\cos \alpha} = \frac{\cos \beta}{\cos \alpha} \cdot \left[\frac{m \cdot g \cdot \cos \alpha}{\sin(\alpha + \beta)} \right]$$

$$T_2 = \frac{m \cdot g \cdot \cos \beta}{\sin(\alpha + \beta)}$$

Casos especiais:

Para $\alpha = \beta$:

$$T_1 = T_2 = \frac{m \cdot g \cdot \cos \alpha}{\sin(2\alpha)} = \frac{m \cdot g \cdot \cos \alpha}{2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha}$$

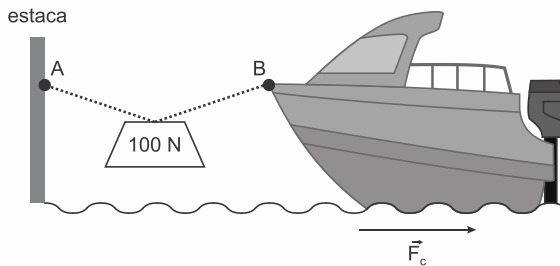
$$T_1 = T_2 = \frac{m \cdot g}{2 \cdot \sin \alpha}$$

Além disso, $\alpha = \beta = 30^\circ$:

$$T_1 = T_2 = \frac{m \cdot g}{2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)} = m \cdot g$$

EXERCÍCIOS DE EMBASAMENTO

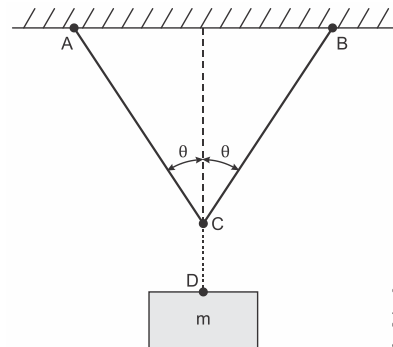
1. (Espcex (Aman) 2025) Em um rio, um barco está amarrado a uma estaca através de uma corda ideal com 5,0 m de comprimento, fixa nos pontos A e B de mesma altura. Um peso de 100 N é suspenso no meio dessa corda. O rio possui uma correnteza que exerce sobre o barco uma força de arrasto horizontal $\vec{F}_c$ de intensidade igual a 50 N, conforme indicado no desenho. A corda, a estaca e $\vec{F}_c$ são coplanares. Considerando que todo o sistema encontra-se em equilíbrio estático, a intensidade da tração na corda e a distância do barco à estaca são, respectivamente, iguais a:



Desenho ilustrativo - Fora de escala

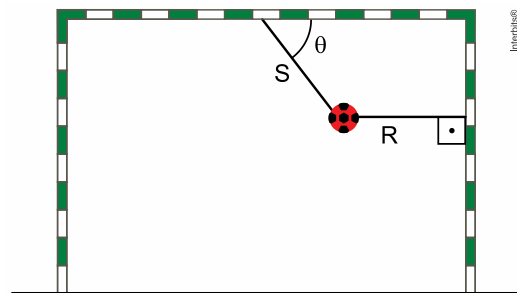
- a) $100\sqrt{2}$ N e $2,5\sqrt{2}$ m
- b) $0,01\sqrt{2}$ N e $5\sqrt{2}$ m
- c) $0,01\sqrt{2}$ N e $2,5\sqrt{2}$ m
- d) $50\sqrt{2}$ N e $2,5\sqrt{2}$ m
- e) $100\sqrt{2}$ N e $5\sqrt{2}$ m

2. (Ufrpr 2024) Um objeto de massa m constante está suspenso em equilíbrio por uma corda vertical (linha pontilhada CD) como mostrado na figura abaixo. A corda está conectada pelo ponto C a dois cabos (linhas cheias CA e CB), os quais, por sua vez, estão conectados, na parte superior, aos pontos A e B. Todos os cabos e a corda estão em equilíbrio e são, por hipótese, inextensíveis e têm massas desprezíveis quando comparadas com a massa do objeto suspenso. Cada cabo faz um ângulo θ com a vertical, como mostra a figura. Não há quaisquer outras forças atuando sobre o objeto além da exercida pela corda e pela atração gravitacional da Terra, e a intensidade da aceleração gravitacional é representada por g . Não há outras forças no problema além das forças exercidas pelos cabos, pela corda e pela Terra.



Com base na figura e nos dados informados, determine uma expressão algébrica para a intensidade F da força exercida por cada cabo para manter o sistema em equilíbrio.

3. (Fmj 2022) Em uma instalação artística, uma bola de handebol, de peso 4,0 N, foi pendurada na baliza por meio de dois fios, R e S. O fio R é horizontal e está preso a um dos postes verticais, enquanto o fio S está preso à barra transversal, formando com esta um ângulo θ .

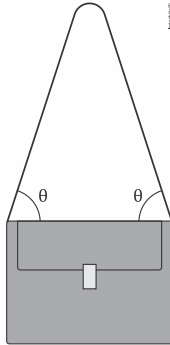


Sabendo que $\sin \theta = 0,8$ e que $\cos \theta = 0,6$, as intensidades das forças que os fios R e S aplicam na bola são, respectivamente,

- a) 3,0 N e 5,0 N.
- b) 5,0 N e 3,0 N.
- c) 4,0 N e 4,0 N.
- d) 6,0 N e 2,0 N.

e) 2,0 N e 6,0 N.

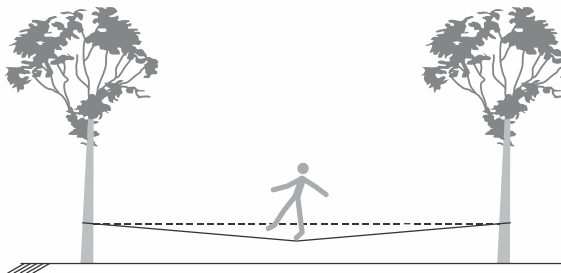
4. (Famema 2021) Um modelo de bolsa possui uma alça de couro com suas extremidades presas a uma parte horizontal indeformável da bolsa. Considere que a bolsa, ao ser usada apoiada sobre o ombro pelo ponto intermediário da alça, mantenha-se na forma mostrada na figura.



Suponha que o conteúdo da bolsa esteja uniformemente distribuído em seu interior e que a massa desse conteúdo, somada com a massa da bolsa, resulte em 1,6 kg. Considerando-se a aceleração da gravidade igual a 10 m/s^2 , $\sin \theta = 0,8$ e $\cos \theta = 0,6$, a intensidade da força de tração na alça de couro é de

- a) 8 N.
- b) 16 N.
- c) 10 N.
- d) 6 N.
- e) 20 N.

5. (Enem 2019) *Slackline* é um esporte no qual o atleta deve se equilibrar e executar manobras estando sobre uma fita esticada. Para a prática do esporte, as duas extremidades da fita são fixadas de forma que ela fique a alguns centímetros do solo. Quando uma atleta de massa igual a 80 kg está exata mente no meio da fita, essa se desloca verticalmente, formando um ângulo de 10° com a horizontal, como esquematizado na figura. Sabe-se que a aceleração da gravidade é igual a 10 m/s^2 , $\cos(10^\circ) = 0,98$ e $\sin(10^\circ) = 0,17$.

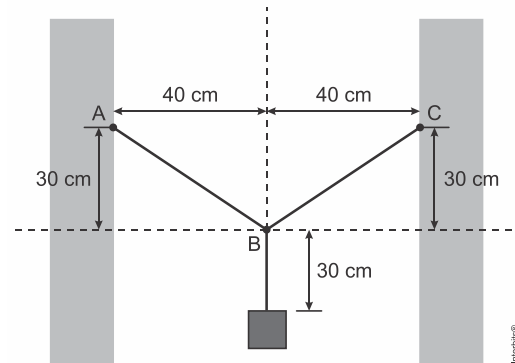


Qual é a força que a fita exerce em cada uma das

árvores por causa da presença da atleta?

- a) $4,0 \times 10^2 \text{ N}$
- b) $4,1 \times 10^2 \text{ N}$
- c) $8,0 \times 10^2 \text{ N}$
- d) $2,4 \times 10^3 \text{ N}$
- e) $4,7 \times 10^2 \text{ N}$

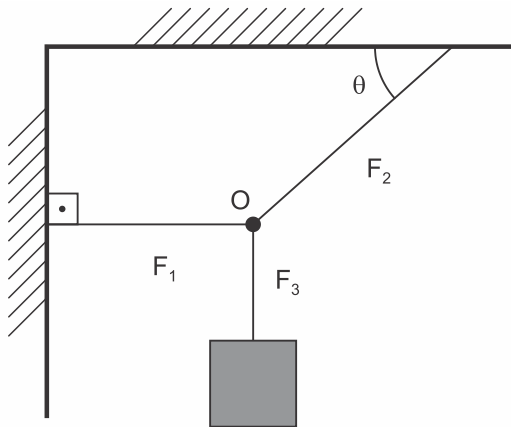
6. (Eear 2018) Um pedreiro decidiu prender uma luminária de 6 kg entre duas paredes. Para isso dispunha de um fio ideal de 1,3 m que foi utilizado totalmente e sem nenhuma perda, conforme pode ser observado na figura.



Sabendo que o sistema está em equilíbrio estático, determine o valor, em N, da tração que existe no pedaço $\overline{AB}$ do fio ideal preso à parede. Adote o módulo da aceleração da gravidade no local igual a 10 m/s^2 .

- a) 30
- b) 40
- c) 50
- d) 60

7. (Unisinos 2017) Um bloco de peso P é suspenso por três fios (F_1 , F_2 e F_3) e mantido em equilíbrio, conforme mostrado na figura. O ângulo que o fio F_2 forma com o teto é $\theta = 30^\circ$. Os módulos das trações os três fios são, respectivamente, T_1 , T_2 e T_3 .



Dados			
Ângulo	30°	45°	60°
Seno	0,50	0,71	0,86
Cosseno	0,86	0,71	0,50

Nesta situação, tem-se a seguinte relação das trações nos fios:

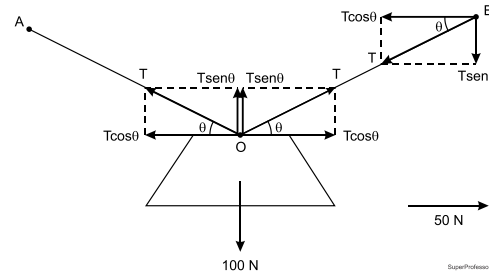
- a) $T_1 = T_2$
- b) $T_1 = P$
- c) $T_2 = P$
- d) $T_1 = 0,58 \cdot P$
- e) $T_1 = 1,72 \cdot P$

Gabarito EXERCÍCIOS DE EMBASAMENTO:

Resposta da questão 1:

[D]

Para o equilíbrio vertical do ponto O, temos:



$$2T \sin \theta = 100$$

$$T \sin \theta = 50 \quad (I)$$

Para o equilíbrio horizontal do ponto B, temos:

$$T \cos \theta = 50 \quad (II)$$

Logo, $\theta = 45^\circ$. E a tração na corda vale:

$$T \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 50$$

$$T = \frac{100}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$

$$\therefore T = 50\sqrt{2} \text{ N}$$

E a distância do barco à estaca é de:

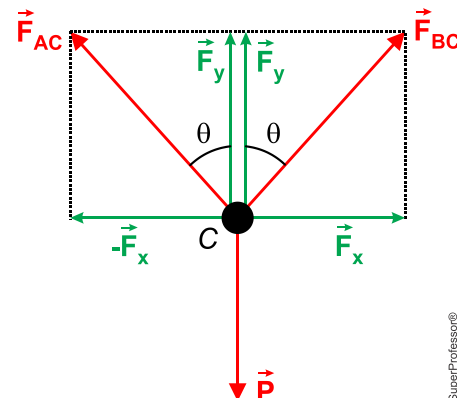
$$d = 2 \cdot \frac{5 \text{ m}}{2} \cdot \cos 45^\circ$$

$$d = 5 \text{ m} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\therefore d = 2,5\sqrt{2} \text{ m}$$

Resposta da questão 2:

A figura mostra as forças atuantes no nó C, bem como as suas componentes.



Por simetria:
 $F_{AC} = F_{BC} = F$.

Se o sistema está em equilíbrio, a resultante é nula em qualquer direção.

- Na horizontal:

$$F_{ACx} = F_{BCx} = F_x$$

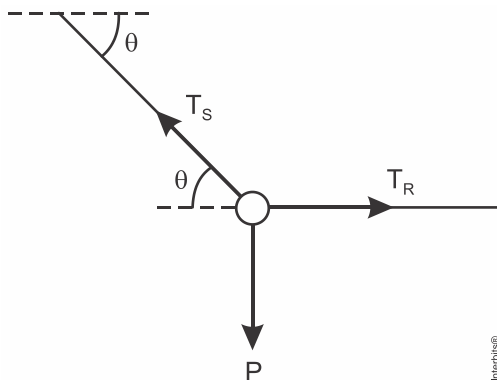
- Na vertical:

$$2F_y = P \Rightarrow 2F \cos \theta = mg \therefore F = \frac{mg}{2 \cos \theta}$$

Resposta da questão 3:

[A]

Da figura abaixo, obtemos:



$$T_S \sin \theta = P$$

$$T_S \cdot 0,8 = 4$$

$$\therefore T_S = 5 \text{ N}$$

$$T_S \cos \theta = T_R$$

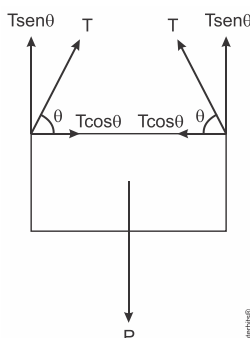
$$5 \cdot 0,6 = T_R$$

$$\therefore T_R = 3 \text{ N}$$

Resposta da questão 4:

[C]

Representando as forças na bolsa, temos:



$$2T \sin \theta = P$$

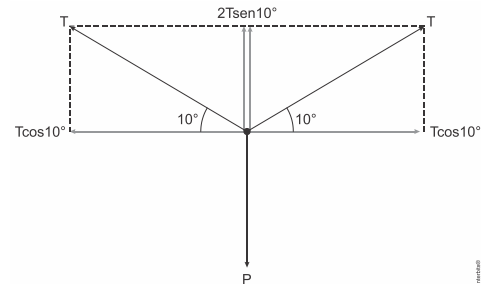
$$2T \cdot 0,8 = 1,6 \cdot 10$$

$$\therefore T = 10 \text{ N}$$

Resposta da questão 5:

[D]

Esquema de forças no ponto mais baixo da fita:



Tração exercida pela fita sobre as árvores:

$$2T \sin 10^\circ = P$$

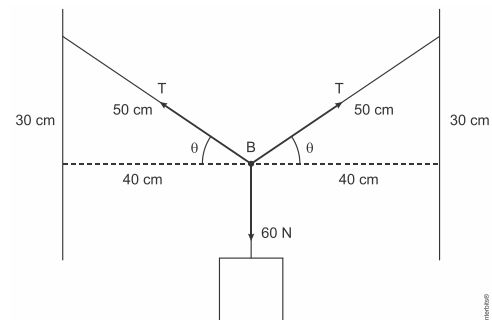
$$2T \cdot 0,17 = 800$$

$$\therefore T \cong 2,4 \cdot 10^3 \text{ N}$$

Resposta da questão 6:

[C]

Isolando o ponto B, temos:



$$2T \sin \theta = mg$$

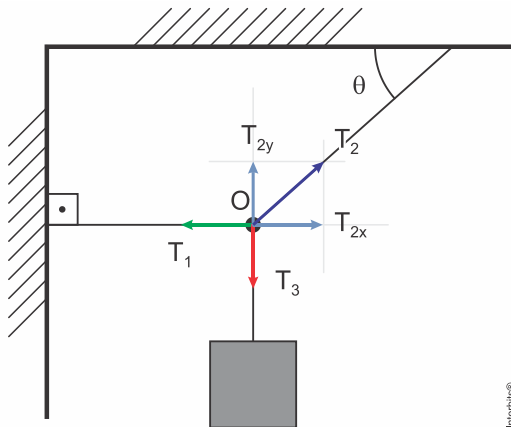
$$2T \cdot \frac{3}{5} = 6 \cdot 10$$

$$\therefore T = 50 \text{ N}$$

Resposta da questão 7:

[E]

De acordo com o diagrama de forças abaixo, temos:



Equilíbrio no eixo horizontal:

$$\begin{aligned} T_1 &= T_2 \cdot \cos \theta \\ T_1 &= T_2 \cdot \cos 30^\circ \\ T_1 &= 0,86 T_2 \quad (1) \end{aligned}$$

Equilíbrio no eixo vertical:

$$\begin{aligned} P &= T_2 \cdot \sin \theta \\ P &= T_2 \cdot \sin 30^\circ \\ P &= T_2 \cdot \frac{1}{2} \\ T_2 &= 2P \quad (2) \end{aligned}$$

Substituindo a equação (2) na equação (1), temos:

$$\begin{aligned} T_1 &= 0,86 \cdot 2P \\ T_1 &= 1,72P \end{aligned}$$

EXERCÍCIOS DE SALA

1. Analise as proposições e classifique-as como verdadeiras ou falsas.

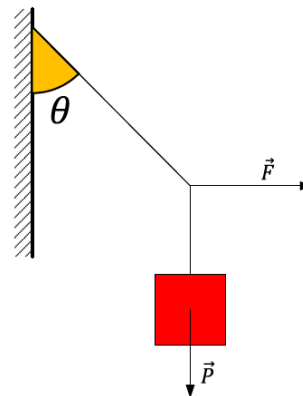
I. Uma partícula sujeita à ação de uma única força pode estar em equilíbrio.

II. Se uma partícula está em equilíbrio sob ação de apenas duas forças, elas devem ter mesmo módulo, mesma direção e sentidos opostos.

III. Quando a soma vetorial de todas as forças atuantes em uma partícula é zero, ela pode estar em movimento.

- a) Somente I é verdadeira.
- b) Somente II é verdadeira.
- c) Somente III é verdadeira.
- d) I e II são verdadeiras.
- e) II e III são verdadeiras.

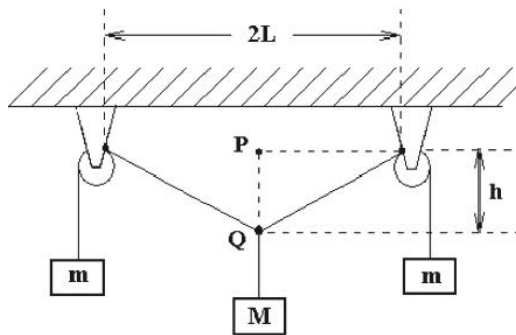
2. (ITA-SP) Um bloco de peso $\vec{P}$ é sustentado por fios, como indica a figura.



Calcular o módulo da força horizontal $\vec{F}$.

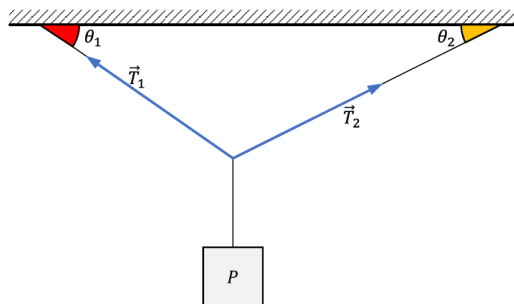
- a) $F = P \cdot \sin \theta$
- b) $F = P \cdot \cos \theta$
- c) $F = P \cdot \sin \theta \cdot \cos \theta$
- d) $F = P \cdot \cot \theta$
- e) $F = P \cdot \tan \theta$

3. (ITA-SP) No arranjo mostrado na figura com duas polias, o fio inextensível e sem peso sustenta a massa M e, também, simetricamente, as duas massas m , em equilíbrio estático. Desprezando o atrito de qualquer natureza, o valor h da distância entre os pontos P e Q vale



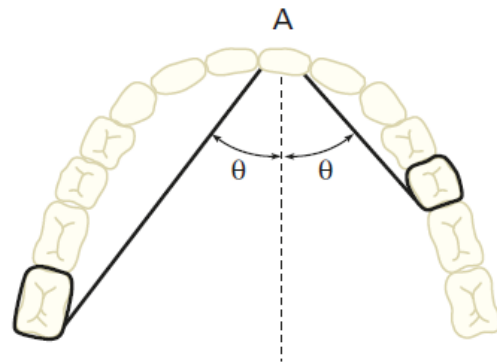
- $\frac{ML}{\sqrt{4m^2 - M^2}}$
- L
- $\frac{ML}{\sqrt{M^2 - 4m^2}}$
- $\frac{mL}{\sqrt{4m^2 - M^2}}$
- $\frac{ML}{\sqrt{2m^2 - M^2}}$

4. (ITA-SP) Um corpo de peso P está suspenso por fios como indica a figura. A tensão T_1 é dada por



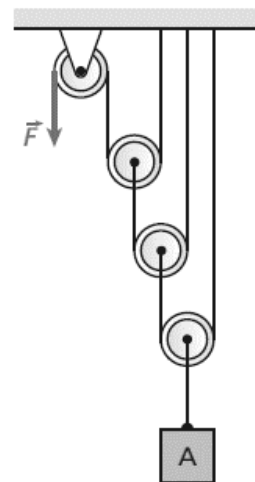
- $T_1 = \frac{P \cos \theta_2}{\sin(\theta_1 + \theta_2)}$
- $T_1 = \frac{P \cos \theta_1}{\sin(\theta_1 + \theta_2)}$
- $T_1 = \frac{P \cos \theta_2}{\cos(\theta_1 + \theta_2)}$
- $T_1 = \frac{P \cos \theta_1}{\cos(\theta_1 + \theta_2)}$
- $T_1 = \frac{P \sin \theta_1}{\sin(\theta_1 + \theta_2)}$

5. (UFPE) Para corrigir o desalinhamento do dente incisivo A de um paciente, um dentista fez passar um elástico por esse dente e o amarrou a dois dentes posteriores, conforme a figura.



Sabendo que a tensão no elástico é de 10 N e que $\cos \theta = 0,85$, determine o valor em newtons da força total aplicada pelo elástico sobre o dente A.

6. (OBF) É muito comum observarmos em oficinas de automóveis, em hospitais e cais de portos, pessoas utilizando-se de talhas exponenciais ou polias móveis para elevar pesados objetos, tais como motores.



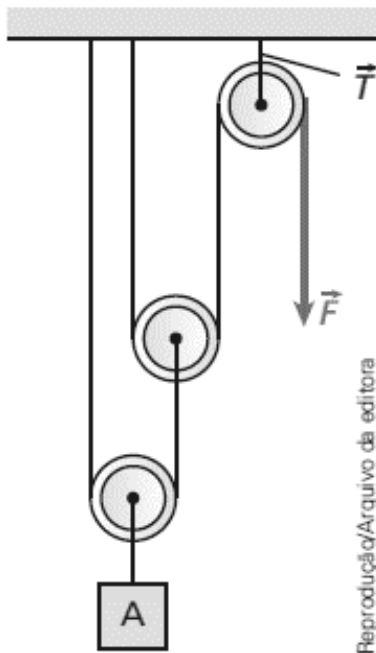
Esse fato chama a atenção de curiosos no sentido de que a força (F) aplicada à corda possui uma baixa intensidade.

Se, na situação mostrada na figura acima, a talha possui três polias móveis, qual a intensidade da força aplicada na corda, se o peso do corpo A é de 1 600 N?

- 160 N
- 200 N
- 400 N
- 800 N
- 2 000 N

7. No sistema a seguir, em equilíbrio estático, os fios são ideais, e cada polia pesa $P_0 = 10$ N.

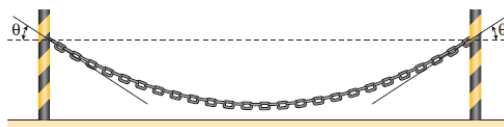
Se $P = 30$ N, o módulo da tração T , que sustenta a polia superior, em newtons, é



Reprodução/Arquivo da editora

- a) 7,5
- b) 15
- c) 20
- d) 25
- e) 40

8. A figura a seguir representa uma corrente de peso igual a 40 N, cujas extremidades estão em um mesmo nível horizontal, presas em dois suportes.



Considerando iguais a 45° os ângulos θ indicados na figura, determine a intensidade da força:

- a) que a corrente exerce em cada suporte;
- b) de tração no ponto mais baixo da corrente.

RESOLUÇÃO:



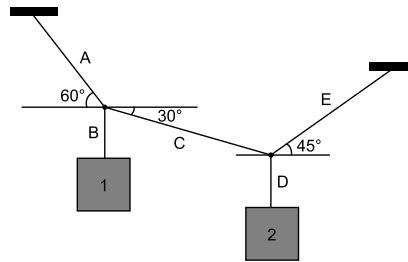
$$2T_y = P \Rightarrow 2T \sin \theta = P \Rightarrow 2T \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 40 \Rightarrow T = 20\sqrt{2} \text{ N}$$

b) Numa das metades da corrente, temos, na horizontal:

$$T' = T_x = T \cos \theta = 20\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow T' = 20 \text{ N}$$

EXERCÍCIOS DE APROFUNDAMENTO

1. (Esc. Naval 2022) Observe a figura abaixo.



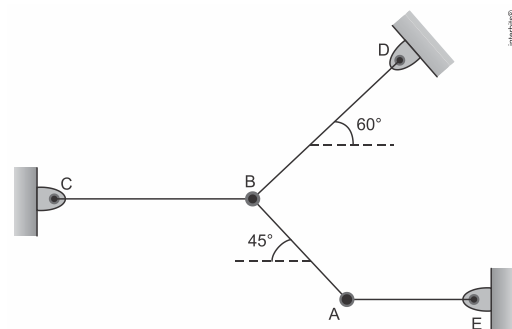
Na figura acima, os corpos 1 e 2 encontram-se em equilíbrio e estão suspensos por um conjunto de cinco fios ideais A, B, C, D e E. Se a massa do corpo 1 é 20 kg, a massa do corpo 2, em kg, deve ser igual a:

- a) $10(\sqrt{3} + 1)$
- b) $20\sqrt{3}$
- c) $20(\sqrt{3} + 1)$
- d) $40\sqrt{3}$
- e) $100\sqrt{3}$

2. Um varal de roupas é construído com uma corda flexível muito leve e inextensível, de comprimento $2c$, fixada pelas extremidades a duas paredes distanciadas de $2d$ uma da outra. Em um ponto no centro desse varal fica presa em repouso uma massa m . Assumindo que a aceleração da gravidade é g , a tensão na corda é dada por

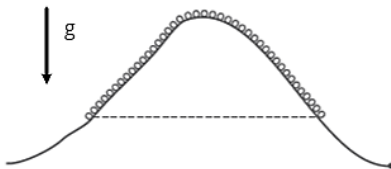
- a) $\frac{2mgc}{\sqrt{c^2 - d^2}}$.
- b) mgc .
- c) $\frac{mgc}{2\sqrt{c^2 - d^2}}$.
- d) mgc/d .

3. (Efomm 2016) Cada esfera (A e B) da figura pesa 1,00 kN. Elas são mantidas em equilíbrio estático por meio de quatro cordas finas e inextensíveis nas posições mostradas. A tração na corda BD, em kN, é

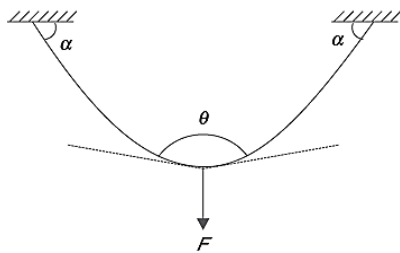


- a) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$
- b) 1
- c) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$
- d) $\frac{3\sqrt{2}}{3}$
- e) $\frac{4\sqrt{3}}{3}$

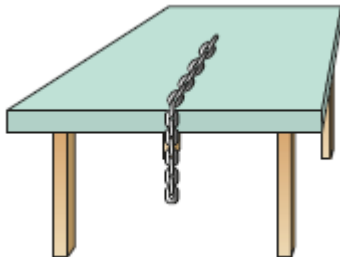
4. (Laerte Pereira) Uma corrente com massa uniforme por unidade de comprimento está em um plano vertical ao longo da encosta de uma colina plana. As duas pontas da corrente estão na mesma altura. Se a corrente for solta dessa posição, encontre sua aceleração.



5. (Laerte Pereira) Uma corda de massa m é pendurada em um teto. O ponto médio é puxado para baixo com uma força vertical $\vec{F}$. A tangente à corda em suas extremidades faz um ângulo α com o teto horizontal. As duas tangentes no ponto inferior fazem um ângulo de θ com cada uma. Encontrar o valor de θ .



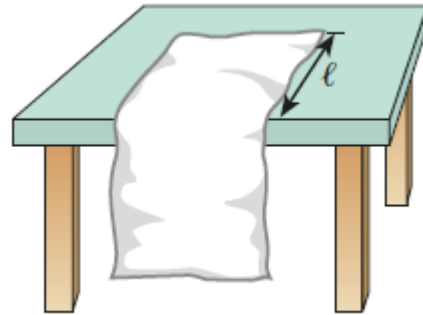
6. Uma fina corrente metálica encontra-se parcialmente dependurada de uma mesa, como ilustra a figura.



Se o coeficiente de atrito estático entre a corrente e a mesa for μ , qual é a fração mínima do comprimento

da corrente que deve ser mantida sobre a mesa para que a corrente não escorregue?

7. (UFF-RJ) Um pano de prato retangular, com 60 cm de comprimento e constituição homogênea, está em repouso sobre uma mesa, parte sobre sua superfície, horizontal e fina, e parte pendente, como mostra a figura. Sabendo-se que o coeficiente de atrito estático entre a superfície da mesa e o pano é igual a 0,50 e que o pano está na iminência de deslizar, pode-se afirmar que o comprimento l da parte sobre a mesa é:

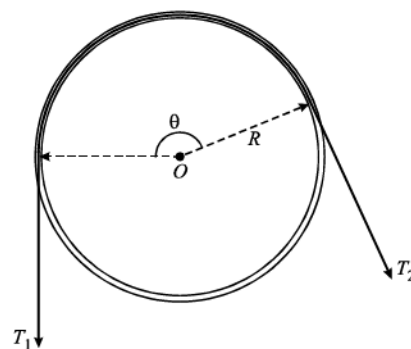


a) 40 cm. b) 45 cm. c) 50 cm. d) 55 cm. e) 58 cm.

APROFUNDAMENTO - Atrito entre polia e uma corda

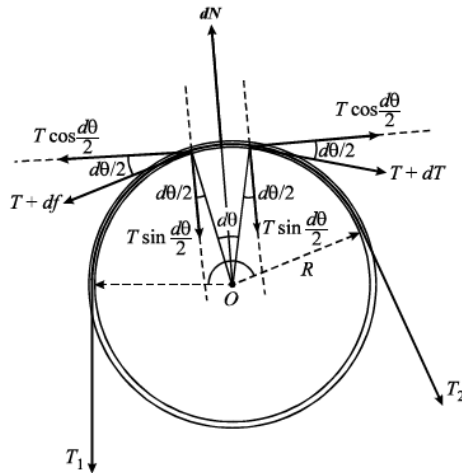
A parte da dinâmica que vimos, lidamos principalmente com polias e cordas ideais que não têm massa nem atrito. Se considerarmos o atrito entre o fio e a superfície da polia sobre a qual ele está passando, a tensão nos dois lados do fio deve ser diferente. Para desenvolver a relação nas duas tensões, tomamos uma ilustração simples.

Uma situação é mostrada na figura. Uma corda está passando sobre a superfície de uma polia que pode girar livremente em torno do eixo O que passa pelo seu centro. O ângulo de contato da corda na superfície da polia é θ e o coeficiente de atrito estático entre a superfície da polia e o fio é μ .



Se a tensão na parte direita da corda for T_2 , e se for maior do que na parte esquerda (ou seja, T_1), ela terá uma tendência de deslizamento para a direita e na corda o atrito atuará na direção de T_1 , de modo a equilibrar T_2 (como a corda não tem massa).

À medida que a diferença em T_1 e T_2 aumenta, o atrito atuando na corda aumentará até atingir o atrito limite e, então, a corda entra na iminência deslizar sobre a polia. Agora desenvolvemos uma relação nas duas tensões quando a corda entra na iminência deslizar sobre a polia. A análise é mostrada na figura.



Consideramos um pequeno elemento da corda em contato com a superfície da polia. Deixe a tensão (atuando tangencialmente) para a esquerda ser T e para a direita ser $T + dT$. O excesso de tensão dT à direita é a causa do atrito para a esquerda, se for df , devemos ter

$$dT = df = \mu \cdot dN \quad \text{eq. 1}$$

$$dN = 2(T + dT) \sin\left(\frac{d\theta}{2}\right)$$

Como $d\theta$ é de tamanho infinitesimal, $\sin\left(\frac{d\theta}{2}\right) = \frac{d\theta}{2}$ e $\cos\frac{d\theta}{2} = 1$. Além disso, o produto dos dois infinitesimais dT e $d\theta/2$ pode ser ignorado ao compará-lo com infinitesimais de primeira ordem.

$$dN = T \cdot d\theta \quad \text{eq. 2}$$

Substituindo eq.2 em eq.1

$$dT = \mu \cdot T d\theta$$

$$\frac{dT}{T} = \mu d\theta$$

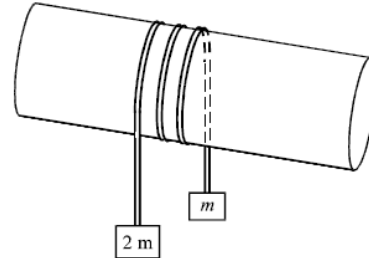
Integrando

$$\int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T} = \int_0^\theta \mu d\theta$$

$$\ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) = \mu\theta$$

$$T_2 = T_1 \cdot e^{\mu\theta}$$

8. A figura mostra um cilindro montado em um eixo horizontal. Uma corda sem massa é enrolada nela duas voltas e meia e ligada a duas massas m e $2m$. Se o sistema está em equilíbrio limite, encontre o coeficiente de atrito entre o fio e a superfície da polia.

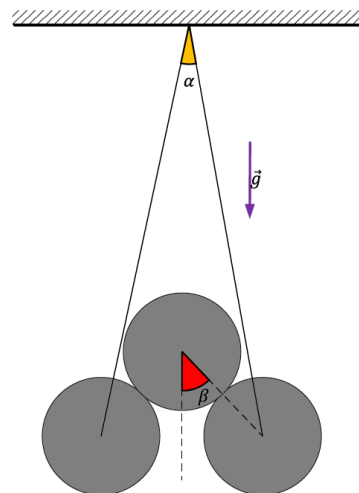


9. A caixa de 100 N está suspensa por uma corda que passa por dois cilindros fixos. O coeficiente de atrito estático é 0,2 entre a corda e o cilindro esquerdo e 0,4 entre a corda e o cilindro direito. Qual é a menor força que a mulher precisa exercer na corda para **sustentar** a caixa estacionária na iminência da caixa descer?

Dica: $e^{(\pi/10)} = 1,37$ e $e^{(2\pi/10)} = 1,87$



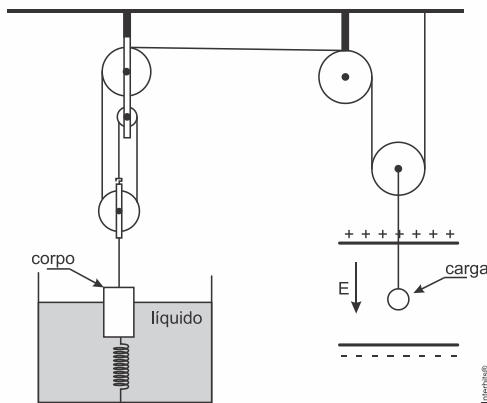
10. (RÚSSIA) Dois cilindros iguais de massa m estão suspensos por fios inextensíveis de mesmo comprimento. Entre eles é colocado outro cilindro de mesmo diâmetro e massa $2m$. Determine o ângulo β se o ângulo formado pelos fios é igual a α . Despreze todos os atritos.



11. Considere uma força de intensidade constante sendo aplicada a uma caixa de massa m que se encontra sobre uma superfície plana e horizontal. Sabendo-se que a direção da força é paralela à superfície, o coeficiente de atrito estático entre a caixa e a superfície é igual a μ , o módulo da aceleração da gravidade local é igual a g e que a caixa está na iminência de movimento, é correto afirmar que a resultante das forças de contato que a caixa recebe da superfície tem módulo igual a

- a) mg
- b) μmg
- c) $(1 + \mu)mg$
- d) $mg(1 + \mu^2)^{\frac{1}{2}}$
- e) $(mg)^{-1}(1 - \mu^2)^{\frac{1}{2}}$

12. (Ime 2019)



Um corpo encontra-se com $2/3$ de seu volume submerso. Uma de suas extremidades está presa por uma corda a um conjunto de roldanas que suspende uma carga puntiforme submetida a um campo elétrico uniforme. A outra extremidade está presa a uma mola distendida que está fixa no fundo do recipiente. Este sistema se encontra em equilíbrio e sua configuração é mostrada na figura acima.

Desprezando os efeitos de borda no campo elétrico, a deformação da mola na condição de equilíbrio é:

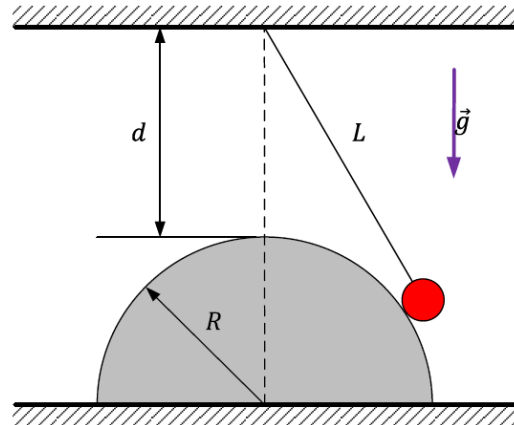
Dados:

- a corda e as roldanas são ideais;
- aceleração da gravidade: g ;
- massa específica do fluido: ρ ;
- massa específica do corpo: 2ρ ;
- constante elástica da mola: k ;
- volume do corpo: V ;
- intensidade do campo elétrico uniforme: E ;
- massa da carga elétrica: m ; e
- carga elétrica: $+q$.

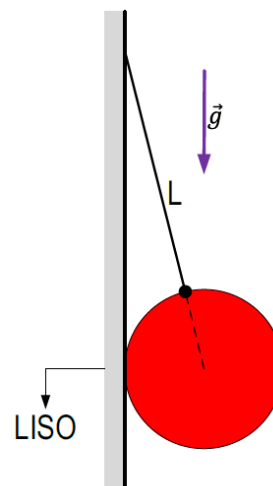
a) $\frac{g}{k} \left(\frac{m}{2} - \frac{4\rho V}{3} \right) + \frac{qE}{2k}$

- b) $\frac{g}{k} \left(\frac{3m}{2} - \frac{4\rho V}{3} \right) + \frac{3qE}{2k}$
- c) $\frac{g}{3k} (m - 4\rho V + qE) + \frac{qE}{k}$
- d) $\frac{g}{k} \left(\frac{mg}{2} - \frac{4\rho V}{3} \right) + \frac{qE}{2k}$
- e) $\frac{mg}{k} \left(\frac{qE}{d} - \frac{2\rho V}{3} \right)$

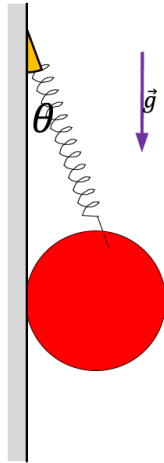
13. (BRASIL) Uma bolinha de aço, de peso P , encontra-se em repouso presa em um fio suposto ideal, de comprimento L , e apoiada em um hemisfério fixo de raio R , praticamente sem atrito. Sendo da distância do polo do hemisfério ao ponto de suspensão do fio, determine a intensidade da força de tração exercida pelo fio em função de P , L , de R .



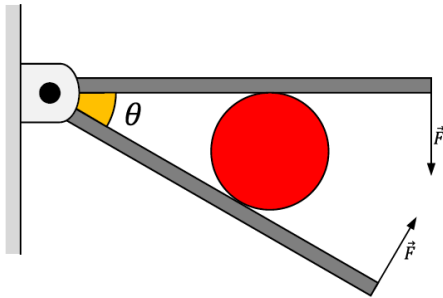
14. (PERU) Uma esfera homogênea de massa M e raio r se encontra em equilíbrio sustentada por uma corda ideal de comprimento L . Qual força mínima será necessária aplicar em um ponto médio da corda para que a esfera perca o contato com a parede?



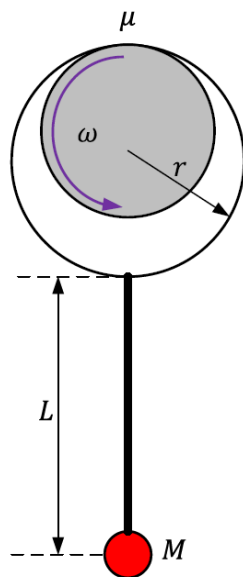
15. (PERU) A figura abaixo mostra uma esfera homogênea de $4,8\text{N}$ a ponto de deslizar. Determine o módulo da força de reação da parede sobre a esfera. Dados: $(\theta; =; 53^\circ; \mu_E = 075tg37^\circ = 075)$



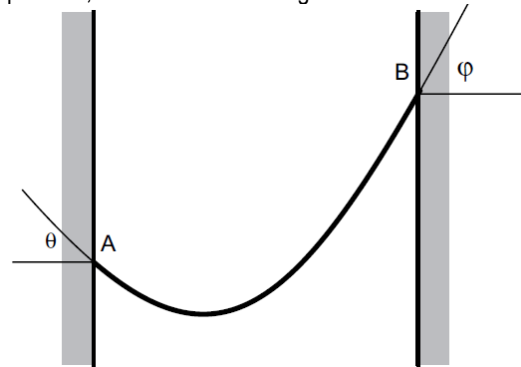
16. (RÚSSIA/PERU) Com a aplicação das forças $\vec{F}$ se tenta reduzir o ângulo Θ . Qual deve ser o coeficiente de atrito entre a bola e os planos, para que a bola não escape? Considere que o sistema se encontra sobre um plano horizontal liso.



17. (RÚSSIA) Uma extremidade de uma haste de arame leve é dobrada em um arco de raio r . A parte reta da barra tem comprimento l ; uma bola de massa M é anexada à outra extremidade da haste. O pêndulo assim formado é pendurado pelo arco em um eixo giratório. O coeficiente suficiente de atrito entre o eixo e o arco é μ . Encontre o ângulo de equilíbrio entre a haste e a vertical.

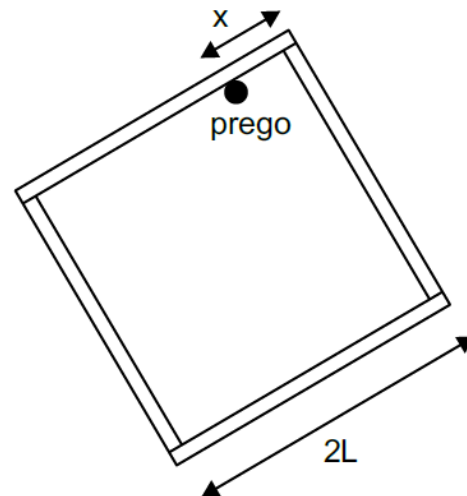


18. Uma corda de massa m é pendurada entre duas paredes, conforme mostra a figura.



Sabendo que nos pontos A e B, nos quais a corda está presa na parede, os ângulos que ela faz com a horizontal são θ e ϕ , respectivamente, e que a gravidade local é g , encontre a força de tração na corda nos pontos A e B e no ponto mais baixo da curva.

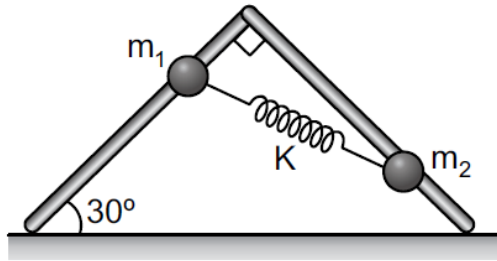
19. Quatro barras homogêneas de comprimento $2L$ são ligadas entre si, formando uma estrutura quadrada rígida. Essa estrutura é pendurada em um prego no qual o coeficiente de atrito é μ , e se encontra na iminência de movimento. Calcule a distância x do prego ao vértice indicado da estrutura para que o equilíbrio seja possível. Considere a gravidade local vertical g .



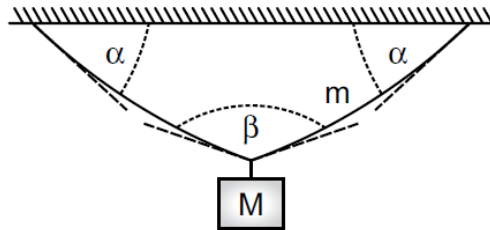
- a) $x = L\mu$
- b) $x = L(1 - \mu)$
- c) $x = L(1 + \mu)$
- d) $x = \frac{L}{\mu}$
- e) $x = \frac{L}{1 - \mu}$

20. Considere duas massas pontuais ligadas por uma mola e atravessadas em um arame dobrado com ângulo reto, conforme mostrado na figura. Sabendo que as massas estão em equilíbrio, que não há atrito e que $m_1 = 0,1 \text{ kg}$, $m_2 = 0,3 \text{ kg}$ e $K = 1,3 \text{ N/cm}$, determine a deformação da mola.

Dado: $\sqrt{7} = 2,6$.

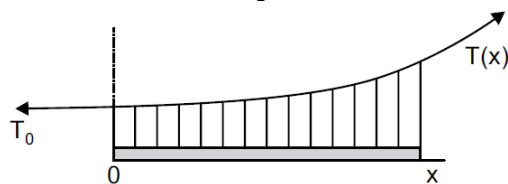


21. Um bloco de massa M é pendurado no teto por uma corda de massa m , como indicado na figura.



Encontre o ângulo β em função do ângulo α e demais parâmetros fornecidos.

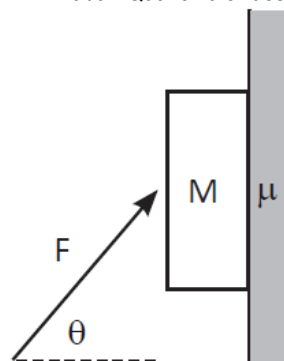
22. Um cabo principal sem massa sustenta uma ponte com massa por unidade de comprimento constante w . Ele é ligado à ponte por vários outros cabos finos ideais, como indicado na figura.



Sabendo que a tração em $x = 0$ é horizontal de módulo T_0 , encontre:

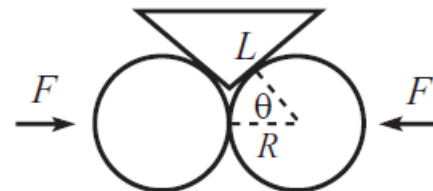
- A equação $y(x)$ que descreve o formato do cabo.
 - A tração como função de x .
- Considere a gravidade local g .

23. (HARVARD) Um bloco de massa M é posicionado contra uma parede vertical. O coeficiente de atrito entre o bloco e a parede é μ . Você deseja aplicar uma força F , como mostrado na figura, de tal forma a manter o bloco estático. O ângulo entre a força e a horizontal é θ . Para um dado θ , qual a força mínima a ser aplicada? Para que θ a força mínima é minimizada? Qual o valor dessa força?

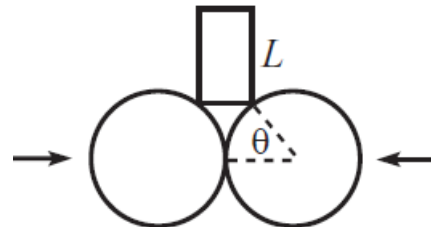


24. Cada um dos seguintes objetos planos é colocado sobre dois círculos sem atrito de raio R . Cada objeto possui uma densidade superficial uniforme σ , e o ponto de contato entre eles e os círculos faz um ângulo θ com a horizontal, conforme mostrado nas figuras. Para cada caso, encontre a força horizontal que deve ser aplicada aos círculos para manter eles juntos. Para que ângulo θ essas forças são máximas ou mínimas?

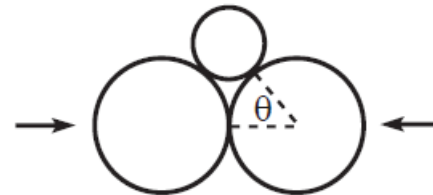
a) Um triângulo isósceles de lado comum L .



b) Um retângulo de altura L .



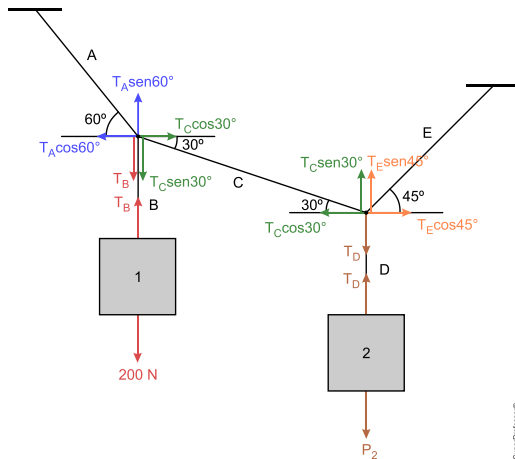
c) Um círculo.



GABARITO DE EXERCÍCIOS DE APROFUNDAMENTO

1. Resposta: [A]

Para o equilíbrio do sistema, devemos ter:



$$\begin{cases} T_A \cos 60^\circ = T_C \cos 30^\circ \\ T_A \sin 60^\circ = T_B + T_C \sin 30^\circ \\ T_B = 200 \text{ N} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{T_A}{2} = \frac{\sqrt{3}T_C}{2} \\ \frac{\sqrt{3}T_A}{2} = 200 + \frac{T_C}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T_A = \sqrt{3}T_C \\ \sqrt{3}T_A = 400 + T_C \end{cases}$$

$$\Rightarrow \sqrt{3} \cdot \sqrt{3}T_C = 400 + T_C \Rightarrow 3T_C = 400 + T_C \Rightarrow T_C = 200 \text{ N}$$

$$T_C \cos 30^\circ = T_E \cos 45^\circ \Rightarrow 200 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{2}T_E}{2} \Rightarrow T_E = \frac{200\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \text{ N}$$

$$T_C \sin 30^\circ + T_E \sin 45^\circ = T_D \Rightarrow 200 \cdot \frac{1}{2} + \frac{200\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = T_D \Rightarrow T_D = 100(1 + \sqrt{3}) \text{ N}$$

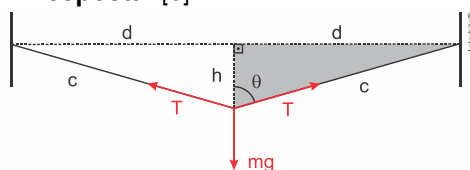
Portanto, a massa do corpo 2 deve ser igual a:

$$P_2 = m_2 g = T_D$$

$$m_2 \cdot 10 = 100(1 + \sqrt{3})$$

$$\therefore m_2 = 10(1 + \sqrt{3}) \text{ kg}$$

2. Resposta: [C]



No triângulo destacado:

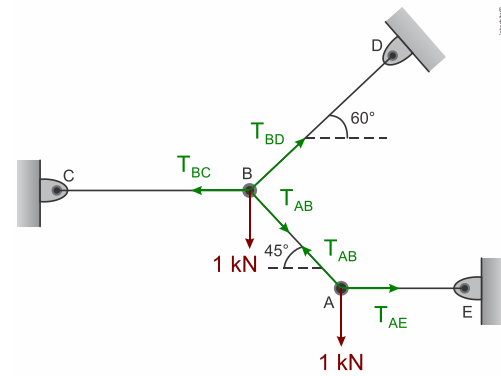
$$h^2 + d^2 = c^2 \Rightarrow h = \sqrt{c^2 - d^2}$$

Para o equilíbrio:

$$2T \cos \theta = mg \Rightarrow 2T \frac{h}{c} = mg \Rightarrow T = \frac{mgc}{2h} \Rightarrow T = \frac{2mg}{2\sqrt{c^2 - d^2}}$$

3. Resposta: [E]

De acordo com o diagrama de forças abaixo:



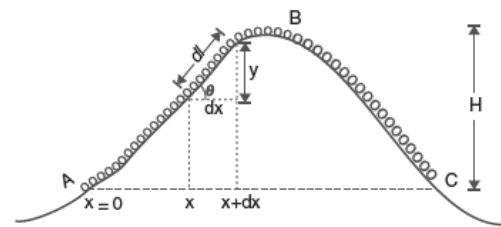
Equilíbrio de forças no eixo vertical:

$$T_{BD} \cdot \sin 60^\circ - 1 \text{ kN} - T_{AB} \cdot \sin 45^\circ + T_{AB} \cdot \sin 45^\circ - 1 \text{ kN} = 0$$

$$T_{BD} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 2 \text{ kN} = 0$$

$$T_{BD} = \frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{3} \text{ kN}$$

4. Vamos calcular a força líquida da gravidade ao longo da inclinação da parte AB da corrente



considerar o pequeno segmento da corrente entre

X e X + dX.

A força gravitacional ao longo da inclinação é

$$\lambda \cdot dl \cdot g \cdot \sin \theta$$

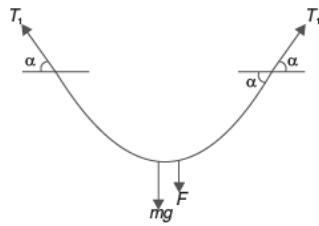
A força da gravidade líquida ao longo da encosta na parte AB é

$$\lambda g \int dl \cdot \sin \theta = \lambda g \int dy = \lambda g \cdot H$$

Portanto, a força não depende do perfil da colina. Ela depende apenas da altura de B de A. Para a parte BC também a força será a mesma. Portanto, a força líquida sobre a corrente é zero. **Equilíbrio estático.**

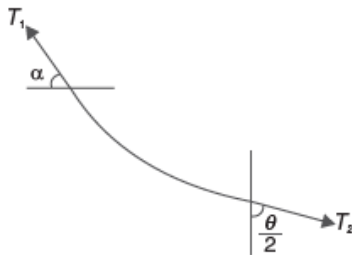
5. Resolução:

Para o equilíbrio da corda



$$2T_1 \sin \alpha = F + mg$$

Considere o equilíbrio da metade da corda



$$T_1 \cos \alpha = T_2 \sin \frac{\theta}{2}$$

Também,

$$2T_2 \cos \frac{\theta}{2} = F$$

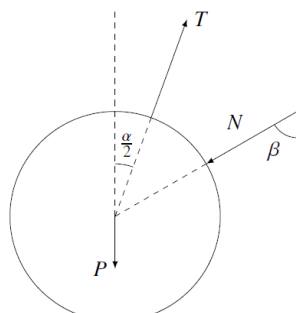
Dividindo as equações

$$\frac{1}{2} \tan \left(\frac{\theta}{2} \right) = \frac{T_1 \cdot \cos \alpha}{F}$$

Usando a primeira equação:

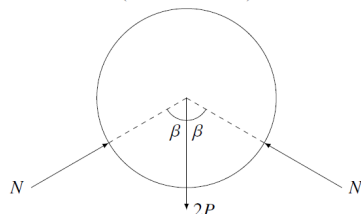
$$\theta = 2 \tan^{-1} \left[\left(\frac{F + mg}{F} \right) \cot \alpha \right]$$

10



(Cilindro da esquerda)

(Cilindro central)



Para um dos cilindros laterais, temos

$$\begin{cases} N \sin \beta = T \sin \left(\frac{\alpha}{2} \right) & \text{(I)} \\ T \cos \left(\frac{\alpha}{2} \right) = N \cos \beta + P & \text{(II)} \end{cases}$$

Para o cilindro central,

$$2N \cos \beta = 2P \Rightarrow N \cos \beta = P \text{ (III).}$$

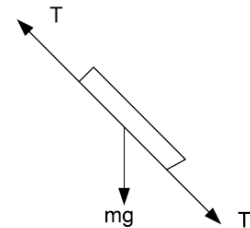
Usando (III) em (II), podemos reescrever o sistema como

$$\begin{cases} T \sin \left(\frac{\alpha}{2} \right) = N \sin \beta & \text{(I)} \\ T \cos \left(\frac{\alpha}{2} \right) = 2N \cos \beta & \text{(IV)} \end{cases}$$

Dividindo (I) por (IV), vem

$$\frac{T \sin(\alpha/2)}{T \cos(\alpha/2)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{N \sin \beta}{N \cos \beta} \Rightarrow \tan \beta = 2 \tan \left(\frac{\alpha}{2} \right).$$

18. Solução:



Cada pedaço da corda está sujeito a duas forças de tração, em suas extremidades, e à sua força peso. Como o peso está na vertical; na horizontal, as componentes da tração devem se anular, enquanto a resultante da tração na vertical deve equilibrar o peso.

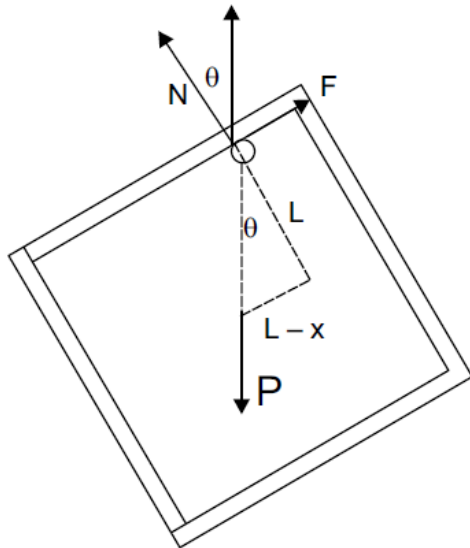
$$\Delta T_x = 0 \rightarrow T_a \cos \theta = T_b \cos \phi = T_x$$

$$\Delta T_y = mg \rightarrow T_a \sin \theta + T_b \sin \phi = mg$$

Resolvendo o sistema, encontramos o valor de T_a , T_b e T_x .

19. Considere o seguinte esquema:

A força resultante da soma vetorial da normal com o atrito deve ser vertical para cima e deve estar na mesma linha vertical que o peso. Assim, é garantido o equilíbrio translacional e rotacional. Como estamos na iminência do movimento, podemos afirmar que $\tan \theta = \mu$, e da geometria do problema $\tan \theta = (L - x)/L$, o que resulta em: $x = L(1 - \mu)$.



23. Resolução do prof Laerte

Considere um bloco de massa M encostado em uma parede vertical. Uma força $\vec{F}$ é aplicada formando um ângulo θ com a horizontal.

Desejamos determinar:

1. A força mínima F para um valor fixo de θ ;
2. O ângulo θ que torna essa força mínima;
3. O valor absoluto da força mínima.

Assumiremos que:

- O bloco permanece em repouso;
- A parede é vertical;
- O coeficiente de atrito estático entre o bloco e a parede é μ ;
- A força F aponta para cima e contra a parede;
- $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$.

Decomposição da força aplicada

A força $\vec{F}$ possui duas componentes:

- Componente horizontal:
 $F_x = F \cos \theta$
- Componente vertical:
 $F_y = F \sin \theta$

A componente horizontal comprime o bloco contra a parede, gerando a força normal N .

Força normal

Como o bloco está em equilíbrio na direção horizontal, a resultante horizontal deve ser nula.

A parede exerce uma força normal N para a esquerda, enquanto a componente horizontal da força aplicada aponta para a direita.

Assim:

$$N = F \cos \theta$$

Portanto, a força normal exercida pela parede sobre o bloco é

$$\boxed{N = F \cos \theta}$$

Força de atrito

O bloco está sujeito ao peso Mg , direcionado para baixo.

A componente vertical $F \sin \theta$ aponta para cima. Para que o bloco permaneça em equilíbrio, a força de atrito poderá apontar para cima ou para baixo, dependendo do valor de F .

A força de atrito estático possui módulo máximo dado por

$$f_{\max} = \mu N$$

Substituindo $N = F \cos \theta$:

$$f_{\max} = \mu F \cos \theta$$

A condição geral para o atrito estático é

$$|f| \leq \mu N$$

Equilíbrio na direção vertical

Escolhendo o sentido para cima como positivo, temos:

$$F \sin \theta + f - Mg = 0$$

Logo,

$$f = Mg - F \sin \theta$$

Essa expressão mostra que:

- Se $F \sin \theta < Mg$, o atrito aponta para cima;
- Se $F \sin \theta > Mg$, o atrito aponta para baixo;
- Se $F \sin \theta = Mg$, não há necessidade de atrito.

Para o bloco permanecer em repouso, deve ser possível satisfazer:

$$|Mg - F \sin \theta| \leq \mu F \cos \theta$$

Parte I — Força mínima para um θ fixo

A desigualdade

$$|Mg - F \sin \theta| \leq \mu F \cos \theta$$

pode ser escrita como duas desigualdades:

$$-\mu F \cos \theta \leq Mg - F \sin \theta \leq \mu F \cos \theta$$

Para encontrar a menor força possível, analisamos a condição que estabelece o limite inferior de F .

A primeira condição relevante é:

$$Mg - F \sin \theta \leq \mu F \cos \theta$$

Reorganizando:

$$Mg \leq F \sin \theta + \mu F \cos \theta$$

Colocando F em evidência:

$$Mg \leq F(\sin \theta + \mu \cos \theta)$$

Portanto:

$$F \geq \frac{Mg}{\sin \theta + \mu \cos \theta}$$

Assim, a menor força aplicada para um ângulo fixo θ é

$$F_{\min}(\theta) = \frac{Mg}{\sin \theta + \mu \cos \theta}$$

Nesse caso, o atrito está no seu valor máximo e aponta para cima:

$$f = \mu N$$

Isso ocorre porque, para obter a menor força aplicada, aproveitamos ao máximo o atrito da parede para ajudar a sustentar o bloco.

Parte II — Determinação do ângulo que minimiza F

A expressão obtida é

$$F_{\min}(\theta) = \frac{Mg}{\sin \theta + \mu \cos \theta}$$

Como Mg é constante, para minimizar F devemos maximizar o denominador:

$$\sin \theta + \mu \cos \theta$$

Há duas maneiras úteis de fazer isso.

Método 1 — Derivação

Definimos

$$D(\theta) = \sin \theta + \mu \cos \theta$$

Para obter o máximo de D , derivamos em relação a θ :

$$D'(\theta) = \cos \theta - \mu \sin \theta$$

No ponto de máximo:

$$D'(\theta) = 0$$

Logo:

$$\cos \theta - \mu \sin \theta = 0$$

Portanto:

$$\cos \theta = \mu \sin \theta$$

Dividindo por $\cos \theta$:

$$1 = \mu \tan \theta$$

Assim:

$$\tan \theta = \frac{1}{\mu}$$

e, portanto,

$$\theta_{\text{ótimo}} = \arctan\left(\frac{1}{\mu}\right)$$

Método 2 — Forma trigonométrica

A expressão

$$\sin \theta + \mu \cos \theta$$

pode ser interpretada como o produto escalar entre os vetores

$$(\sin \theta, \cos \theta)$$

e

$$(1, \mu)$$

O módulo do primeiro vetor é 1, enquanto o módulo do segundo é

$$\sqrt{1 + \mu^2}$$

O valor máximo do produto escalar é o produto dos módulos:

$$\sin \theta + \mu \cos \theta \leq \sqrt{1 + \mu^2}$$

A igualdade ocorre quando os vetores são paralelos. Isso conduz novamente a

$$\tan \theta = \frac{1}{\mu}$$

Portanto:

$$\theta_{\text{ótimo}} = \arctan\left(\frac{1}{\mu}\right)$$

Parte III — Valor da força mínima

No ângulo ótimo, temos:

$$\sin \theta + \mu \cos \theta = \sqrt{1 + \mu^2}$$

Substituindo na expressão da força:

$$F_{\min} = \frac{Mg}{\sqrt{1 + \mu^2}}$$

Logo, a força mínima absoluta é

$$F_{\min} = \frac{Mg}{\sqrt{1 + \mu^2}}$$

Resposta final

Para um ângulo fixo θ , a menor força capaz de manter o bloco em equilíbrio é

$$F_{\min}(\theta) = \frac{Mg}{\sin \theta + \mu \cos \theta}$$

O ângulo que minimiza essa força satisfaz

$$\tan \theta = \frac{1}{\mu}$$

ou seja,

$$\theta_{\text{ótimo}} = \arctan\left(\frac{1}{\mu}\right)$$

Finalmente, o menor valor possível da força é

$$F_{\min} = \frac{Mg}{\sqrt{1 + \mu^2}}$$

Nesse caso, o atrito estático atua para cima e está no limite:

$$f = \mu N$$

24. Interpretação do problema

Há dois círculos idênticos, cada um de raio R , apoiados um contra o outro. Um objeto plano é colocado sobre eles, sem atrito.

As forças horizontais F , aplicadas aos círculos, são dirigidas para dentro:

- no círculo da esquerda, F aponta para a direita;
- no círculo da direita, F aponta para a esquerda.

A finalidade dessas forças é impedir que os círculos se afastem devido à ação do objeto colocado sobre eles.

A densidade superficial do objeto é uniforme e vale σ . Portanto:

$$\text{massa do objeto} = \sigma A$$

e seu peso é

$$P = \sigma Ag.$$

O ângulo θ é o ângulo entre a horizontal e o raio que liga o centro de um círculo ao ponto de contato com o objeto.

Como não há atrito, a força de contato entre o círculo e o objeto é normal às superfícies. Como o círculo é tangente ao objeto, essa força é dirigida ao longo do raio que passa pelo ponto de contato.

Equilíbrio do objeto

Considere o objeto apoiado simetricamente sobre os dois círculos.

Se N é a força normal exercida por cada círculo sobre o objeto, as duas forças normais são simétricas.

Cada normal forma o ângulo θ com a horizontal. Portanto, a componente vertical de cada normal é

$$N \sin \theta.$$

Como existem dois círculos, o equilíbrio vertical do objeto fornece

$$2N \sin \theta = P.$$

Logo,

$$N = \frac{P}{2 \sin \theta}.$$

A componente horizontal da força normal vale

$$N \cos \theta.$$

Essa é a componente que tende a afastar os dois círculos.

Assim, a força horizontal necessária em cada círculo é

$$F = N \cos \theta.$$

Substituindo N :

$$F = \frac{P}{2 \sin \theta} \cos \theta.$$

Portanto,

$$F = \frac{P}{2} \cot \theta$$

Como $P = \sigma Ag$, obtemos a fórmula geral:

$$F = \frac{\sigma Ag}{2} \cot \theta$$

Item (a) — Triângulo isósceles de lado comum L Geometria do triângulo

O triângulo é isósceles, com os dois lados inclinados tendo comprimento L .

Como o lado do triângulo é tangente ao círculo, o raio que chega ao ponto de contato é perpendicular ao lado.

O raio forma ângulo θ com a horizontal. Portanto, o lado do triângulo forma ângulo

$$90^\circ - \theta$$

com a horizontal.

Consequentemente:

- a base do triângulo tem comprimento
 $b = 2L \sin \theta$;
- a altura do triângulo é
 $h = L \cos \theta$.

Vamos verificar essas expressões.

Para a metade direita do triângulo:

$$\frac{b}{2} = L \cos(90^\circ - \theta) = L \sin \theta,$$

portanto

$$b = 2L \sin \theta.$$

A altura é

$$h = L \sin(90^\circ - \theta) = L \cos \theta.$$

Área do triângulo

A área vale

$$A_{\Delta} = \frac{bh}{2}.$$

Substituindo b e h :

$$A_{\Delta} = \frac{(2L \sin \theta)(L \cos \theta)}{2}.$$

Cancelando o fator 2:

$$A_{\Delta} = L^2 \sin \theta \cos \theta.$$

Logo,

$$A_{\Delta} = L^2 \sin \theta \cos \theta$$

Também poderíamos escrever:

$$A_{\Delta} = \frac{L^2}{2} \sin 2\theta.$$

Peso do triângulo

Como a densidade superficial é σ ,

$$P_{\Delta} = \sigma A_{\Delta} g.$$

Assim,

$$P_{\Delta} = \sigma g L^2 \sin \theta \cos \theta.$$

Força horizontal

Usamos a expressão geral:

$$F = \frac{P}{2} \cot \theta.$$

Substituindo o peso do triângulo:

$$F_{\Delta} = \frac{\sigma g L^2 \sin \theta \cos \theta}{2} \cdot \frac{\cos \theta}{\sin \theta}.$$

Agora cancelamos $\sin \theta$:

$$F_{\Delta} = \frac{\sigma g L^2}{2} \cos^2 \theta.$$

Portanto,

$$F_{\Delta}(\theta) = \frac{\sigma g L^2}{2} \cos^2 \theta$$

Máximo e mínimo no caso do triângulo

Como

$$F_{\Delta}(\theta) = \frac{\sigma g L^2}{2} \cos^2 \theta,$$

e $0 < \theta < 90^\circ$, temos:

- $\cos^2 \theta$ é máximo quando $\theta = 0^\circ$;
- $\cos^2 \theta$ tende a zero quando $\theta \rightarrow 90^\circ$.

Logo:

$$F_{\Delta, \max} = \frac{\sigma g L^2}{2}$$

para

$$\theta = 0^\circ$$

e

$$F_{\Delta, \min} = 0$$

quando

$$\theta \rightarrow 90^\circ.$$

Geometricamente, os extremos exatos correspondem a configurações degeneradas. Portanto, para configurações não degeneradas, trata-se de máximo e mínimo no limite.

Item (b) — Retângulo de altura L Geometria do retângulo

Considere o ponto de contato do retângulo com o círculo da direita.

O centro do círculo está a uma distância R do ponto de contato entre os dois círculos.

A projeção horizontal do raio que liga o centro do círculo ao ponto de contato vale

$$R \cos \theta.$$

Por simetria, a largura do retângulo é igual à distância entre os dois pontos de contato.

A distância horizontal entre os centros dos círculos é $2R$. Em cada lado, a projeção horizontal que deve ser descontada é $R \cos \theta$.

Assim, a largura do retângulo é

$$b = 2R - 2R \cos \theta.$$

Logo,

$$b = 2R(1 - \cos \theta)$$

A altura do retângulo é dada pelo enunciado:

$$h = L.$$

Área do retângulo

A área é

$$A_{\text{ret}} = bh.$$

Substituindo:

$$A_{\text{ret}} = 2R(1 - \cos \theta)L.$$

Portanto,

$$A_{\text{ret}} = 2RL(1 - \cos \theta)$$

Peso do retângulo

O peso vale

$$P_{\text{ret}} = \sigma A_{\text{ret}} g.$$

Assim,

$$P_{\text{ret}} = 2\sigma g RL(1 - \cos \theta).$$

Força horizontal

Aplicando novamente

$$F = \frac{P}{2} \cot \theta,$$

temos

$$F_{\text{ret}} = \frac{2\sigma g RL(1 - \cos \theta)}{2} \cot \theta.$$

Cancelando o fator 2:

$$F_{\text{ret}} = \sigma g RL(1 - \cos \theta) \cot \theta.$$

Como

$$\cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta},$$

segue que

$$F_{\text{ret}} = \sigma g RL \frac{(1 - \cos \theta) \cos \theta}{\sin \theta}.$$

Portanto,

$$F_{\text{ret}}(\theta) = \sigma g R L \frac{\cos \theta (1 - \cos \theta)}{\sin \theta}$$

Usando a identidade

$$\frac{1 - \cos \theta}{\sin \theta} = \tan \frac{\theta}{2},$$

também podemos escrever:

$$F_{\text{ret}}(\theta) = \sigma g R L \cos \theta \tan \frac{\theta}{2}$$

Extremos da força para o retângulo

Definimos

$$f(\theta) = \frac{\cos \theta (1 - \cos \theta)}{\sin \theta}.$$

Também podemos escrever:

$$f(\theta) = \frac{\sin \theta \cos \theta}{1 + \cos \theta}.$$

Para encontrar os extremos, derivamos:

$$f'(\theta) = \frac{d}{d\theta} \left(\frac{\sin \theta \cos \theta}{1 + \cos \theta} \right).$$

Aplicando a regra do quociente:

$$f'(\theta) = \frac{(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)(1 + \cos \theta) + \sin^2 \theta \cos \theta}{(1 + \cos \theta)^2}.$$

Simplificando o numerador:

$$\begin{aligned} & (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)(1 + \cos \theta) + \sin^2 \theta \cos \theta \\ &= \cos^2 \theta - \sin^2 \theta + \cos^3 \theta - \sin^2 \theta \cos \theta \\ & \quad + \sin^2 \theta \cos \theta \\ &= \cos^2 \theta - \sin^2 \theta + \cos^3 \theta. \end{aligned}$$

Como

$$\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta,$$

temos

$$\begin{aligned} \cos^2 \theta - \sin^2 \theta &= \cos^2 \theta - (1 - \cos^2 \theta) \\ &= 2 \cos^2 \theta - 1. \end{aligned}$$

Logo,

$$f'(\theta) = \frac{\cos^3 \theta + 2 \cos^2 \theta - 1}{(1 + \cos \theta)^2}.$$

Para um ponto crítico:

$$\cos^3 \theta + 2 \cos^2 \theta - 1 = 0.$$

Fatorando:

$$\begin{aligned} \cos^3 \theta + 2 \cos^2 \theta - 1 &= (\cos \theta + 1)(\cos^2 \theta + \cos \theta - 1). \end{aligned}$$

Como $\cos \theta + 1 \neq 0$ no intervalo físico, resta:

$$\cos^2 \theta + \cos \theta - 1 = 0.$$

Definindo

$$x = \cos \theta,$$

obtemos:

$$x^2 + x - 1 = 0.$$

Pela fórmula de Bhaskara:

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Como $0 < \cos \theta < 1$, devemos escolher

$$\cos \theta = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}.$$

Portanto,

$$\theta_{\text{max}} = \arccos \left(\frac{\sqrt{5} - 1}{2} \right)$$

Numericamente:

$$\theta_{\text{max}} \approx 51,8^\circ$$

Para calcular o valor máximo de F , seja

$$c = \cos \theta = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}.$$

Como

$$c^2 = 1 - c,$$

a expressão

$$f(\theta) = \frac{c(1-c)}{\sin \theta}$$

fica

$$f(\theta) = \frac{c \cdot c^2}{\sin \theta} = \frac{c^3}{\sin \theta}.$$

Uma forma mais simples é calcular numericamente:

$$c \approx 0,618,$$

$$\sin \theta = \sqrt{1 - c^2} \approx 0,786.$$

Então:

$$f_{\text{max}} \approx \frac{(0,618)(1 - 0,618)}{0,786}$$

$$f_{\text{max}} \approx \frac{0,236}{0,786} \approx 0,300.$$

Logo,

$$F_{\text{ret,max}} \approx 0,300 \sigma g R L$$

A força tende a zero quando $\theta \rightarrow 0^\circ$ e também quando $\theta \rightarrow 90^\circ$. Portanto:

$$F_{\text{ret,min}} = 0$$

nos limites degenerados

$$\theta \rightarrow 0^\circ \text{ ou } \theta \rightarrow 90^\circ.$$

Item (c) — Um círculo

Neste item, o objeto colocado sobre os dois círculos inferiores também é um círculo.
Seja r o raio desse círculo superior.
Os centros dos dois círculos inferiores estão separados horizontalmente por $2R$.

Por simetria, o centro do círculo superior está sobre a mediatriz do segmento que une os centros dos círculos inferiores.
Considere o círculo inferior da direita. A distância entre os centros do círculo inferior e do círculo superior é

$$R + r.$$

A projeção horizontal dessa distância é R , pois o centro do círculo superior está sobre o ponto médio entre os dois círculos inferiores.
Portanto:

$$(R + r) \cos \theta = R.$$

Daí:

$$R + r = \frac{R}{\cos \theta}.$$

Logo,

$$r = \frac{R}{\cos \theta} - R.$$

Colocando Rem evidência:

$$r = R(\sec \theta - 1)$$

ou

$$r = R \frac{1 - \cos \theta}{\cos \theta}$$

Área do círculo superior

A área é

$$A_o = \pi r^2.$$

Substituindo o valor de r :

$$A_o = \pi R^2 \left(\frac{1 - \cos \theta}{\cos \theta} \right)^2.$$

Portanto,

$$A_o = \pi R^2 \frac{(1 - \cos \theta)^2}{\cos^2 \theta}$$

Peso do círculo superior

O peso vale

$$P_o = \sigma A_o g.$$

Assim,

$$P_o = \pi \sigma g R^2 \frac{(1 - \cos \theta)^2}{\cos^2 \theta}.$$

Força horizontal

Usando

$$F = \frac{P}{2} \cot \theta,$$

temos:

$$F_o = \frac{1}{2} \pi \sigma g R^2 \frac{(1 - \cos \theta)^2}{\cos^2 \theta} \cdot \frac{\cos \theta}{\sin \theta}.$$

Simplificando um fator $\cos \theta$:

$$F_o(\theta) = \frac{\pi \sigma g R^2 (1 - \cos \theta)^2}{2 \sin \theta \cos \theta}$$

Essa é uma forma correta da resposta.

Análise dos extremos para o círculo

Considere

$$f(\theta) = \frac{(1 - \cos \theta)^2}{\sin \theta \cos \theta}.$$

Quando $\theta \rightarrow 0^\circ$

Usando as aproximações para ângulos pequenos:

$$1 - \cos \theta \approx \frac{\theta^2}{2},$$

$$\sin \theta \approx \theta, \quad \cos \theta \approx 1.$$

Então:

$$f(\theta) \approx \frac{\left(\frac{\theta^2}{2}\right)^2}{\theta} = \frac{\theta^3}{4}.$$

Logo,

$$f(\theta) \rightarrow 0.$$

Consequentemente,

$$F_o \rightarrow 0 \text{ quando } \theta \rightarrow 0^\circ.$$

Quando $\theta \rightarrow 90^\circ$

Nesse caso,

$$\cos \theta \rightarrow 0,$$

e o denominador $\sin \theta \cos \theta$ tende a zero, enquanto o numerador tende a 1. Portanto:

$$F_o \rightarrow \infty.$$

Assim:

$$F_o \rightarrow \infty \text{ quando } \theta \rightarrow 90^\circ.$$

A função é crescente no intervalo físico $0^\circ < \theta < 90^\circ$. Portanto:

- não há máximo finito;
- a força cresce indefinidamente quando θ se aproxima de 90° ;
- o menor valor ocorre no limite $\theta \rightarrow 0^\circ$.

Logo,

$$F_{o,\min} = 0 \text{ para } \theta \rightarrow 0^\circ$$

e

$$F_{o,\max} \rightarrow \infty \text{ para } \theta \rightarrow 90^\circ.$$

Resumo final

A fórmula geral é

$$F = \frac{\sigma A g}{2} \cot \theta$$

em que A é a área do objeto apoiado sobre os dois círculos.

a) Triângulo isósceles de lados L

$$A_{\Delta} = L^2 \sin \theta \cos \theta$$

$$F_{\Delta} = \frac{\sigma g L^2}{2} \cos^2 \theta$$

- Máximo:

$$F_{\Delta, \max} = \frac{\sigma g L^2}{2}$$

em $\theta = 0^\circ$;

- Mínimo:

$$F_{\Delta, \min} = 0$$

quando $\theta \rightarrow 90^\circ$.

b) Retângulo de altura L

A largura é

$$b = 2R(1 - \cos \theta).$$

Logo,

$$A_{\text{ret}} = 2RL(1 - \cos \theta).$$

A força é

$$F_{\text{ret}} = \sigma g RL \frac{\cos \theta (1 - \cos \theta)}{\sin \theta}$$

ou

$$F_{\text{ret}} = \sigma g RL \cos \theta \tan \frac{\theta}{2}$$

O máximo ocorre quando

$$\cos \theta = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$$

ou

$$\theta \approx 51,8^\circ.$$

Nesse ponto:

$$F_{\text{ret}, \max} \approx 0,300 \sigma g RL$$

c) Círculo

O raio do círculo superior é

$$r = R \frac{1 - \cos \theta}{\cos \theta}.$$

Sua área é

$$A_o = \pi R^2 \frac{(1 - \cos \theta)^2}{\cos^2 \theta}.$$

Logo,

$$F_o = \frac{\pi \sigma g R^2 (1 - \cos \theta)^2}{2 \sin \theta \cos \theta}$$

- Mínimo:

$$F_{o, \min} = 0$$

quando $\theta \rightarrow 0^\circ$;

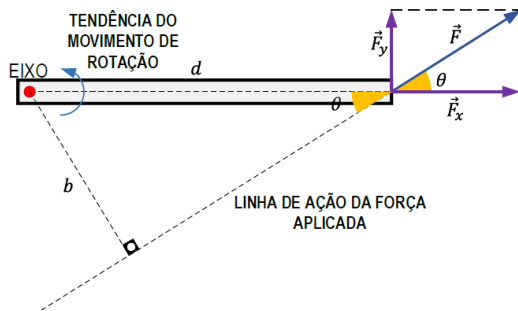
- Quando $\theta \rightarrow 90^\circ$:

$$F_o \rightarrow \infty.$$

3. MOMENTO DE UMA FORÇA OU TORQUE ($\vec{\tau}_F$):

É uma grandeza vetorial, que mede o possível efeito de rotação de uma força sobre um corpo, em torno de um ponto denominado de polo ("eixo de rotação"). Informalmente, o torque mede a "eficiência" de uma força em produzir rotação em torno de um eixo. O torque é o equivalente rotacional da força.

Considere uma porta ("visão de cima") sujeita a aplicação de uma força $\vec{F}$ a uma distância d do eixo de rotação ("polo ou eixo") conforme a figura abaixo.



A "habilidade" de uma força em produzir rotação depende de três fatores:

- Do módulo da força aplicada $|\vec{F}|$;
- Da distância d entre o ponto de aplicação da força e o eixo;
- Do ângulo (θ) no qual a força é exercida;

Primeiramente na figura 1: é possível obter as componentes da força ($\vec{F}$) que atuam sobre a chave de rodas:

$$F_y = F \cdot \sin\theta.$$

$$F_x = F \cdot \cos\theta.$$

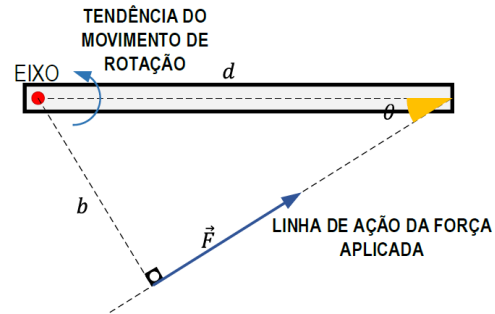
O módulo do torque (τ_F) é definido como o produto do módulo da força perpendicular ao eixo da chave pela distância do ponto de aplicação ao polo. Matematicamente, podemos escrever:

$$|\vec{\tau}_F| = |\vec{F}_y| \cdot d.$$

$$|\vec{\tau}_F| = |\vec{F}_y| \cdot d = (F \cdot \sin\theta) \cdot d$$

Vamos agora para o **CALCULAR O TORQUE** em função **DO BRAÇO DA FORÇA** (distância da linha de

ação da força ao polo). É fácil perceber na figura acima a relação:



$$\sin\theta = \frac{b}{d} \rightarrow b = d \cdot \sin\theta.$$

Finalmente, podemos escrever o torque de dois modos:

$$\tau_F = (F \cdot \sin\theta) \cdot d = F \cdot b.$$

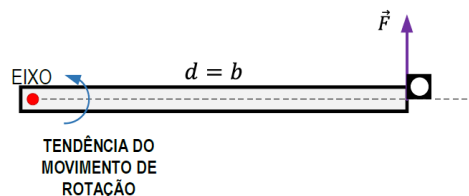
Algebricamente, podemos reescrever a eq. 1.59 na forma:

$$\tau_F = \pm(F \cdot \sin\theta) \cdot d = \pm F \cdot b.$$

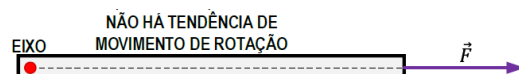
Em diversas situações, será prático determinar o braço da alavanca, e dessa forma, calcular o torque que ela produz. Vale ressaltar, que sobre a linha de ação da força aplicada (o vetor força não é alterado), por isso, a podemos transladar a força ("reposicionar a força").

OBSERVAÇÕES GERAIS:

- Apenas a componente perpendicular da força aplicada a chave produzirá torque;
- O torque terá **MÓDULO MÁXIMO** quando a força for perpendicular ao eixo da chave e estiver o mais distante possível do eixo de rotação;



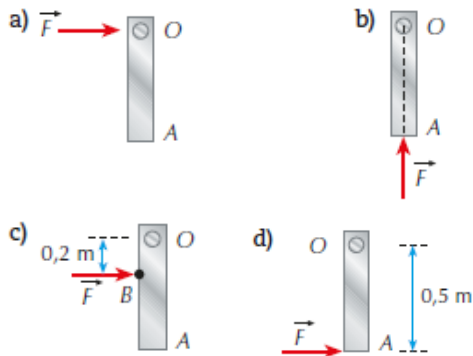
- Quanto mais distante do polo, maior será o torque aplicado pela força $\vec{F}$.
- Uma força que puxe ou empurre diretamente contra o eixo não produz torque;



UNIDADE: A unidade de torque é o newton-metro e não há nenhuma relação com a grandeza energia.

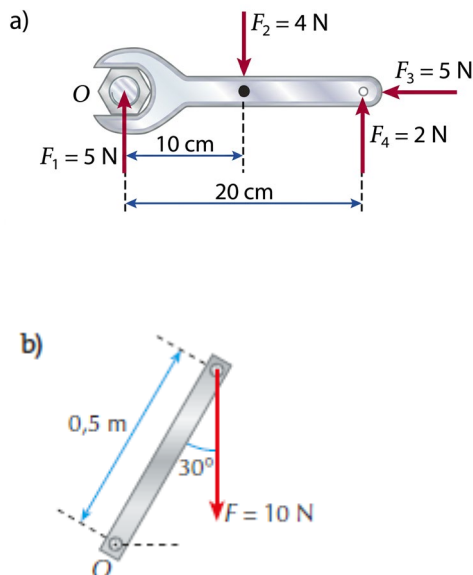
$$\text{unid}(\vec{\tau}_F) = N \cdot m$$

EXEMPLO 1: Uma barra OA situada num plano vertical pode girar em torno do ponto de suspensão O. Determine o momento da força F de intensidade 10 N em relação ao ponto O nos casos indicados abaixo:



Respostas: a) zero; b) zero; c) $2 \text{ N} \cdot \text{m}$; d) $5 \text{ N} \cdot \text{m}$.

EXEMPLO 2: Nas figuras abaixo determine os momentos das forças dadas em relação ao ponto O.

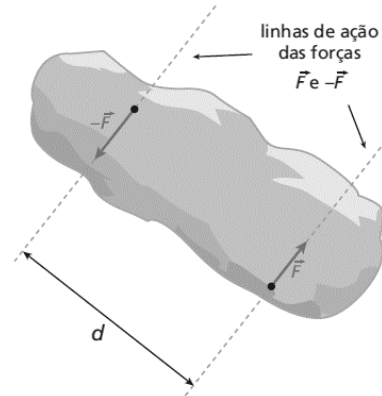


Binário

Denomina-se binário ou conjugado um sistema de duas forças de intensidades iguais, sentidos opostos e linhas de ação paralelas entre si.

Braço do binário é a distância d entre as linhas de ação das forças.

Plano do binário é o plano determinado pelas linhas de ação das duas forças.



Equilíbrio estático de um corpo extenso

Para que um corpo extenso se mantenha em equilíbrio, além da resultante (F_{res}) de todas as forças que agem sobre ele ser nula, a soma algébrica dos momentos de todas essas forças também será nula.

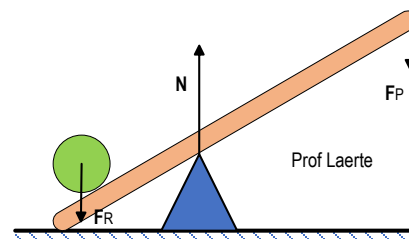
$$\sum M = 0$$

Alavancas

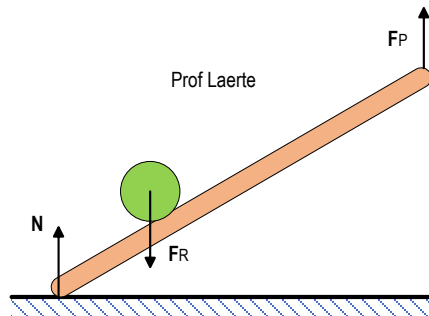
Máquinas são, de uma forma geral, dispositivos cuja função básica é transmitir, multiplicar e modificar de modo conveniente a ação das forças. Quando são constituídas de uma única peça, um único sistema rígido, são denominadas máquinas simples.

As alavancas são um tipo de máquina simples que consiste essencialmente em uma barra alongada que pode girar em torno de um ponto de apoio. Elas podem ser divididas em três tipos: interfixas, inter-resistentes e interpotentes.

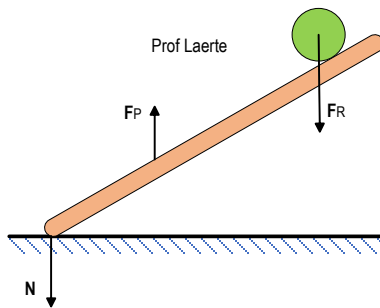
Alavanca é chamada de interfixa quando o ponto de apoio está entre os pontos de aplicação das forças potente (F_P) e resistente (F_R).



Alavanca é chamada de inter-resistente quando a força resistente (F_R) está entre o ponto de apoio e a força potente (F_P).

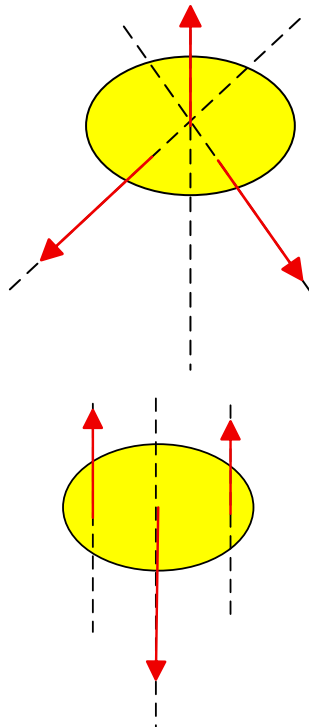


Alavanca é chamada de interpotente quando a força potente (F_P) está entre o ponto de apoio e a força resistente (F_R).

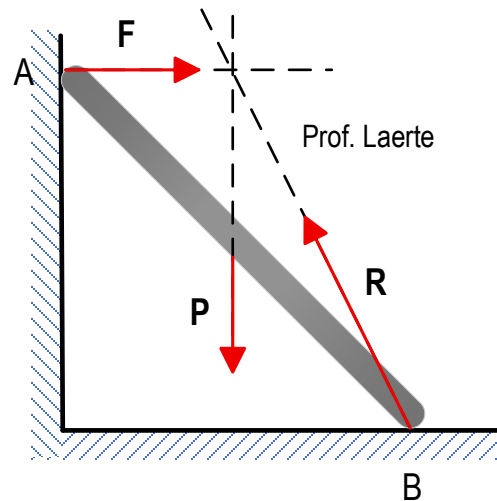


Teorema das três forças

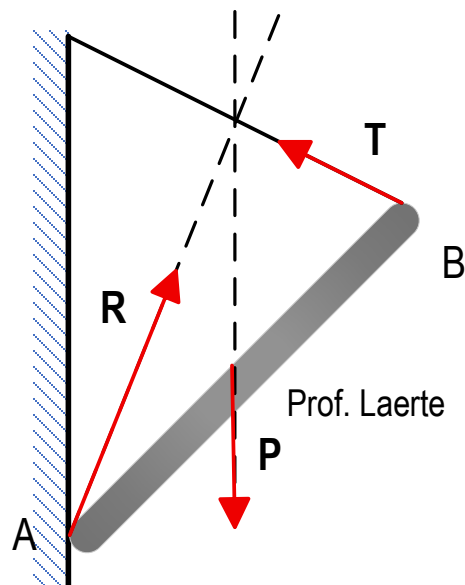
Se um corpo estiver em equilíbrio sob ação exclusiva de três forças, estas deverão ser coplanares e suas linhas de ação serão, necessariamente, concorrentes num único ponto ou paralelas.]



1º) Uma escada AB encontra-se em equilíbrio apoiada em uma parede lisa. Na figura, duas das três forças que atuam sobre a escada são o peso P e a força F exercida pela parede. Podemos obter graficamente a direção da força R , que o chão exerce na escada, na posição de equilíbrio. Basta determinar o ponto C (ponto de concorrência das linhas de ação de F e P) para concluir que a linha de ação de R é a reta determinada pelos pontos C e B .

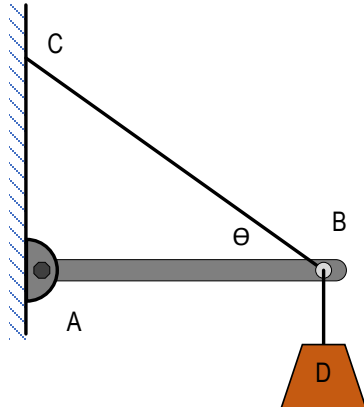


2º) Considere uma barra AB em equilíbrio pendurada em uma parede por meio de um fio de peso desprezível. Podemos determinar a direção da força R exercida pela parede sobre a barra. As linhas de ação do peso P e da tração T concorrem no ponto C . A força R tem linha de ação definida pelos pontos A e C .

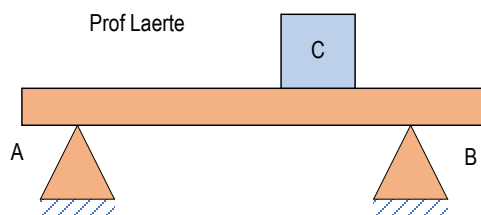


EXEMPLO 3: A barra homogênea AB de seção reta uniforme está articulada em A e é mantida na horizontal pelo fio ideal BC.

A barra tem peso 100 N e o corpo D pesa 250 N. Determine a tração no fio e as componentes vertical e horizontal da reação da articulação A.
Dados: $\sin \theta = 0,6$; $\cos \theta = 0,8$

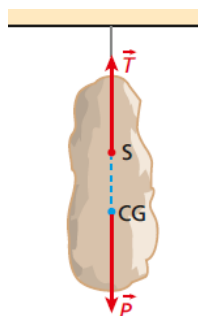


EXEMPLO 4: Uma barra homogênea de peso $P = 20$ N está apoiada nos extremos A e B distanciados de 1,0 m. A 0,20 m da extremidade B foi colocado um corpo C de peso $P_C = 20$ N. Determine as intensidades das reações dos apoios A e B sobre a barra.



Resposta: $Y_A = 14$ N e $Y_B = 26$ N

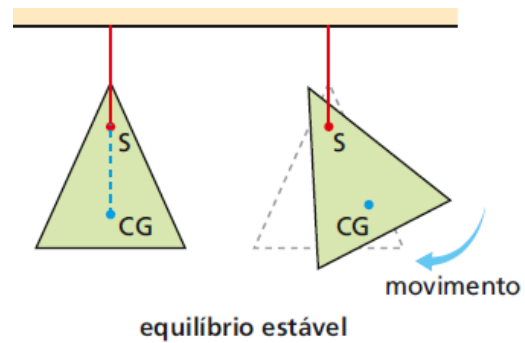
Equilíbrio dos corpos suspensos



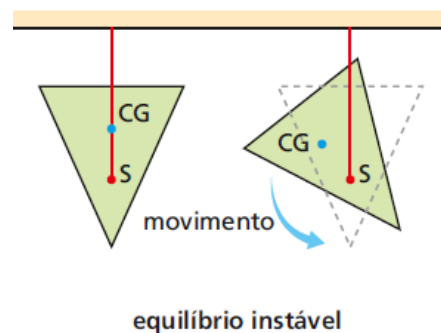
Seja um corpo suspenso por um ponto S, como mostra a figura ao lado. Para que ele esteja em equilíbrio, é necessário que o centro de suspensão S e o centro de gravidade CG estejam na mesma vertical.

O corpo estará em equilíbrio:

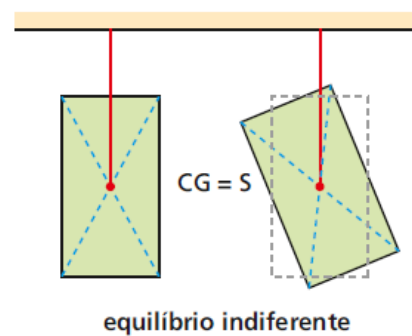
- Estável: quando o centro de gravidade estiver abaixo do centro de suspensão.



- Instável: quando o centro de gravidade estiver acima do centro de suspensão.



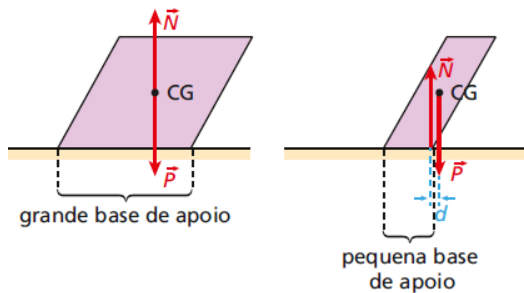
- Indiferente: quando o centro de gravidade coincidir com o centro de suspensão.



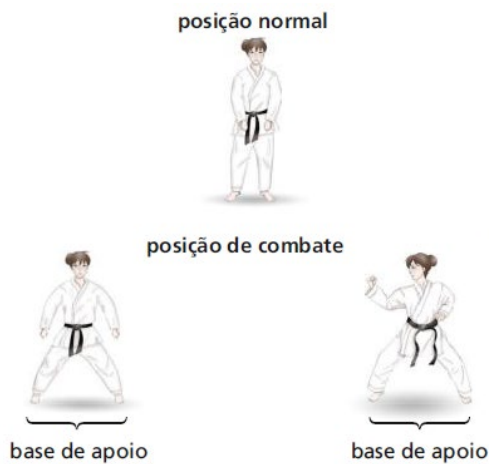
Equilíbrio dos corpos apoiados

Para que um corpo apoiado esteja em equilíbrio, é necessário que a vertical traçada pelo centro de gravidade dele passe "dentro" da base de apoio.

Se a vertical passar "fora" da base de apoio, surgirá um momento de módulo igual a $(P \cdot d)$, que ocasionará uma rotação no corpo, fazendo o corpo tombar. A imagem abaixo representa essas duas situações.

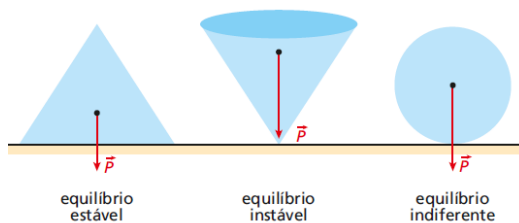


No caratê, por exemplo, o atleta, em posição de combate, promove uma maior abertura das pernas. Essa posição produz maior estabilidade, pois há uma ampliação da base de apoio.

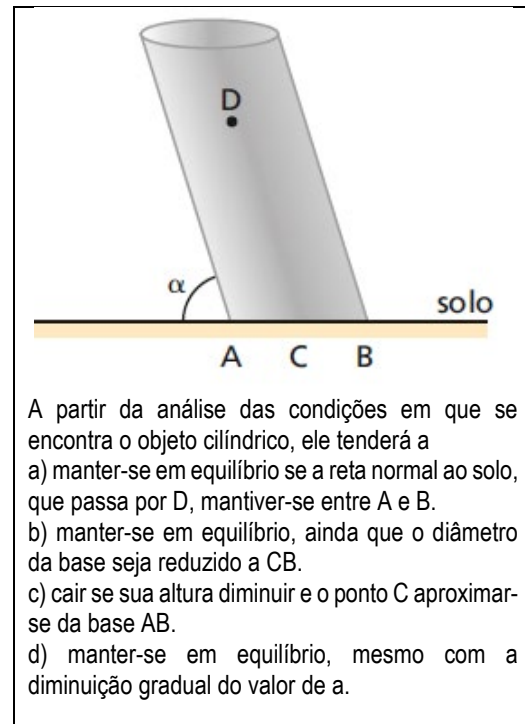


O equilíbrio dos corpos apoiados pode ser:

- Estável: quando, afastando-se ligeiramente o corpo de sua posição de equilíbrio, ele volta à posição inicial;
- Instável: quando, afastando-se ligeiramente o corpo de sua posição de equilíbrio, ele não volta à posição inicial;
- Indiferente: quando, afastando-se ligeiramente o corpo de sua posição de equilíbrio, ele permanece em equilíbrio nessa outra posição.

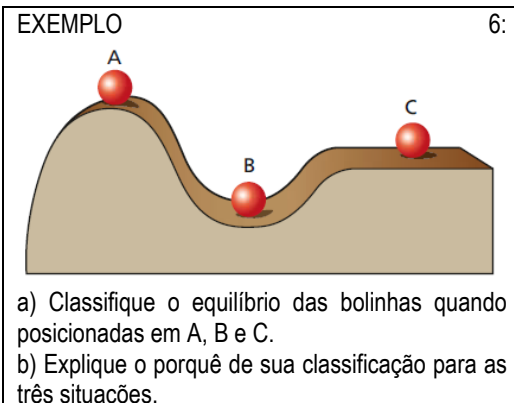


EXEMPLO 5: A figura apresentada abaixo representa um objeto cilíndrico colocado sobre uma superfície plana e inclinado em relação a ela, formando um ângulo α . O ponto D representa a posição de seu centro de gravidade, A e B, os dois extremos da base, e C, o ponto médio entre A e B.



A partir da análise das condições em que se encontra o objeto cilíndrico, ele tenderá a

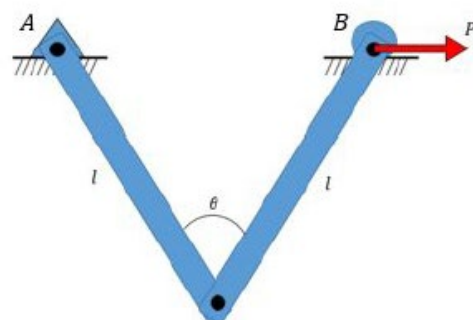
- manter-se em equilíbrio se a reta normal ao solo, que passa por D, mantiver-se entre A e B.
- manter-se em equilíbrio, ainda que o diâmetro da base seja reduzido a CB.
- cair se sua altura diminuir e o ponto C aproximar-se da base AB.
- manter-se em equilíbrio, mesmo com a diminuição gradual do valor de α .



APROFUNDAMENTO - Trabalho Virtual

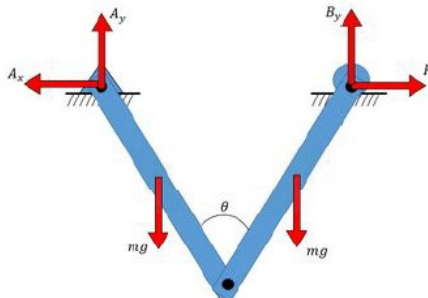
Introdução

Se eu te perguntar: Qual é o ângulo que deixa essas barras em equilíbrio?

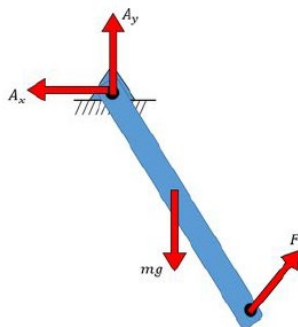


Para responder essa pergunta temos que fazer o diagrama de corpo livre. Para esta etapa é importante notar que é um apoio de 2º gênero, ou seja, possui forças de reação (uma vertical e uma horizontal), enquanto é um rolete possuindo apenas uma reação (na vertical). Lembre-se que é uma força externa que puxa o apoio

Aí fica assim:



temos que fazer $\sum F$ e $\sum M$ para achar as reações. Depois, temos que separar as barrinhas e considerar todas as forças que atuam em cada barra.



Feito isso, temos que fazer o equilíbrio todo de novo para essa barrinha e finalmente encontrar o ângulo. Parece trabalhoso né? E se eu te falar que tem um método mais rápido de resolver esses tipos de problemas?

Senhoras e senhores, apresento a vocês o Trabalho Virtual. Utilizamos esse método para resolver aquelas questões onde temos vários elementos interligados em que o movimento de um altera o movimento do outro, ou seja, podemos ter diferentes posições de equilíbrio no sistema.

Trabalho virtual

A gente viu que para existir trabalho precisa existir deslocamento, certo? Mas os problemas que vemos em Estática estão parados.

A ideia do trabalho virtual é criarmos um movimento imaginário que vamos chamar de deslocamento virtual δd . E o que seria isto? É um movimento fictício que vamos obrigar o sistema a

realizar para vermos as várias posições que ele pode assumir e determinarmos a mais correta.

Imagina uma bolinha que esteja em equilíbrio devido a atuação de várias forças. Para mover essa bolinha temos que aplicar uma nova força, certo? Para que o trabalho seja infinitesimal (virtual) é necessário haver também uma distância infinitesimal. Mas se eu quiser produzir um movimento muito muito pequeno, seria preciso uma força igualmente pequena, né?

A ideia é que ao criar essa força extra necessária para produzir o tal movimento infinitesimal, ela seja tão pequena que não altere em nada o conjunto de forças que já atuam no sistema, ou seja, ela vai ser desprezível.

Com base nessa ideia, podemos descrever o trabalho virtual realizado sobre a bolinha por esse tal deslocamento imaginário:

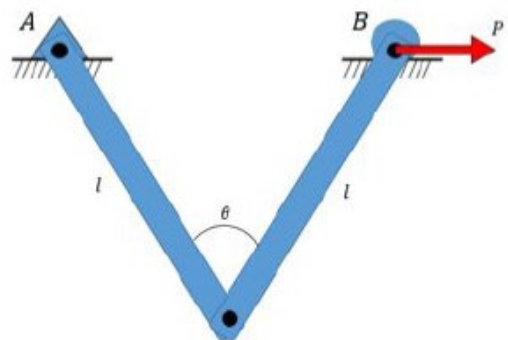
$$\delta U = F \cdot \cos \theta \cdot \delta d$$

Uma vez que temos um deslocamento infinitesimal teremos uma variação infinitesimal do trabalho.

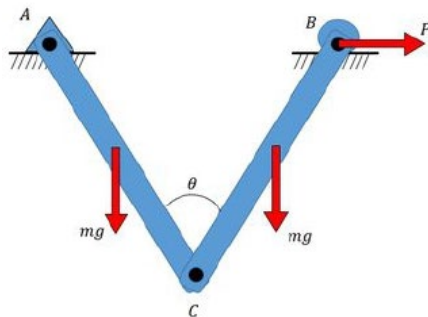
Diagrama de Forças Ativas

Lembra dos exercícios de Equilíbrio, onde tínhamos que fazer o diagrama de corpo livre para resolver as questões? Agora vamos fazer um diagrama um pouquinho diferente. Mas antes temos que ver alguns conceitos.

Para isso, vamos utilizar esse exemplo inicial para entendermos melhor.



Forças Ativas: são aquelas que estão aplicadas no corpo e que podem gerar trabalho virtual, ou seja, que podem produzir algum possível movimento. E como faço para identificar essas forças? É só ver quais das forças provocariam algum movimento na estrutura.

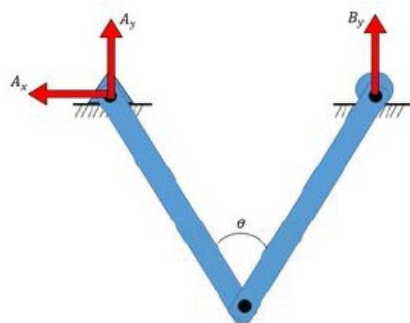


Imagina que a conexão do ponto pudesse se mover. Repare que tanto a força como as forças iriam fazer as barrinhas se moverem, logo elas são as nossas forças ativas.

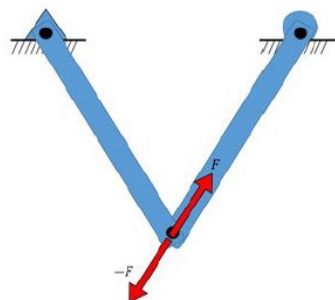
Forças Reativas: são as forças que atuam nos apoios. Essas forças não realizam trabalho, pois a finalidade do apoio é impedir o movimento em uma ou mais direções.

No nosso exemplo, temos duas forças reativas em A, porque não há movimento na horizontal e na vertical, isso acontece por que o apoio A é um apoio de 2º gênero.

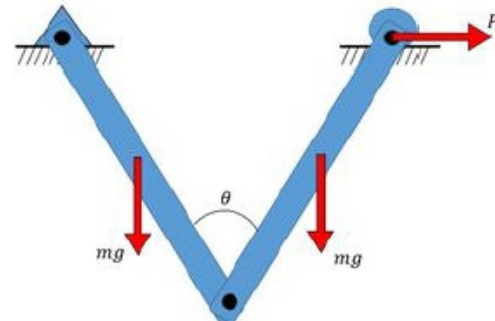
E temos uma única força em B, pois não pode ter movimento na vertical, isso acontece por que B é um apoio de 1º gênero (o símbolo dele é um círculo).



Forças internas: Essas forças sempre existem em pares iguais e de sentidos opostos (ação e reação), por isso, também não realizam trabalho. No nosso exemplo, temos um par dessas forças devido a conexão entre as barrinhas no ponto C.



Agora que sabemos esses conceitos, podemos entender o diagrama de forças ativas. Nesse carinha desenhamos a estrutura principal do problema e colocamos apenas as forças que podem realizar trabalho virtual, ou seja, as forças ativas. Então, como ficaria o diagrama do nosso exemplo?



Para terminarmos de resolver esse exemplo só precisamos de mais um conceito.

Princípio do Trabalho Virtual (PTV)

O Princípio do Trabalho Virtual, que podemos abreviar por PTV, diz que o somatório dos trabalhos virtuais produzidos por cada força ativa em um sistema é nulo. Matematicamente, temos:

$$\delta U = F_1 \delta d + F_2 \delta d + \dots = 0$$

Resumidamente, nas questões de trabalho virtual você terá que seguir esse passo a passo aqui:

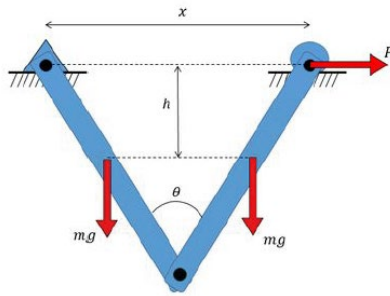
1. Identificar todas as forças que podem gerar algum movimento na estrutura e montar o diagrama de forças ativas.
2. Calcular o trabalho que cada uma dessas forças faz.
3. Somar o trabalho virtual total e igualar a zero. Nesse caso, é o trabalho virtual total.

Agora que aprendemos isso tudo, você deve estar se perguntando qual é a vantagem de usar trabalho virtual.

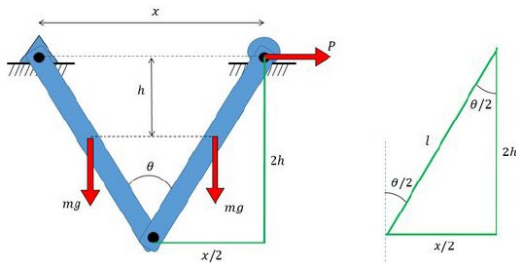
– Você não precisa desmembrar toda a estrutura, você trabalha com ela inteira.

– Podemos resolver as questões sem precisar achar as forças reativas, o que economiza um tempo. Então, bora terminar de resolver aquele exemplo para acabar com qualquer dúvida.

Sempre vamos começar as questões de trabalho virtual montando o diagrama de forças ativas. O diagrama desse exemplo nós já montamos, lembra?



Depois temos que analisar quais são os movimentos possíveis de ocorrer devido cada força que identificamos. A gente chamou a distância entre os apoios de x e a altura entre o centro de gravidade de cada barra até a linha dos apoios de h . Que tal escrevermos esses valores em função de θ e l . Para isso vamos olhar o seguinte triângulo formado:



Agora vamos para os trabalhos temos que a força P pode fazer um deslocamento horizontal e os pesos mg , um deslocamento vertical. Escrevendo matematicamente isso, vamos ter o trabalho da força P :

$$\delta U_1 = P\delta x$$

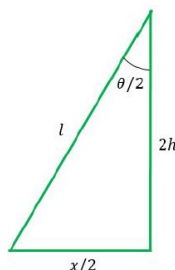
$$\delta U_2 = mg\delta h + mg\delta h$$

$$\delta U = P\delta x + 2mg\delta h = 0$$

Sabemos que a questão pede o ângulo θ para haver equilíbrio. Mas repare que nessa equação não aparece nenhum ângulo θ , né? Então, o próximo passo é fazer aparecer a incógnita que queremos achar nessa equação aí.

Para isso, vamos achar alguma relação de x e h com o nosso θ . E como vamos fazer essa mágica? Vamos usar trigonometria.

Utilizando o nosso triângulo:



$$\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{h}{l}$$

$$h = \frac{l \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}{2}$$

$$\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{x/2}{l}$$

$$x = 2l \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

O próximo passo é derivar essas duas equações que achamos em função de θ para acharmos esses deslocamentos virtuais infinitesimais. Pessoal, lembrem que temos de derivar a função dentro do parêntesis também, isso faz com que apareça o termo $\delta\theta$, que é a derivada do ângulo.

$$\delta x = l \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \delta\theta$$

$$\delta h = -\frac{l \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{4} \delta\theta$$

$$\delta U = P\delta x + 2mg\delta h = 0$$

$$P \left(l \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \delta\theta \right) - 2mg \left(\frac{l \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{4} \delta\theta \right) = 0$$

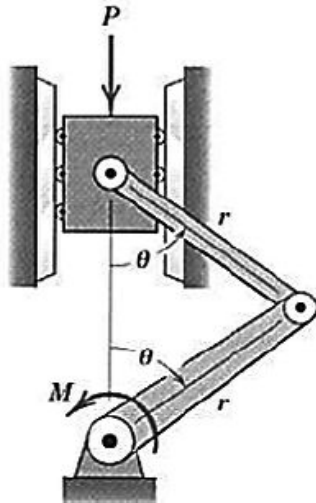
$$P \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = mg \frac{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{2}$$

$$\frac{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)} = \frac{2P}{mg}$$

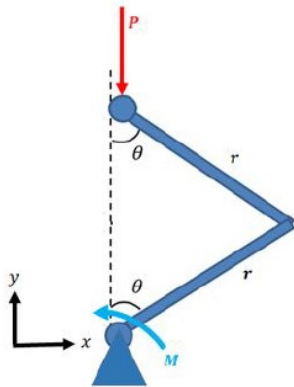
$$\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{2P}{mg}$$

$$\theta = 2 \tan^{-1}\left(\frac{2P}{mg}\right)$$

EXEMPLO 1: Determine, em função do ângulo θ , o momento M , aplicado através do eixo à conexão inferior, necessário para suportar a carga P . Despreze os pesos das partes.

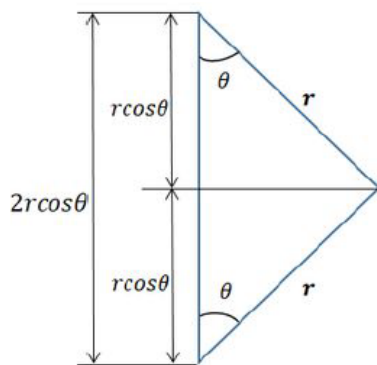


RESOLUÇÃO:



$$\delta U_P = -P \delta y$$

$$\delta U_M = -M \delta \theta$$



$$y = 2r \cos \theta$$

$$y = 2r \cos \theta \Rightarrow \delta y = -2r \sin \theta \delta \theta$$

$$\delta U_P = -P \delta y \Rightarrow \delta U_P = -P(-2r \sin \theta \delta \theta)$$

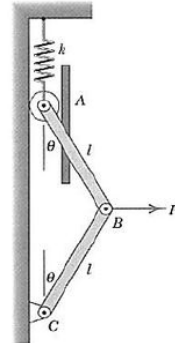
$$\delta U_P = 2Pr \sin \theta \delta \theta$$

$$\delta U = 0 \Rightarrow \delta U_M + \delta U_P = 0$$

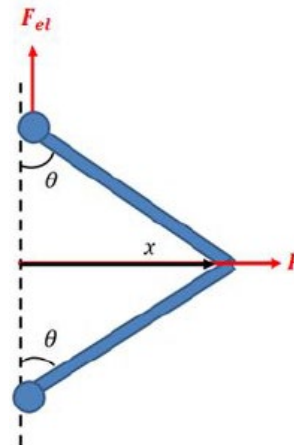
$$-M + 2Pr \sin \theta = 0$$

$$M = 2Pr \sin \theta$$

EXEMPLO2: A mola de constante K não está distendida quando $\theta=0$. Obtenha uma expressão para a força P necessária para defletir o sistema de um ângulo θ . A massa das barras é desprezível.



RESOLUÇÃO:



$$\delta U_{el} = -F_{el} \delta y$$

$$y = 2l - 2l \cos \theta$$

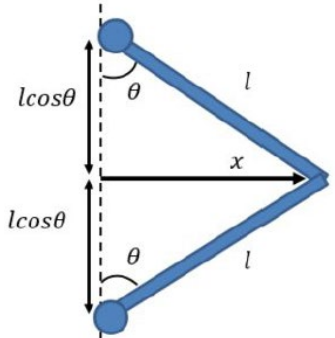
A força elástica está fazendo com que y diminua, por isso seu trabalho é negativo.

$$\delta U_P = P \delta x$$

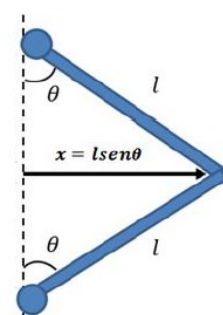
$$F_{el} = ky$$

a barra ficaria totalmente esticada:





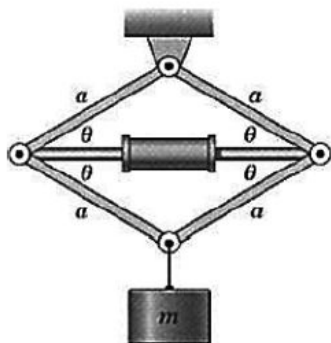
$F_{el} = ky \Rightarrow F_{el} = k(2l - 2l \cos \theta)$
 $y = 2l - 2l \cos \theta \Rightarrow \delta y = 2l \cdot \sin \theta \delta \theta$
 $\delta U_{el} = -F_{el} \delta y = -k(2l - 2l \cos \theta)(2l \cdot \sin \theta \delta \theta)$



$x = l \cdot \sin \theta$
 $\delta x = l \cos \theta \delta \theta$
 $\delta U_p = P \delta x = Pl \cos \theta \delta \theta$
 $Pl \cos \theta \delta \theta - k(2l - 2l \cos \theta)(2l \cdot \sin \theta \delta \theta) = 0$

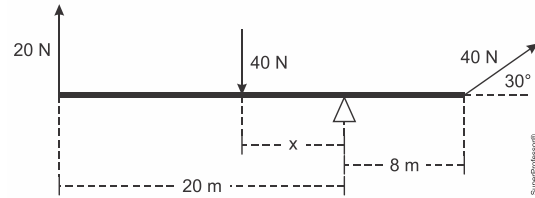
$$P = \frac{4kl(\sin \theta - \sin \theta \cos \theta)}{\cos \theta}$$

EXEMPLO 3: O cilindro hidráulico é usado para afastar as conexões e elevar a carga m . Determine a força compressiva C no cilindro, para a posição mostrada. Despreze a massa de todas as partes, à exceção de m .



EXERCÍCIOS DE EMBASAMENTO

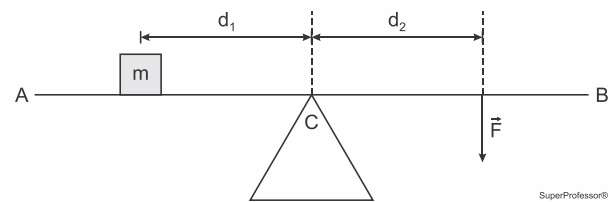
1. (Ime 2023)



Uma balança de massa desprezível recebe a aplicação de 3 forças, como indicado na figura acima. A distância x assinalada, em metros, que garante o equilíbrio, é aproximadamente:

- a) 2,0
- b) 6,0
- c) 8,3
- d) 9,1
- e) 14,0

2. (Ufr 2023) A figura a seguir mostra uma prancha retilínea AB que deve ser mantida na horizontal, em equilíbrio estático.

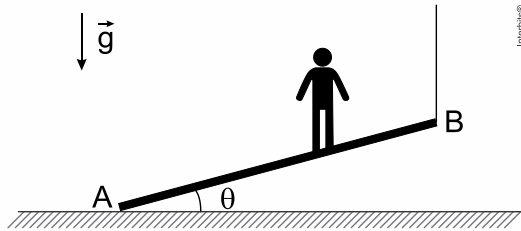


O peso da prancha pode ser desprezado em comparação com as outras forças envolvidas. A prancha está apoiada num suporte triangular no ponto C, e sobre ela está colocado um objeto (que pode ser considerado pontual) de massa $m = 2,0$ kg a uma distância $d_1 = 3,0$ m do suporte em C. Do outro lado do suporte, há uma força vertical $\vec{F}$ orientada para baixo, de módulo $F = 15$ N, que está aplicada na prancha num ponto que está a uma distância d_2 do suporte em C. Considerando as informações apresentadas, assinale a alternativa que apresenta corretamente o valor da distância d_2 para que a prancha seja mantida em equilíbrio estático.

- a) $d_2 = 0,4$ m.
- b) $d_2 = 0,8$ m.
- c) $d_2 = 2,0$ m.
- d) $d_2 = 2,4$ m.
- e) $d_2 = 4,0$ m.

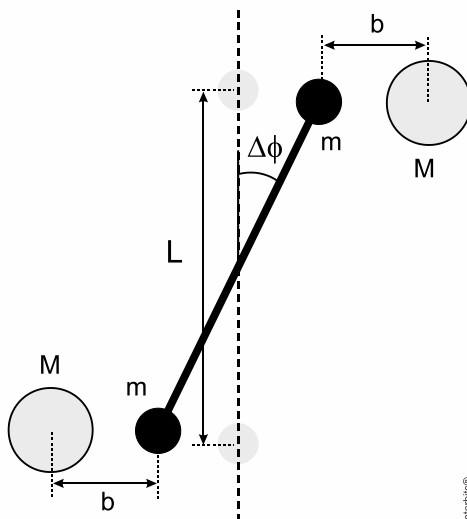
3. (Ita 2022) Uma ponte levadiça uniforme com peso P e comprimento L é sustentada por uma corda vertical na sua extremidade B, que pode sustentar uma tensão máxima de $1,5 P$. A ponte é articulada no ponto fixo A. Um homem de peso P_h começa a subir a

ponte a partir do ponto A até causar o rompimento da corda. Assinale a alternativa que contém a distância percorrida pelo homem ao longo da ponte.



- a) PL/P_h
- b) $P_h L/P$
- c) PL/P_h
- d) $2PL/P_h$
- e) $3PL/P_h$

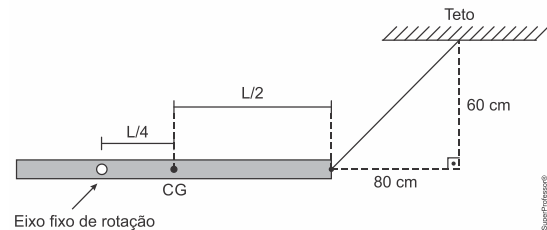
4. (Ita 2022) Em seu experimento para medir a constante gravitacional G , Henry Cavendish utilizou uma balança de torção composta por uma haste leve e longa, de comprimento L , com duas massas m em suas extremidades, suspensa por um fio fixado ao seu centro. Dois objetos de massa M foram aproximados às extremidades da haste, conforme mostra a figura abaixo, de tal forma que a haste sofreu um pequeno ângulo de deflexão $\Delta\phi$ a partir da posição inicial de repouso, e foi medida a distância b entre os centros das massas m e M mais próximos. Quando torcido de um ângulo ϕ , o fio gera um torque restaurador $\tau = -\kappa\phi$. Determine a expressão aproximada de G , em termos dos parâmetros do sistema.



- a) $\frac{b^2 \kappa \Delta\phi}{4LMm}$
- b) $\frac{b^2 \kappa \Delta\phi}{2LMm}$

- c) $\frac{b^2 \kappa \Delta\phi}{LMm}$
- d) $\frac{2b^2 \kappa \Delta\phi}{LMm}$
- e) $\frac{4b^2 \kappa \Delta\phi}{LMm}$

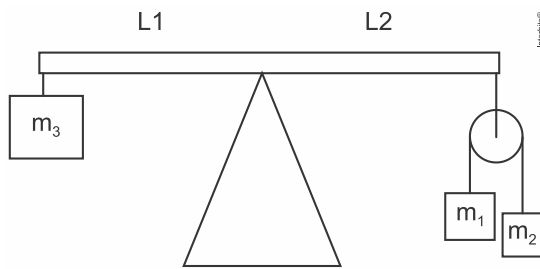
5. (Ufgd 2021) Compreender os conceitos físicos relacionados ao equilíbrio estático de um corpo extenso é fundamental para o trabalho da construção civil, pois, casas, prédios, pontes e construções em geral precisam ter a sua distribuição de massa previamente calculada, a fim de assegurar a estabilidade da edificação. Para estudar esses conceitos, um estudante colocou uma barra homogênea de comprimento L e massa igual a 450 gramas em um eixo fixo de rotação, distante $L/4$ do centro de gravidade (CG) da barra, de modo que o único movimento que a barra pode efetuar é o de rotacionar livremente sem atrito sobre o eixo fixo. Em seguida, para a barra ficar em equilíbrio na horizontal, ele fixou, entre a extremidade direita da barra e o teto, uma corda inextensível de massa desprezível, como mostra a figura a seguir.



Desprezando as dimensões do eixo fixo de rotação, de forma que o centro de gravidade da barra se localize exatamente em seu ponto médio, e considerando a aceleração da gravidade igual a 10 m/s^2 , qual a força de tração que a corda exerce sobre a barra para mantê-la em equilíbrio estático na situação ilustrada na figura?

- a) 15,00 N.
- b) 11,25 N.
- c) 2,50 N.
- d) 2,00 N.
- e) 1,88 N.

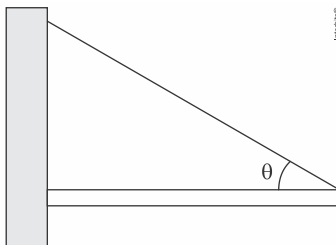
6. (Efomm 2020) A figura abaixo mostra uma barra de massa desprezível apoiada sobre o vértice do triângulo. L_1 e L_2 são as distâncias das extremidades esquerda e direita da barra até seu centro. Os blocos de massas m_1 e m_2 estão ligados por um fio inextensível de massa desprezível suspenso por uma roldana, também com massa desprezível.



Para que a barra permaneça equilibrada, é necessário que a massa m_3 seja igual a

- $\frac{4m_1 m_2}{m_1 + m_2} \frac{L_2}{L_1}$
- $\frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2} \frac{L_2}{L_1}$
- $(m_1 + m_2) \frac{L_2}{L_1}$
- $\frac{4m_1 m_2}{m_1 - m_2} \frac{L_2}{L_1}$
- $\frac{4m_1 m_2}{m_1 - m_2} \frac{L_1}{L_2}$

7. (Efomm 2020) A figura mostra uma barra homogênea de massa m em equilíbrio. Ela está sustentada por um fio em uma das suas extremidades e é impedida de cair devido ao atrito com a parede na outra extremidade. A aceleração da gravidade vale g .



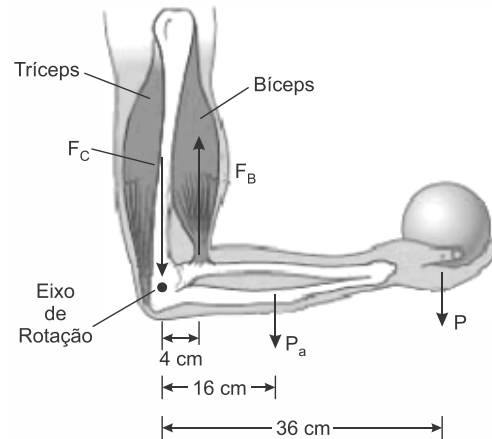
A força total exercida pela parede sobre a barra vale:

- $\frac{mg \cos \theta}{2}$
- $\frac{mg \sin \theta}{2}$
- $\frac{mgtg^2 \theta}{\sin \theta + 1}$
- $\frac{mg}{2 \sin \theta}$
- $\frac{mgtg^2 \theta}{\cos \theta + \sin \theta}$

8. (Ufrgs 2020) A figura abaixo representa esquematicamente o braço e o antebraço de uma

pessoa que está sustentando um peso P . O antebraço forma um ângulo de 90° com o braço.

F_B é a força exercida pelo bíceps sobre o antebraço, e F_C é a força na articulação do cotovelo.



Sendo o módulo do peso $P = 50 \text{ N}$ e o módulo do peso do antebraço $P_a = 20 \text{ N}$, qual é o módulo da força F_B ?

- 70 N.
- 370 N.
- 450 N.
- 460 N.
- 530 N.

9. (Acafe 2019) Pedro foi com a namorada em um restaurante para comer sushi. Entretanto, não sabia utilizar os palitos tradicionais para pegar o alimento. O garçom, então, forneceu palitos alternativos, presos em uma das extremidades (A), assim podia utilizá-los, como mostra a figura abaixo.



Com base no exposto, assinale a alternativa que completa, **corretamente**, as lacunas da frase a seguir.

O conjunto de palitos dado a Pedro funciona como uma alavanca _____, dessa forma, a força aplicada _____ é maior que a força aplicada _____.

- interpotente – por Pedro nos palitos – pelos palitos no sushi

b) inter-resistente – por Pedro nos palitos – pelos palitos no sushi

c) interpotente – pelos palitos no sushi – por Pedro nos palitos

d) inter-resistente – pelos palitos no sushi – por Pedro nos palitos

10. (Efomm 2018) Uma régua escolar de massa M uniformemente distribuída com o comprimento de 30 cm está apoiada na borda de uma mesa, com $2/3$ da régua sobre a mesa. Um aluno decide colocar um corpo C de massa $2M$ sobre a régua, em um ponto da régua que está suspenso (conforme a figura). Qual é a distância mínima x , em cm, da borda livre da régua a que deve ser colocado o corpo, para que o sistema permaneça em equilíbrio?



a) 1,25

b) 2,50

c) 5,00

d) 7,50

e) 10,0

Gabarito DE EMBASAMENTO

Resposta da questão 1:

[B]

Para o torque nulo em relação ao ponto fixo, devemos ter:

$$20 \cdot 20 - 40 \cdot x = 40 \sin 30^\circ \cdot 8$$

$$400 - 40x = 160$$

$$\therefore x = 6 \text{ m}$$

Resposta da questão 2:

[E]

Para que se tenha torque nulo em relação ao ponto C, devemos ter:

$$mg \cdot d_1 = F \cdot d_2$$

$$2 \cdot 10 \cdot 3 = 15 \cdot d_2$$

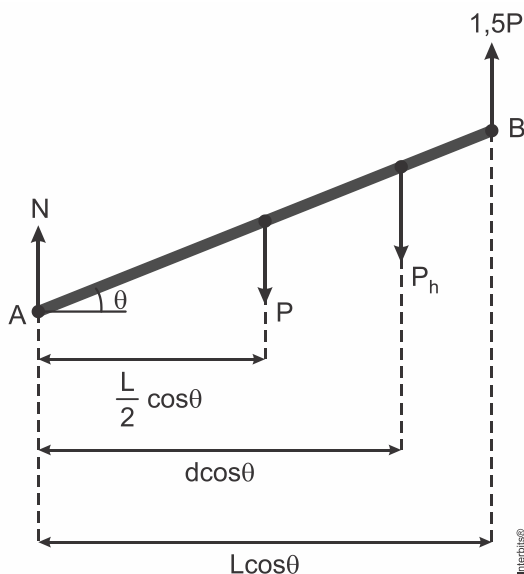
$$\therefore d_2 = 4 \text{ m}$$

Resposta da questão 3:

ANULADA

Questão anulada no gabarito oficial.

Representando as forças na barra e aplicando a condição de torque nulo no ponto A, obtemos:



$$P \cdot \frac{L}{2} \cos \theta + P_h \cdot d \cos \theta - 1,5P \cdot L \cos \theta = 0$$

$$\therefore d = \frac{PL}{P_h}$$

Como há 2 alternativas que satisfazem a solução do problema, a questão é inconsistente.

Resposta da questão 4:

[C]

Para que o sistema esteja em equilíbrio, o binário gerado pela força gravitacional deve se igualar ao torque gerado pelo fio:

$$F_G L = k \Delta \Phi$$

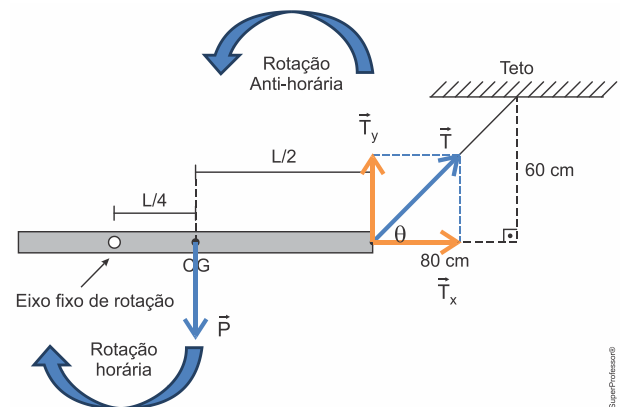
$$\frac{GMm}{b^2} \cdot L = k \Delta \Phi$$

$$\therefore G = \frac{b^2 k \Delta \Phi}{LMm}$$

Resposta da questão 5:

[C]

De acordo com o diagrama de forças, tem-se:



Para a barra permanecer em equilíbrio estático, a soma dos momentos e das forças deve ser nulos. A tração no fio foi decomposta em seus componentes ortogonais como mostrado na figura.

$$\sum M = 0$$

$$M_{Ty} = M_P \cdot d_P$$

$$T_y \cdot d_{Ty} = P \cdot d_P$$

$$T \cdot \sin \theta \cdot 3 \frac{L}{4} = 0,45 \cdot 10 \cdot \frac{L}{4}$$

$$T \cdot \sin \theta = 1,5$$

Como o triângulo mostrado é pitagórico, nota-se que a sua hipotenusa é igual a 100 cm, logo, a tração no fio que sustenta a barra é:

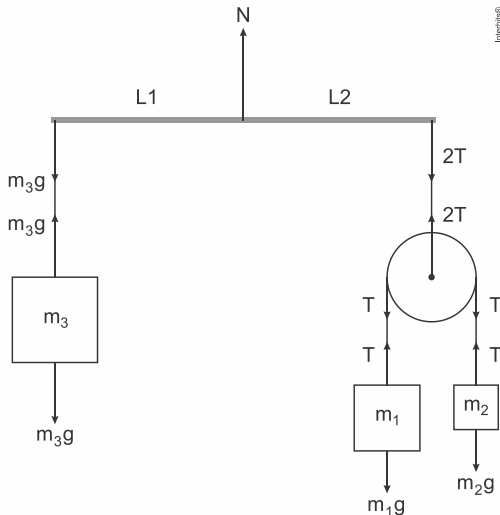
$$T \cdot \frac{60}{100} = 1,5$$

$$T = \frac{150}{60} \therefore T = 2,50 \text{ N}$$

Resposta da questão 6:

[A]

Para os blocos a direita, supondo $m_1 > m_2$, temos:



$$\begin{cases} m_1g - T = m_1a \\ T - m_2g = m_2a \end{cases} \Rightarrow (m_1 - m_2)g = (m_1 + m_2)a \Rightarrow a = \frac{(m_1 - m_2)}{m_1 + m_2}g$$

$$T = m_1(g - a) = m_1g \left[1 - \frac{(m_1 - m_2)}{m_1 + m_2} \right] \Rightarrow T = \frac{2m_1m_2g}{m_1 + m_2}$$

Para o equilíbrio rotacional da barra, devemos ter:

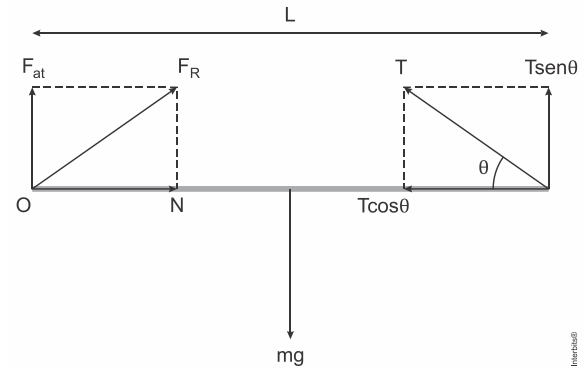
$$m_3g \cdot L1 = 2T \cdot L2 \Rightarrow m_3gL1 = \frac{4m_1m_2}{m_1 + m_2} L2$$

$$\therefore m_3 = \frac{4m_1m_2}{m_1 + m_2} \frac{L2}{L1}$$

Resposta da questão 7:

[D]

Isolando a barra, temos:



Equilíbrio rotacional em torno do ponto O :

$$T \text{sen} \theta \cdot L = mg \cdot \frac{L}{2}$$

$$T = \frac{mg}{2 \text{sen} \theta}$$

Equilíbrio em X :

$$N = T \cos \theta = \frac{mg \cos \theta}{2 \text{sen} \theta}$$

Equilíbrio em y :

$$F_{at} = mg - T \text{sen} \theta = mg - \frac{mg \text{sen} \theta}{2 \text{sen} \theta}$$

$$F_{at} = \frac{mg}{2}$$

Logo:

$$F_R = \sqrt{N^2 + F_{at}^2} = \sqrt{\frac{m^2g^2 \cos^2 \theta}{4 \text{sen}^2 \theta} + \frac{m^2g^2}{4}}$$

$$F_R = \frac{mg}{2} \sqrt{\frac{1 - \text{sen}^2 \theta}{\text{sen}^2 \theta} + 1} = \frac{mg}{2} \sqrt{\frac{1 - \text{sen}^2 \theta + \text{sen}^2 \theta}{\text{sen}^2 \theta}}$$

$$\therefore F_R = \frac{mg}{2 \text{sen} \theta}$$

Resposta da questão 8:

[E]

Para o equilíbrio estático devemos ter a força resultante nula e também o somatório dos momentos igual a zero.

Fazendo o somatório dos momentos e convencionando a rotação no sentido horário negativa e a rotação no sentido anti-horário positiva, temos:

$$\sum M = 0$$

$$M_{F_c} + M_{F_b} - M_{P_a} - M_P = 0$$

$$F_c \cdot d_c + F_b \cdot d_b - P_a \cdot d_a - P \cdot d_P = 0$$

$$F_c \cdot 0 \text{ cm} + F_b \cdot 4 \text{ cm} - 20 \text{ N} \cdot 16 \text{ cm} - 50 \text{ N} \cdot 36 \text{ cm} = 0$$

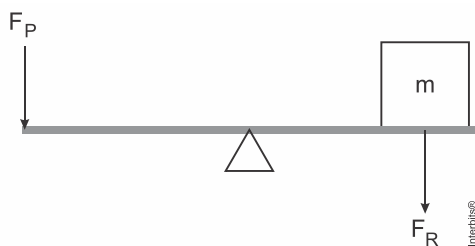
$$F_b = \frac{(1800 + 320) \text{ N} \cdot \text{cm}}{4 \text{ cm}} \therefore F_b = 530 \text{ N}$$

Resposta da questão 9:

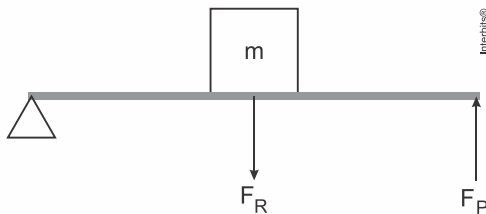
[A]

Os três tipos de alavanca são:

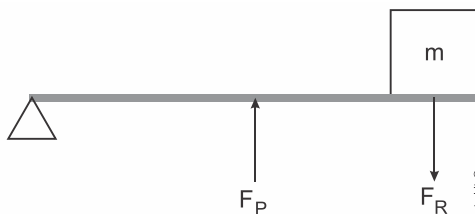
Alavanca interfixa - Quando o ponto de apoio está entre a força potente e a força resistente:



Alavanca inter-resistente - Quando a força resistente está localizada entre o ponto de apoio e a força potente:



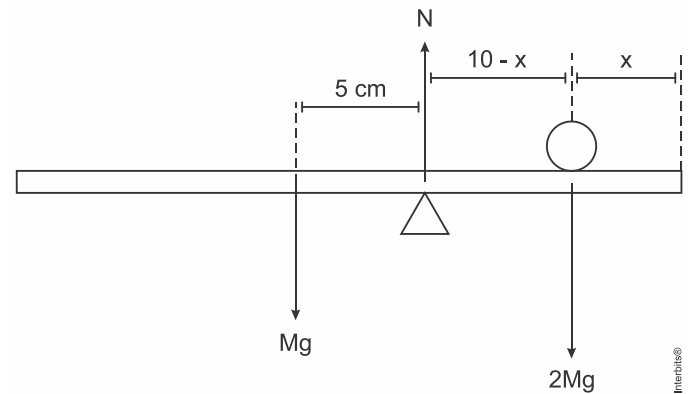
Alavanca interpotente - Quando a força potente está localizada entre o ponto de apoio e a força resistente:



Como podemos notar, a alavanca é do tipo interpotente, e a força aplicada por Pedro nos palitos é maior que a força aplicada pelos palitos no sushi.

Resposta da questão 10:

[D]



Sendo nulo o momento em relação ao apoio, temos:

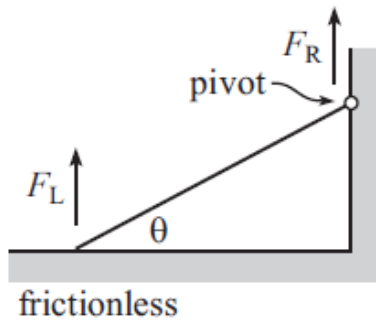
$$Mg \cdot 5 = 2Mg \cdot (10 - x)$$

$$2,5 = 10 - x$$

$$\therefore x = 7,5 \text{ cm}$$

EXERCÍCIOS DE APROFUNDAMENTO

1. Uma das extremidades de um bastão de massa m e comprimento ℓ é articulada em uma parede, e a outra extremidade repousa sobre um piso sem atrito, conforme mostrado na figura. Sejam F_L e F_R as forças verticais nas extremidades esquerda e direita do bastão, respectivamente. Então

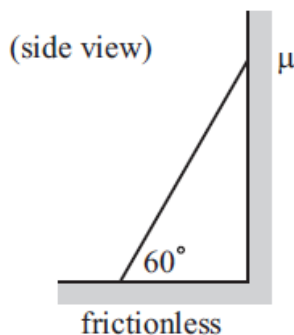


- a) $F_L > F_R$
- b) $F_L < F_R$
- c) $F_L = F_R = mg/2$
- d) $F_L = F_R = mg$
- e) $F_L = F_R = mg \cos \theta$

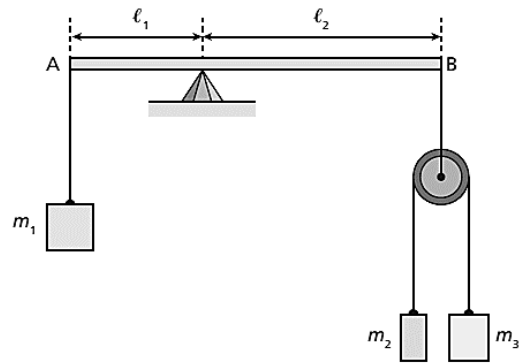
2. Uma escada está apoiada em uma parede em um ângulo de 60° , conforme mostrado na Figura. O chão não tem atrito, mas há atrito com a parede. Suponha que o coeficiente de atrito seja grande (digamos, $\mu = 10$). É possível que esta configuração seja estática? Determine o módulo da força total na extremidade esquerda da escada.

Sim

Não

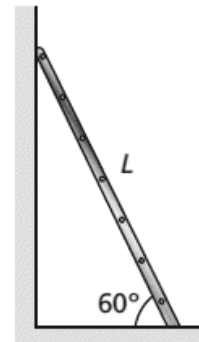


3. (ITA) Considere o sistema ilustrado na figura a seguir. Supondo-se que tanto a massa da barra AB como a da polia sejam desprezíveis, podemos afirmar que AB está em equilíbrio se:



- a) $m_1 \ell_1 = (m_2 + m_3) \ell_2$
- b) $m_1(m_2 + m_3) \ell_1 = 4 m_2 m_3 \ell_2$
- c) $m_1(m_2 + m_3) \ell_1 = 2 m_2 m_3 \ell_2$
- d) $2 m_1(m_2 + m_3) \ell_1 = m_2 m_3 \ell_2$
- e) $m_1 \ell_2 = (m_1 + m_3) \ell_1$

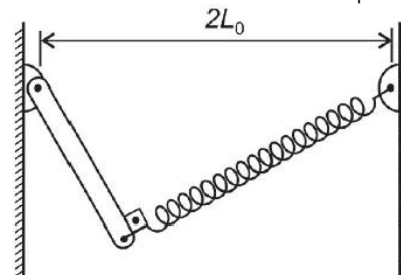
4. (ITA) Uma escada de comprimento L , em repouso, jaz encostada contra uma parede lisa vertical e forma um ângulo de 60° com plano horizontal. A escada pesa 270 N e o seu centro de gravidade está distante $L/3$ de sua extremidade apoiada no plano horizontal, isto é, no chão.



A força resultante que o chão aplica na escada vale:

- a) 275 N
- b) $27,4 \text{ N}$
- c) $27,5 \text{ N}$
- d) 280 N
- e) $27,6 \text{ N}$

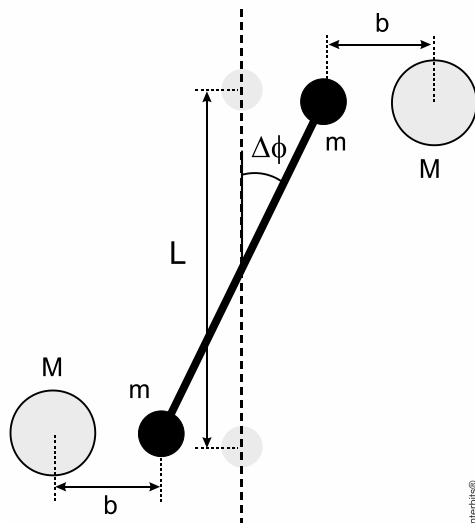
5. A figura abaixo mostra um sistema em equilíbrio estático, formado por uma barra homogênea e uma mola ideal que estão ligadas por uma de suas extremidades e livremente articuladas às paredes.



A barra possui massa m e comprimento L_0 , a mola possui comprimento natural L_0 e a distância entre as articulações é de $2L_0$. Esse sistema (barra-mola) está sujeito à ação da gravidade cujo módulo de aceleração é g e, nessas condições, a constante elástica da mola vale

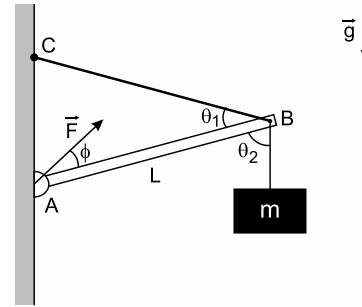
- a) $\frac{mgL_0^{-1}}{4(\sqrt{3}-1)}$ c) $2mgL_0^{-1}$
 b) mgL_0^{-1} d) $\frac{mg}{\sqrt{6}-2}$

6. (Ita 2022) Em seu experimento para medir a constante gravitacional G , Henry Cavendish utilizou uma balança de torção composta por uma haste leve e longa, de comprimento L , com duas massas m em suas extremidades, suspensa por um fio fixado ao seu centro. Dois objetos de massa M foram aproximados às extremidades da haste, conforme mostra a figura abaixo, de tal forma que a haste sofreu um pequeno ângulo de deflexão $\Delta\phi$ a partir da posição inicial de repouso, e foi medida a distância b entre os centros das massas m e M mais próximos. Quando torcido de um ângulo ϕ , o fio gera um torque restaurador $\tau = -\kappa\phi$. Determine a expressão aproximada de G , em termos dos parâmetros do sistema.



- a) $\frac{b^2\kappa\Delta\phi}{4LMm}$
 b) $\frac{b^2\kappa\Delta\phi}{2LMm}$
 c) $\frac{b^2\kappa\Delta\phi}{LMm}$
 d) $\frac{2b^2\kappa\Delta\phi}{LMm}$
 e) $\frac{4b^2\kappa\Delta\phi}{LMm}$

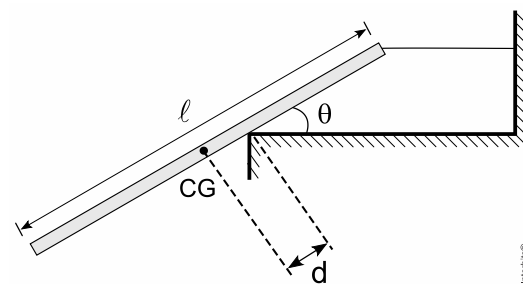
7. (Ita 2021)



A figura mostra uma barra AB de comprimento L , articulada na extremidade A e presa a uma parede por um cabo BC. Na extremidade B da barra, suspende-se uma massa m por uma corda. O ângulo entre o cabo BC e a barra é dado por θ_1 , e o ângulo entre a barra e a corda que sustenta a carga é dado por θ_2 , como mostra a figura. A barra, o cabo e a corda têm massas desprezíveis. Determine, em termos das grandezas física envolvidas:

- a) o ângulo ϕ entre a barra AB e a força $\vec{F}$, exercida pela articulação sobre a barra;
 b) a intensidade da força $\vec{F}$.

8. (Ita 2019) Uma barra rígida, homogênea, fina e de comprimento ℓ , é presa a uma corda horizontal sem massa e toca a quina de uma superfície horizontal livre de atrito, fazendo um ângulo θ como mostra a figura. Considerando a barra em equilíbrio, assinale a opção correta para o valor da razão d/ℓ , em que d é a distância da quina ao centro de gravidade (CG) da barra.

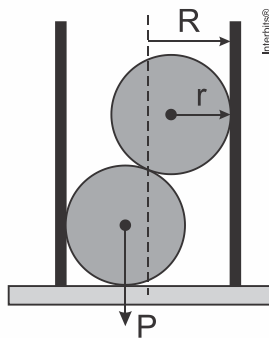


- a) $\frac{\tan^2\theta}{2}$
 b) $\frac{\cos^2\theta}{4}$
 c) $\frac{\sin^2\theta}{4}$
 d) $\frac{\cos^2\theta}{2}$
 e) $\frac{\sin^2\theta}{2}$

9. (Ita 2015) Um bloco cônico de massa M apoiado pela base numa superfície horizontal tem altura h e raio da base R . Havendo atrito suficiente na superfície da base de apoio, o cone pode ser tombado por uma força horizontal aplicada no vértice. O valor mínimo F dessa força pode ser obtido pela razão h/R dada pela opção

- a) $\frac{Mg}{F}$.
- b) $\frac{F}{Mg}$.
- c) $\frac{Mg + F}{Mg}$.
- d) $\frac{Mg + F}{F}$.
- e) $\frac{Mg + F}{2Mg}$.

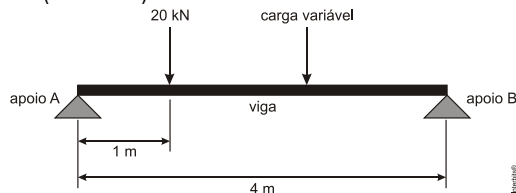
10. (Ita 2015)



A figura mostra um tubo cilíndrico de raio R apoiado numa superfície horizontal, em cujo interior encontram-se em repouso duas bolas idênticas, de raio $r = 3R/4$ e peso P cada uma.

Determine o peso mínimo P_C do cilindro para que o sistema permaneça em equilíbrio.

11. (Ime 2014)

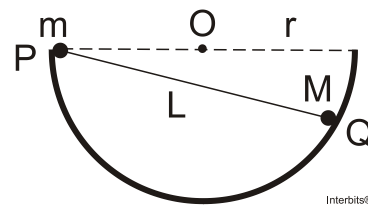


A figura acima mostra uma viga em equilíbrio. Essa viga mede 4 m e seu peso é desprezível. Sobre ela, há duas cargas concentradas, sendo uma fixa e outra variável. A carga fixa de 20 kN está posicionada a 1 m do apoio A, enquanto a carga variável só pode se posicionar entre a carga fixa e o apoio B. Para que as reações verticais (de baixo para cima) dos apoios A e B sejam iguais a 25 kN e 35 kN,

respectivamente, a posição da carga variável, em relação ao apoio B, e o seu módulo devem ser

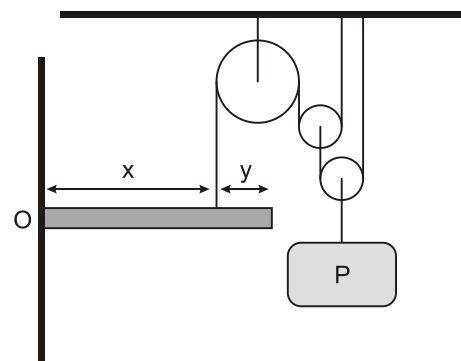
- a) 1,0 m e 50 kN
- b) 1,0 m e 40 kN
- c) 1,5 m e 40 kN
- d) 1,5 m e 50 kN
- e) 2,0 m e 40 kN

12. (ITA) Duas partículas, de massas m e M , estão respectivamente fixadas nas extremidades de uma barra de comprimento L e massa desprezível. Tal sistema é então apoiado no interior de uma casca hemisférica de raio r , de modo a se ter equilíbrio estático com m posicionado na borda P da casca e M , num ponto Q, conforme mostra a figura. Desconsiderando forças de atrito, a razão m/M entre as massas é igual a



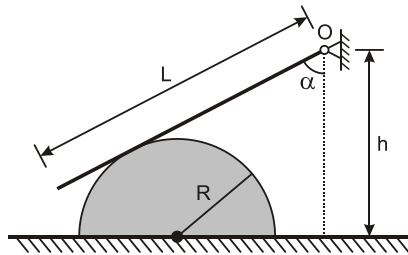
- a) $(L^2 - 2r^2)/(2r^2)$.
- b) $(2L^2 - 3r^2)/(2r^2)$.
- c) $(L^2 - 2r^2)(r^2 - L^2)$.
- d) $(2L^2 - 3r^2)/(r^2 - L^2)$.
- e) $(3L^2 - 2r^2)/(L^2 - 2r^2)$.

13. (Ita 2011) Uma barra homogênea, articulada no pino O, é mantida na posição horizontal por um fio fixado a uma distância x de O. Como mostra a figura, o fio passa por um conjunto de três polias que também sustentam um bloco de peso P. Desprezando efeitos de atrito e o peso das polias, determine a força de ação do pino O sobre a barra.



14. (Ita 2010) Considere um semicilindro de peso P e raio R sobre um plano horizontal não liso, mostrado em corte na figura.

Uma barra homogênea de comprimento L e peso Q está articulada no ponto O . A barra está apoiada na superfície lisa do semicilindro, formando um ângulo α com a vertical. Quanto vale o coeficiente de atrito mínimo entre o semicilindro e o plano horizontal para que o sistema todo permaneça em equilíbrio?



a)

$$\mu = \frac{\cos \alpha}{[\cos \alpha + 2P(2h/LQ \cos(2\alpha) - R/LQ \sin \alpha)]}$$

b)

$$\mu = \frac{\cos \alpha}{[\cos \alpha + P(2h/LQ \sin(2\alpha) - 2R/LQ \cos \alpha)]}$$

c)

$$\mu = \frac{\cos \alpha}{[\sin \alpha + 2P(2h/LQ \sin(2\alpha) - R/LQ \cos \alpha)]}$$

d)

$$\mu = \frac{\sin \alpha}{[\sin \alpha + 2P(2h/LQ \cos(\alpha) - 2R/LQ \cos \alpha)]}$$

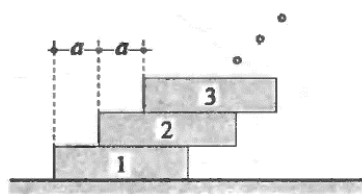
e)

$$\mu = \frac{\sin \alpha}{[\cos \alpha + P(2h/LQ \sin(\alpha) - 2R/LQ \cos \alpha)]}$$

O Teorema de Varignon

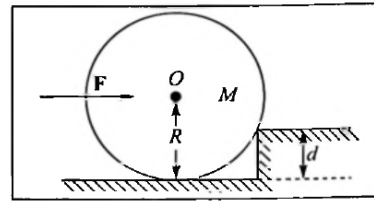
O momento da força resultante é igual à soma dos momentos de todas as forças.

15. A figura mostra um conjunto de tijolos idênticos de comprimento L , colocados um em cima do outro, de modo que estejam igualmente espaçados entre si pela distância constante a . Calcule o número de tijolos que podem ser empilhados sem que o conjunto perca o equilíbrio. Nota: $a = \frac{L}{n}$, onde n = número natural dimensional.



16. (Moysés) Calcule a magnitude da força F horizontal que é preciso aplicar, em direção ao eixo O ,

para conseguir que um tambor cilíndrico de massa M e raio R suba um degrau de altura $d < R$ (Figura).



17. Considere uma prancha homogênea de peso P e comprimento L que se encontra equilibrada horizontalmente em duas hastes A e B como mostra a figura 1 abaixo.



Figura 1

Sobre a prancha, em uma posição $x < L/2$, é colocado um recipiente de massa desprezível e volume V , como mostrado na figura 2. Esse recipiente é preenchido lentamente com um líquido homogêneo de densidade constante até sua borda sem transbordar.

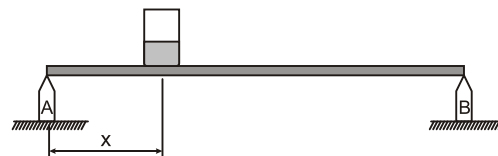
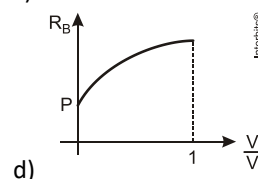
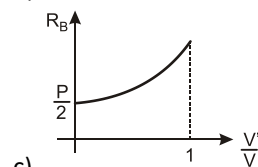
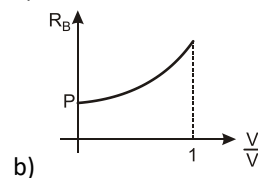
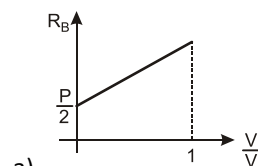
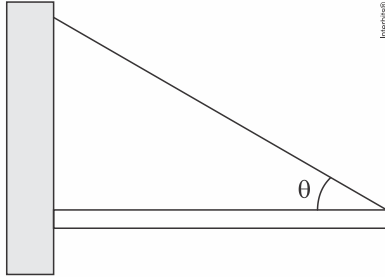


Figura 2

Nessas condições, o gráfico que melhor representa a intensidade da reação do apoio B , R_B , em função da razão entre o volume V' do líquido contido no recipiente pelo volume V do recipiente, V'/V , é



18. A figura mostra uma barra homogênea de massa m em equilíbrio. Ela está sustentada por um fio em uma das suas extremidades e é impedida de cair devido ao atrito com a parede na outra extremidade. A aceleração da gravidade vale g .



A força total exercida pela parede sobre a barra vale:

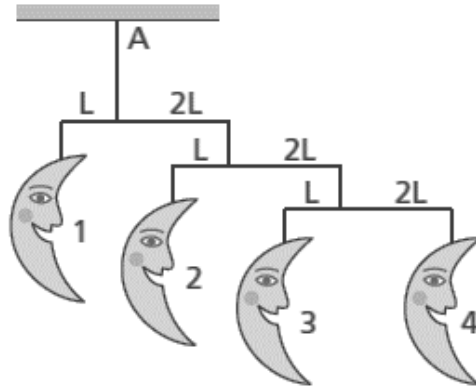
- $\frac{mg \cos \theta}{2}$
- $\frac{mg \sin \theta}{2}$
- $\frac{mgtg^2 \theta}{\sin \theta + 1}$
- $\frac{mg}{2 \sin \theta}$
- $\frac{mgtg^2 \theta}{\cos \theta + \sin \theta}$

19. Um corpo de massa m é colocado no prato A de uma balança de braços desiguais e equilibrados por uma massa p colocada no prato B. Esvaziada a balança, o corpo de massa m é colocado no prato B e equilibrado por uma massa q colocada no prato A. O valor da massa m é:

- $p q$
- $\sqrt{(p q)}$
- $\frac{p + q}{2}$
- $\frac{\sqrt{(p + q)}}{2}$
- $\frac{pq}{p + q}$

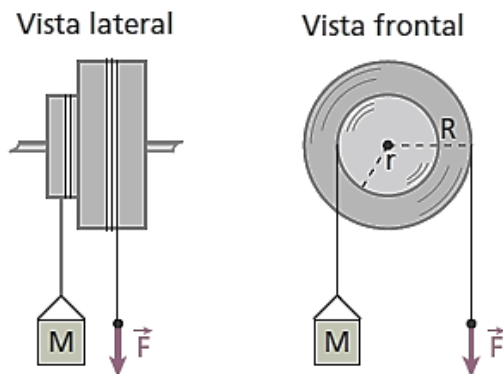
20. (ITA) Um brinquedo que as mães utilizam para enfeitar quartos de crianças é conhecido como "mobile". Considere o "mobile" de luas esquematizado na figura abaixo. As luas estão presas por meio de fios de massas desprezíveis a três barras horizontais, também de massas desprezíveis. O conjunto todo está em equilíbrio e suspenso num único ponto A. Se

a massa da lua 4 é de 10 g, então a massa em quilogramas da lua 1 é:



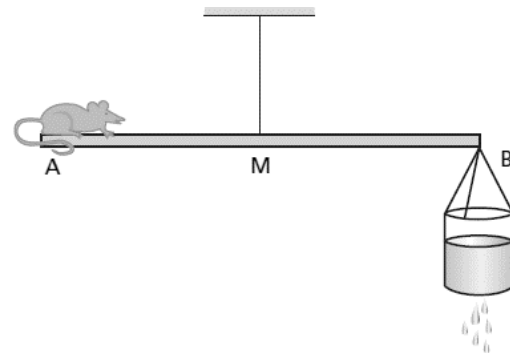
- 180.
- 80.
- 0,36.
- 0,18.
- 9.

21. A figura a seguir representa duas roldanas de raios $r = 10$ cm e $R = 40$ cm presas em um mesmo eixo que pode rotar praticamente sem atrito.



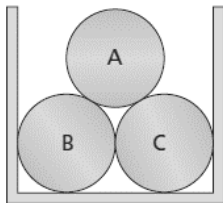
Cordas leves estão enroladas nessas roldanas. Em uma delas, está suspenso um bloco de massa M igual a 50 kg e o sistema é mantido em equilíbrio pela força vertical F aplicada na outra corda. Considerando $g = 10$ m/s², calcule a intensidade de F .

- 22.



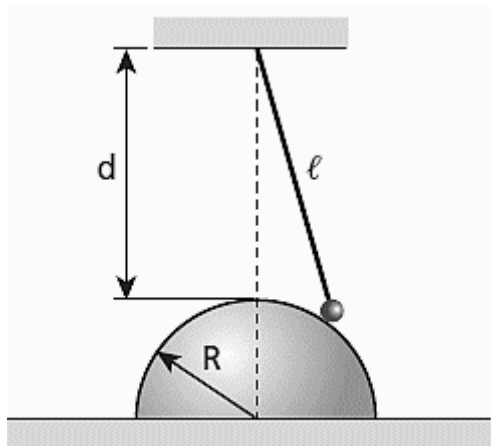
Na figura acima, uma haste AB, homogênea e de seção reta uniforme, medindo 2,4 m, é suspensa pelo seu ponto médio M, por meio de um arame. Na extremidade B, há um recipiente de massa desprezível contendo água, enquanto, na extremidade A, há um camundongo de massa 250 g. Nessa situação, a haste se mantém em repouso na posição horizontal. Em determinado instante, o recipiente começa a vaziar água na razão de 75 g/s e, em consequência disso, o camundongo passa a se mover no sentido de A para M, de modo a manter a haste na sua posição inicial. Para isso, qual deve ser o módulo v da velocidade do camundongo, em m/s?

23. Três cilindros iguais, **A**, **B** e **C**, cada um com massa **M** e raio **R**, são mantidos empilhados com seus eixos horizontais, por meio de muretas laterais verticais, como mostra a figura. Desprezando qualquer efeito de atrito, determine, em função de **M** e **g**:

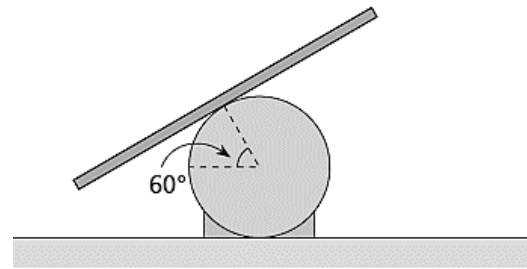


- o módulo da força F_{AB} que o cilindro **A** exerce sobre o cilindro **B**;
- o módulo da força F_{PB} que o piso exerce sobre o cilindro **B**;
- o módulo da força F_{MC} que a mureta exerce sobre o cilindro **C**.

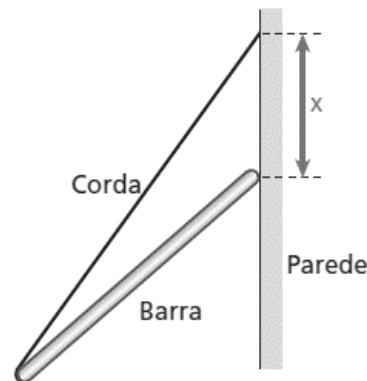
24. Uma bolinha de aço, de peso **P**, encontra-se em repouso presa em um fio suposto ideal, de comprimento λ , e apoiada em um hemisfério fixo de raio **R**, praticamente sem atrito. Sendo **d** a distância do polo do hemisfério ao ponto de suspensão do fio, determine a intensidade da força de tração exercida pelo fio em função de **P**, λ , **d** e **R**.



25. Uma tábua rígida é colocada sobre um cilindro fixo, ficando em equilíbrio e na iminência de escorregar, como mostra a figura. Determine o coeficiente de atrito estático entre a tábua e o cilindro.

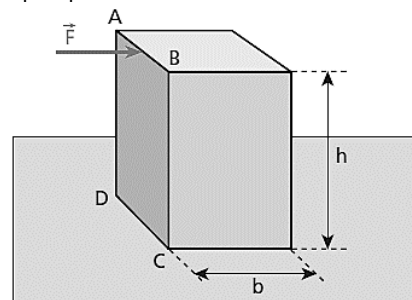


26. Uma barra cilíndrica e homogênea, de comprimento igual a 300 cm, encontra-se em equilíbrio sustentada por uma corda de comprimento igual a 400 cm e apoiada em uma parede vertical praticamente sem atrito, como representa a figura.



Determine a distância **x** entre o ponto da parede onde a corda está amarrada e o ponto da parede onde a barra se apoia.

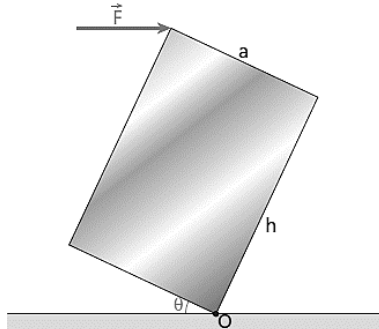
27. Um bloco prismático e homogêneo, de altura **h** e base quadrada de lado **b**, encontra-se em repouso em um piso plano e horizontal.



Uma força **F**, de intensidade crescente a partir de zero, é aplicada no ponto médio da aresta AB, perpendicularmente à face ABCD. Sendo μ_e o coeficiente de atrito estático entre o bloco e o piso, determine a relação entre **b** e **h** para que o bloco tombe antes de escorregar.

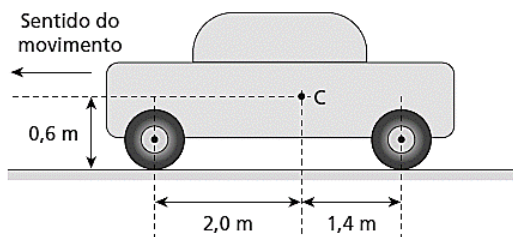
28. Uma chapa retangular homogênea, de espessura uniforme, largura **a** e comprimento **h**, está em repouso

apoiada em uma superfície plana e horizontal, sob a ação de uma força horizontal F , como representa a figura. Essa força e o centro de gravidade da chapa estão em um mesmo plano vertical.

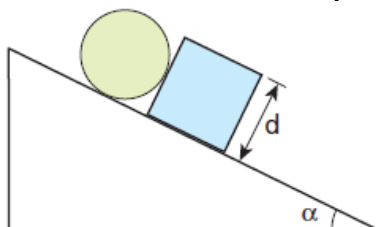


Seja P a intensidade do peso da chapa, determine:
a) a intensidade da força F , em função de a , h , P e do ângulo θ indicado na figura;
b) o ângulo θ_E (um valor de θ), correspondente à posição de equilíbrio instável da chapa (força F ausente), em função de a e h .

29. (ITA-SP) Considere um automóvel de peso P , com tração nas rodas dianteiras, cujo centro de massa está em C , movimentando-se num plano horizontal. Considerando $g = 10 \text{ m/s}^2$, calcule a aceleração máxima que o automóvel pode atingir, sendo o coeficiente de atrito entre os pneus e o piso igual a 0,75.



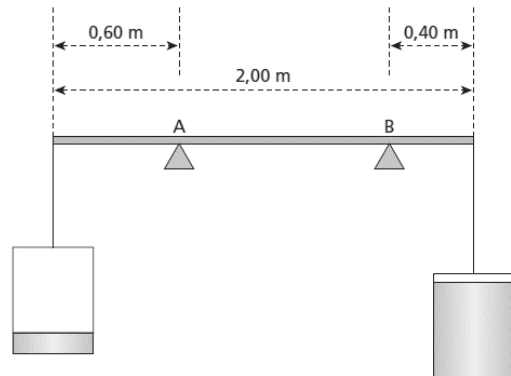
30. (ITA-SP) Considere o bloco cúbico homogêneo de lado d e massa m em repouso sobre um plano inclinado de ângulo α , que impede o movimento de um cilindro homogêneo de diâmetro d e massa m idêntica à do bloco, como mostra a figura. Suponha que o coeficiente de atrito estático entre o bloco e o plano seja suficientemente grande para que o bloco não deslize pelo plano e que o coeficiente de atrito estático entre o cilindro e o bloco seja desprezível.



O valor máximo do ângulo α do plano inclinado, para que a base do bloco permaneça em contato com o plano, é tal que:

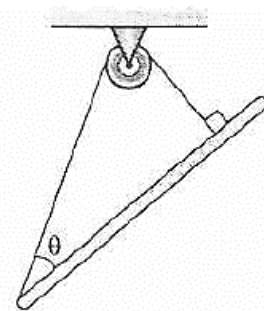
- a) $\sin \alpha = \frac{1}{2}$.
- b) $\tan \alpha = 1$.
- c) $\tan \alpha = 2$.
- d) $\tan \alpha = 3$.
- e) $\cotg \alpha = 2$.

31. (Olimpíada Brasileira de Física) Uma haste leve é apoiada nos pontos A e B ; do seu extremo direito pende um balde com 50 l de água e, do seu extremo esquerdo, pende outro balde com 10 l de água, por meio de fios de massas desprezíveis, conforme o desenho. As massas dos baldes podem também ser desprezadas.

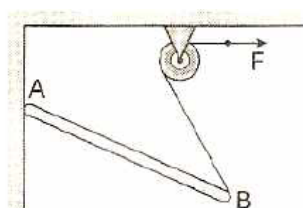


Quais as quantidades mínima e máxima de água que devem ser transferidas do balde da direita para o da esquerda para que o sistema fique em equilíbrio?

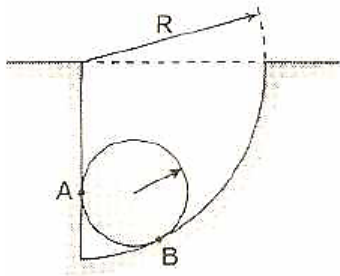
32. Uma viga de 60 N é mantida em equilíbrio, como mostra a figura. Se a tensão na corda é $20\sqrt{3}$, determine a medida do ângulo θ que define a posição de equilíbrio.



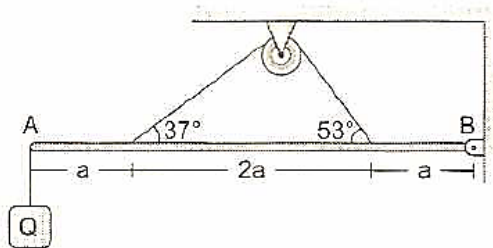
33. Se a reação em A da parede lisa da barra for 5 N e a barra AB uniforme e homogênea pesa 12 N, encontre a magnitude da força horizontal F que mantém a barra em equilíbrio.



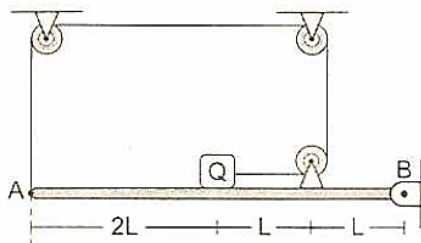
34. A figura mostra uma esfera de raio r e peso $W = 6$ N. Repousando sobre uma superfície cilíndrica de raio de curvatura R . Calcule o valor da reação sobre a esfera no ponto A, sabendo que $R = 3r$.



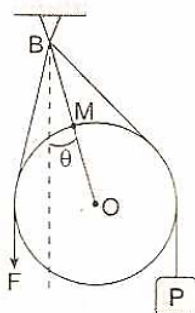
35. Se o peso da barra horizontal AB, uniforme e homogênea, é 45 N, determine a tensão da corda que a suporta. $P_Q = 10$ N.



36. Se a barra AB uniforme e homogênea mostrada na figura pesa 10 N e o coeficiente de atrito entre ela e o bloco Q é 0,8, determine o peso mínimo de Q para que o sistema permaneça em equilíbrio.

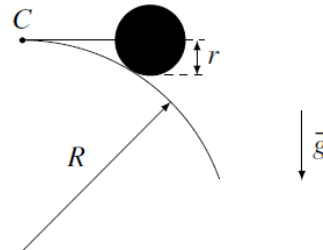


37. A figura mostra uma esfera homogênea e lisa de peso 4 N. O sistema em equilíbrio tem três cordas, encontre o módulo da força F , de modo que a corda BM deflete um ângulo $\theta = \arcsin(1/7)$ para a direita em relação à vertical. O bloco P tem um peso de 8 N. Também: $OM = BM$.



38. Uma bola de raio r e massa m é presa a uma esfera imóvel de raio R , por meio de um fio leve de comprimento l , em C (ponto mais elevado da esfera). Não existem outros pontos de contato entre o fio e a esfera. Despreze o atrito. Determine a magnitude da tensão no fio.

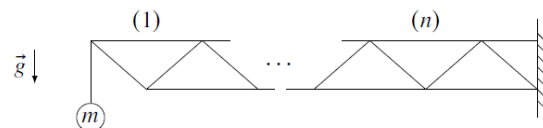
Dado: a gravidade local é $g = 10 \text{ m/s}^2$



- (A) $\frac{mg(l+r)}{R}$ (C) $\frac{mg(l+r)}{2R}$
(B) $\frac{mg(l+2r)}{R}$ (D) $\frac{2mg(l+2r)}{R}$

39. Um sistema de varetas, unidas por articulações, suspende uma carga de massa m . Todas as varetas são idênticas e são muito leves em confronto com a massa daquela carga. Qual a tração na vareta horizontal de posição n ?

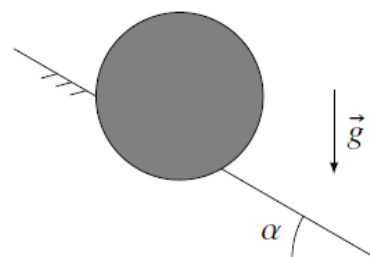
Dado: a gravidade local é $\vec{g}$



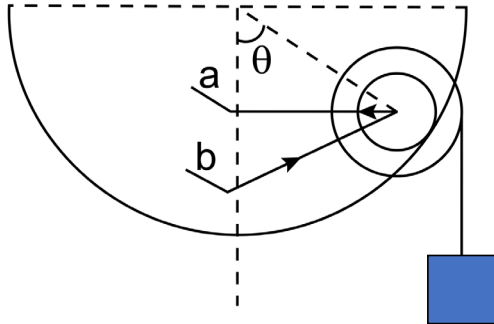
- (A) $\frac{mg}{\sqrt{3}}(2n-1)$ (C) $\frac{mg}{\sqrt{3}}$
(B) $\frac{mg}{\sqrt{3}}(2n)$ (D) $\frac{2mg}{\sqrt{3}}$

40. Qual ângulo de inclinação com a horizontal deverá ter o plano para que a bola abandone o buraco situado neste plano? A profundidade do buraco é duas vezes menor do que o raio da esfera.

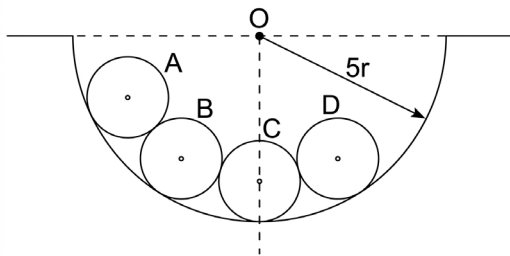
Dado: a gravidade local é $\vec{g}$



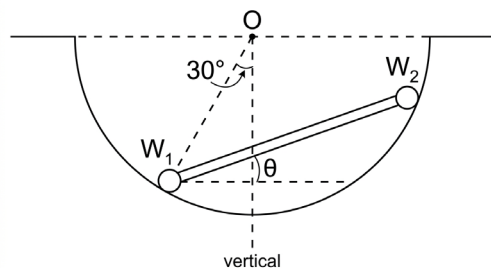
41. Uma roda com um peso de 100 N gira em relação a seu cubo (trilho circular) ascendendo sobre a superfície curvilínea pela ação do peso de um bloco de 25 N pendurado em uma corda enrolada em sua superfície. Determine a medida do ângulo θ em que a roda para, assumindo que o atrito é suficiente para evitar que a roda deslize. O raio interno $a = 6$ cm e o raio externo $b = 15$ cm.



42. Na figura mostrada as esferas são de mesmo "r", onde A, B e C têm pesos iguais a 4 N cada um. Encontre o peso da esfera D, de modo que o sistema esteja em equilíbrio, conforme indicado, sabendo que elas repousam sobre a superfície hemisférica de raio $5r$.

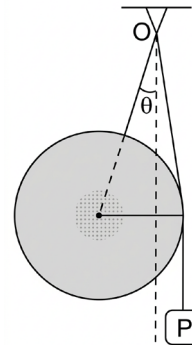


43. A figura mostra duas esferas de raio igual, unidas por uma barra de peso insignificante, repousando sobre uma superfície cilíndrica. Se os pesos das esferas forem: $W_1 = 6$ N e $W_2 = 5$ N, determine a medida do ângulo θ que define a posição de equilíbrio do sistema mecânico. Não há atrito.

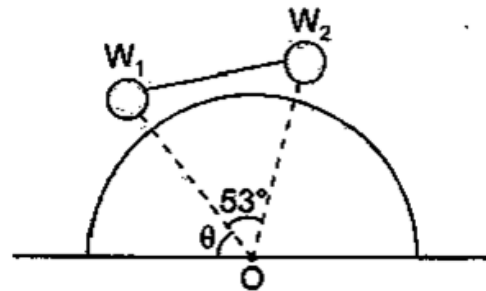


44. Existe uma esfera com raio de 60 cm e peso 2 N. Um bloco P pesando 10 N está suspenso no ponto O por uma corda, fazendo com que a esfera se desvie de sua posição inicial. Se o comprimento da corda que amarra a esfera é de 40 cm, calcule a medida do

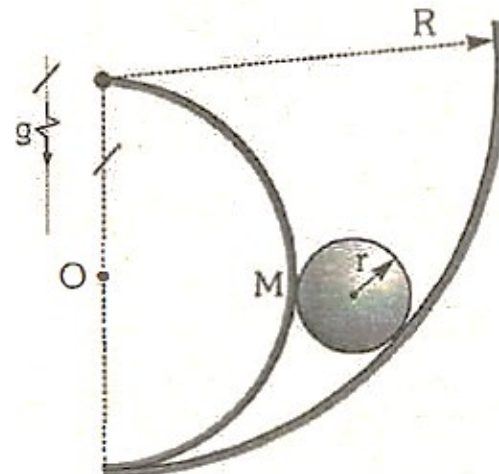
ângulo θ que define a posição de equilíbrio. Não há atrito.



45. Determine a medida do ângulo θ , de modo que o sistema mostrado esteja em equilíbrio. São duas esferas de igual tamanho, unidas por um fio de peso desprezível e estão sobre uma superfície cilíndrica sem atrito. $P_1 = 15$ N e $P_2 = 7$ N.

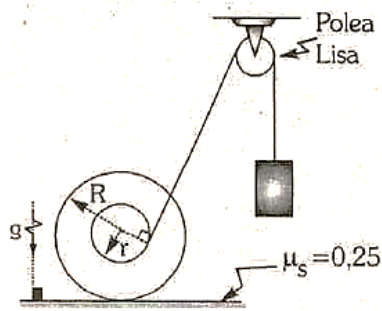


46. Uma esfera homogênea de 8 kg está em equilíbrio. Determine o módulo da força de reação no ponto M; $R = 4r$. (Considere superfícies lisas e $g = 10$ m/s²).

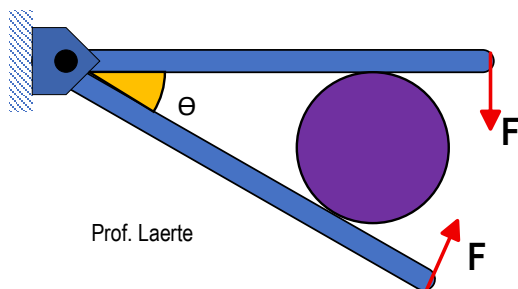


47. A figura mostra um cilindro homogêneo de 16 kg ao qual é aplicada uma força por meio de uma corda presa a um bloco. Determine o peso máximo do bloco para que o sistema fique como mostrado.

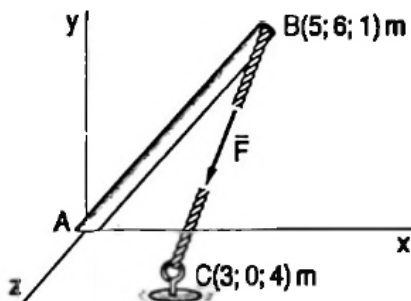
($g = 10$ m/s²; $3R = 5r$).



48. Com a aplicação das forças F , tenta-se reduzir o ângulo diedro θ . Qual deve ser o coeficiente de atrito entre a bola e os planos, para que a bola não escape? Suponha que o sistema esteja em um plano horizontal suave.

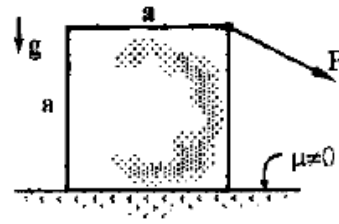


49. A corda mostrada na figura exerce uma força de magnitude $|\vec{F}| = 210 \text{ N}$ na parte superior do poste em B. Determine o torque de $\vec{F}$ em relação a A.

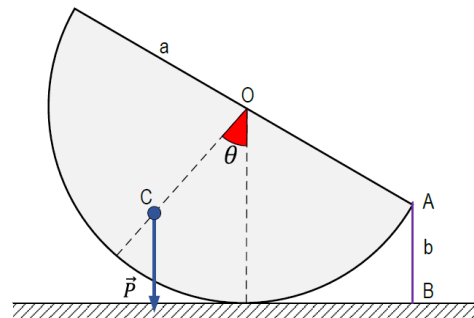


- A) $310\vec{i} + 50\vec{j} + 240\vec{k}$
- B) $720\vec{i} - 510\vec{j} - 540\vec{k}$
- C) $560\vec{i} - 600\vec{j} - 360\vec{k}$
- D) $310\vec{i} + 500\vec{j} + 520\vec{k}$
- E) $720\vec{i} + 510\vec{j} - 240\vec{k}$

50. Na figura, o cubo homogêneo tem lado a e peso $W = 100 \text{ N}$, para qual valor de F o cubo não tomba ($\mu = 1/2$)?



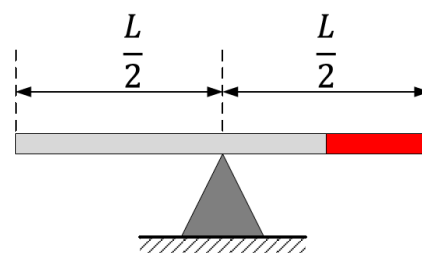
51. (ITA) Um hemisfério homogêneo de peso P e raio a repousa sobre uma mesa horizontal perfeitamente lisa. Como mostra a figura, um ponto A de hemisfério está atado a um ponto B da mesa por um fio inextensível, cujo peso é desprezível. O centro de gravidade do hemisfério é o ponto C. Nestas condições a tensão no fio é:



- a) $T = P \cdot \frac{\overline{OC}}{a} \cdot \tan \theta$
- b) $T = P \cdot \frac{\overline{OC}}{a} \cdot \sin \theta$
- c) $T = P \cdot \frac{\overline{OC}}{a} \cdot (1 - \cos \theta)$
- d) $T = P \cdot \frac{a}{\overline{OC}} \cdot \tan \theta$
- e) $T = P \cdot \frac{a}{\overline{OC}} \cdot \sin \theta$

52. (ITA) Uma haste metálica de seção retangular de área A e de comprimento L é composta de dois materiais de massas específicas ρ_1 e ρ_2 . Os dois materiais constituem hastes homogêneas de comprimentos L_1 e L_2 , com $L_1 + L_2 = L$ e $L_1 = 3 \cdot L_2$, soldadas nas extremidades.

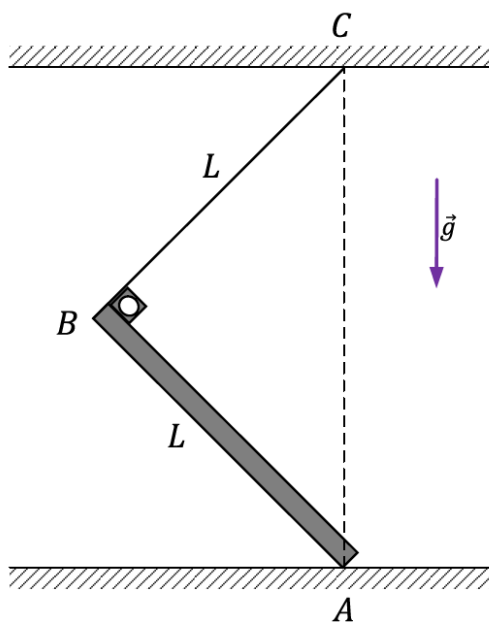
Colocada a haste sobre um cutelo, verifica-se que o equilíbrio é atingido na situação indicada na figura.



Calcule a relação $\frac{\rho_1}{\rho_2}$.

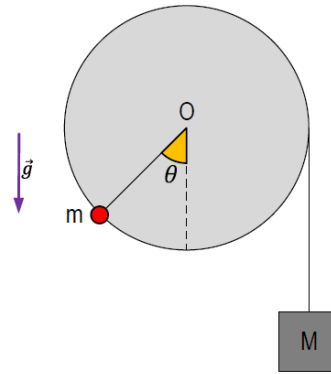
- a) $\rho_1/\rho_2 = 1$
- b) $\rho_1/\rho_2 = 2$
- c) $\rho_1/\rho_2 = 3$
- d) $\rho_1/\rho_2 = 2,5$
- e) $\rho_1/\rho_2 = 0,4$

53. (ITA) Para que a haste AB homogênea de peso P permaneça em equilíbrio suportada pelo fio BC, a força de atrito em A deve ser:

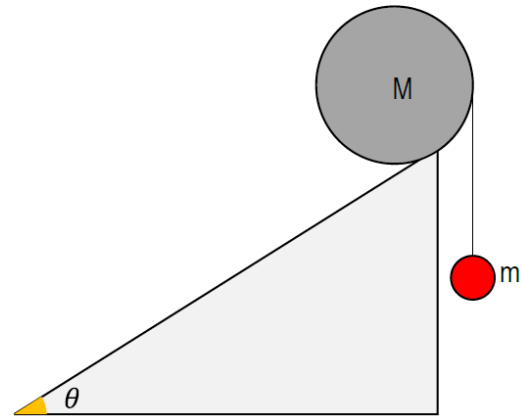


- a) $\frac{P}{4}$
- b) $\frac{P}{2}$
- c) $P \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$
- d) $P \cdot \frac{\sqrt{2}}{4}$
- e) outro valor

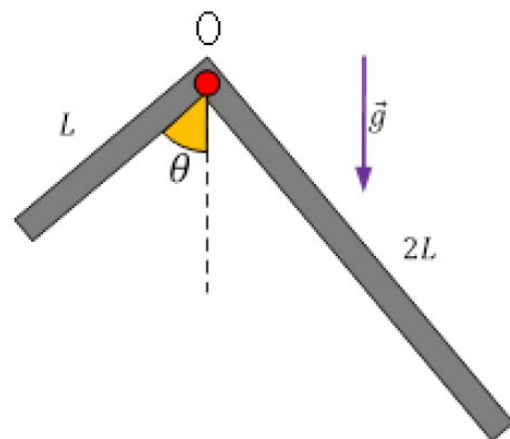
54. (ÍNDIA) Uma polia uniforme em forma de disco pode girar livremente em torno de um eixo que passa por seu centro O . Um fio é enrolado firmemente na polia e suporta uma massa M em sua extremidade. Uma pequena partícula de massa m está presa na circunferência da polia. O sistema permanece em equilíbrio quando a partícula forma um ângulo θ com a vertical mostrada na figura. Determine a razão m/M .



55. (RÚSSIA) Um cilindro uniforme de massa M fica em um plano fixo inclinado a um ângulo θ . Uma corda é amarrada ao ponto mais à direita do cilindro e uma massa m trava na corda, como mostra a figura abaixo. Suponha que o coeficiente de atrito entre o cilindro e o plano é suficientemente grande para evitar escorregar. Determine o valor de m , em termos de M e θ , se a configuração for estática?



56. (ÍNDIA) Uma haste em forma de L tem dois braços, com comprimentos L e $2L$. Ele repousa sobre uma estaca, como mostrado. Encontre o ângulo θ em equilíbrio. Ambos os braços têm a mesma densidade linear de massa λ .



GABARITO DE APROFUNDAMENTO

1. c) $F_L = F_R = mg/2$

2. Resolução:

Não Como o piso não tem atrito, ele não pode fornecer uma força horizontal. A força normal (horizontal) da parede deve, portanto, ser zero se o sistema for estático.

$$mg \left(\frac{\ell}{2} \cos \theta \right) = A(\ell \sin \theta) \implies A = \frac{mg}{2 \tan \theta}.$$

$$B = mg$$

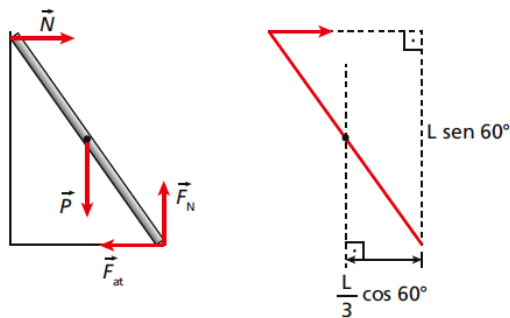
$$R = \sqrt{mg^2 + \left(\frac{mg}{2 \tan \theta} \right)^2}$$

$$R = mg^2 \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2 \tan \theta} \right)^2}$$

3.

$$m_1(m_2 + m_3) \ell_1 = 4 m_2 m_3 \ell_2$$

4.

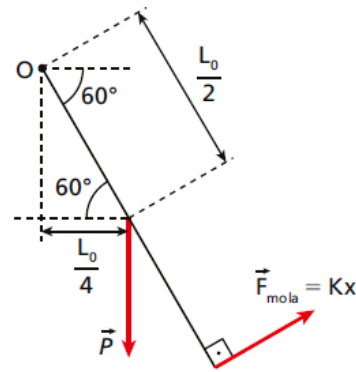


$$F_C = \sqrt{P^2 + N^2}$$

$$F_C = \sqrt{(270)^2 + (30\sqrt{3})^2}$$

$$F_C \cong 275 \text{ N}$$

5.



$$M_{(\text{horário})} = M_{(\text{anti-horário})}$$

$$P \frac{L_0}{4} = F_{\text{mola}} L_0$$

$$P \frac{L_0}{4} = Kx L_0$$

$$P \frac{L_0}{4} = K L_0 (\sqrt{3} - 1) L_0$$

$$k = \frac{mg L_0^{-1}}{4(\sqrt{3} - 1)}$$

6. **Resposta:** [C]

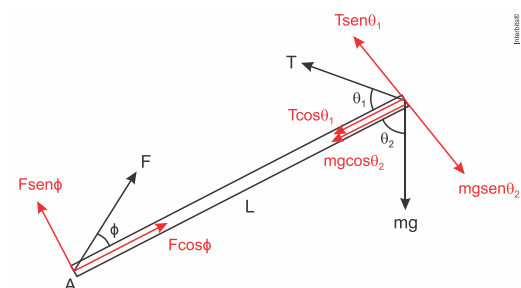
Para que o sistema esteja em equilíbrio, o binário gerado pela força gravitacional deve se igualar ao torque gerado pelo fio:

$$F_G L = k \Delta \Phi$$

$$\frac{GMm}{b^2} \cdot L = k \Delta \Phi$$

$$\therefore G = \frac{b^2 k \Delta \Phi}{LMm}$$

7. **Resposta:** Das forças sobre a barra representadas na figura abaixo, obtemos:



Equilíbrio translacional:

$$\begin{cases} F \cos \varphi = T \cos \theta_1 + mg \cos \theta_2 & \text{(I)} \\ F \sin \varphi + T \sin \theta_1 = mg \sin \theta_2 & \text{(II)} \end{cases}$$

Equilíbrio rotacional em relação ao ponto A :

$$T \sin \theta_1 \cdot L - mg \sin \theta_2 \cdot L = 0 \implies T = mg \frac{\sin \theta_2}{\sin \theta_1} \quad \text{(III)}$$

Substituindo (III) em (II), vem:

$$F \sin \varphi + mg \frac{\sin \theta_2}{\sin \theta_1} \sin \theta_1 = mg \sin \theta_2 \Rightarrow F \sin \varphi = 0 \Rightarrow \varphi = 0^\circ \quad (IV)$$

Substituindo (III) e (IV) em (I), chegamos a:

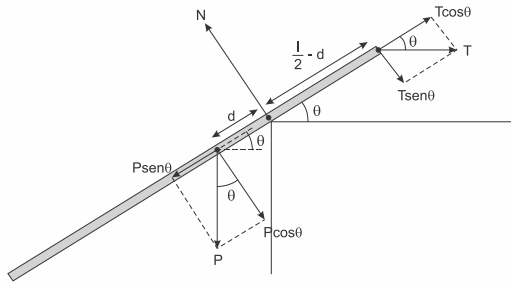
$$F \cos 0^\circ = mg \frac{\sin \theta_2}{\sin \theta_1} \cos \theta_1 + mg \cos \theta_2 \Rightarrow F = mg \left(\frac{\sin \theta_2 \cos \theta_1 + \sin \theta_1 \cos \theta_2}{\sin \theta_1} \right)$$

$$\therefore F = mg \frac{\sin(\theta_1 + \theta_2)}{\sin \theta_1}$$

8. Resposta:

[E]

Ilustrando e decompondo as forças na barra, temos:



Para o equilíbrio translacional na direção da barra:

$$P \sin \theta = T \cos \theta \Rightarrow \frac{T}{P} = \tan \theta \quad (I)$$

Para o equilíbrio rotacional em torno do ponto no qual a barra toca a superfície:

$$P \cos \theta \cdot d = T \sin \theta \cdot \left(\frac{l}{2} - d \right) \quad (II)$$

Dividindo (II) por P e substituindo o resultado de (I), obtemos:

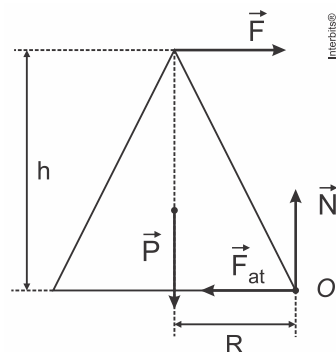
$$\cos \theta d = \frac{T}{P} \sin \theta \left(\frac{l}{2} - d \right) \Rightarrow \frac{\cos \theta d}{\sin \theta} = \tan \theta \left(\frac{l}{2} - d \right) \Rightarrow \frac{d}{\tan \theta} = \tan \theta \left(\frac{l}{2} - d \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d = \tan^2 \theta \frac{l}{2} - \tan^2 \theta d \Rightarrow (1 + \tan^2 \theta) d = \frac{\tan^2 \theta l}{2} \Rightarrow \frac{d}{l} = \frac{\tan^2 \theta}{2 \sec^2 \theta} = \frac{1}{2} \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} \cdot \frac{\cos^2 \theta}{1}$$

$$\therefore \frac{d}{l} = \frac{\sin^2 \theta}{2}$$

9. Resposta: [A]

No início do tombamento, as componentes da força que a superfície aplica no bloco cônico, Normal ($\vec{N}$) e Atrito ($\vec{F}_{at}$), agem no ponto O, como mostra a figura.



Considerando o ponto O como polo, os momentos dessas componentes são nulos. Então o momento de

$\vec{F}$ é igual ao momento do peso. Assim:

$$Fh = PR \Rightarrow \frac{h}{R} = \frac{P}{F} \Rightarrow \boxed{\frac{h}{R} = \frac{MG}{F}}$$

10. Resposta:

Sejam as intensidades:

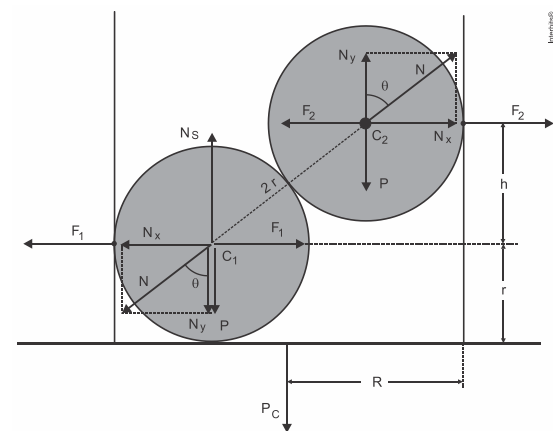
N: das forças trocadas entre as esferas inferior (1) e superior (2);

F₁ e F₂: das forças recebidas e aplicadas (ação-reação) por cada esfera nas paredes dos cilindros;

P_c: do peso do cilindro;

N_s: da força que a base do cilindro exerce na esfera inferior.

A figura abaixo mostra as forças mencionadas.



A esfera superior está em equilíbrio:

$$\left\{ \begin{array}{l} F_2 = N_x \Rightarrow F_2 = N \sin \theta \quad (I) \\ P = N_y \Rightarrow P = N \cos \theta \quad (II) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{F_2}{P} = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \Rightarrow F_2 = P \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \quad (III)$$

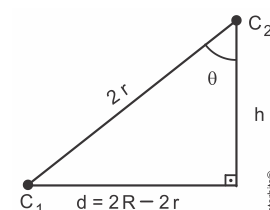
A esfera inferior está em equilíbrio:

$$\left\{ \begin{array}{l} F_1 = N_x \Rightarrow F_1 = N \sin \theta \quad (IV) \\ N_s = P + N_y = N_s = P + N \cos \theta \quad (V) \end{array} \right.$$

Comparando (I), (III) e (IV):

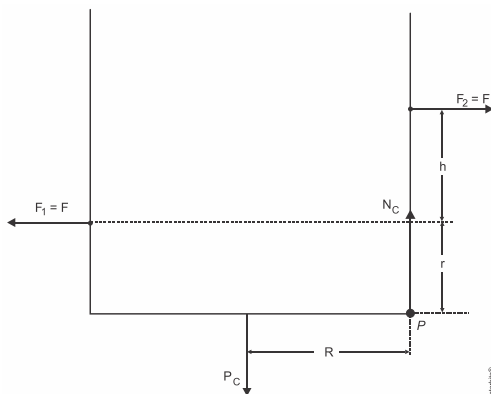
$$F_1 = F_2 = F = N \sin \theta = P \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \Rightarrow F = P \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \quad (VI)$$

Na figura a seguir calculemos h e sen θ.



$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Dado: } r = \frac{3R}{4} \\ \cos \theta = \frac{h}{2r} \Rightarrow h = 2r \cos \theta. \quad (\text{VII}) \\ d = 2R - 2r = 2\left(R - \frac{3R}{4}\right) \Rightarrow d = \frac{R}{2} \quad (\text{VIII}) \\ \sin \theta = \frac{d}{2r} = \frac{\frac{R}{2}}{2\left(\frac{3R}{4}\right)} = \frac{R}{2} \times \frac{2}{3R} \Rightarrow \sin \theta = \frac{1}{2} \quad (\text{IX}) \end{array} \right.$$

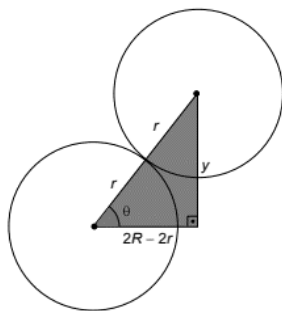
Destacando apenas as forças que agem no cilindro:



Na iminência de o cilindro tombar, a normal ($\vec{N}_C$) que a superfície exerce sobre o cilindro age no ponto P . Para que o cilindro esteja em equilíbrio de rotação, o somatório dos momentos horários deve ser igual ao somatório dos momentos anti-horários. Inserindo as expressões (VI), (VII), (VIII) e (IX), em relação a um eixo que passe pelo ponto P temos, então:

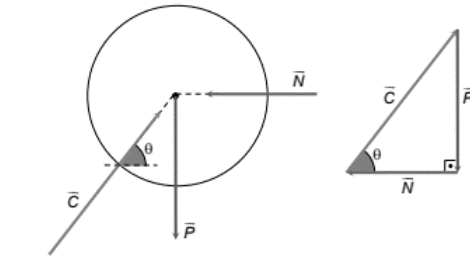
$$M_{F_2} = M_{F_1} + M_{P_C} \Rightarrow F(h+r) = F(r) + P_C(R) \Rightarrow Fh + F(r) = F(r) + P_C R \Rightarrow F(2r \cos \theta) = P_C R \Rightarrow 2 \frac{P \sin \theta}{\cos \theta} \left(\frac{3R}{4} \cos \theta \right) = P_C R \Rightarrow P_C = 3 \frac{P}{2} \sin \theta = 3 \frac{P}{2} \left(\frac{1}{2} \right) \Rightarrow P_C = \frac{P}{2}$$

Outra maneira



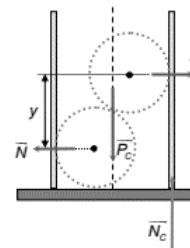
$$\tan \theta = \frac{y}{2R - 2r} = \frac{y}{2R - 2 \cdot \frac{3R}{4}} = \frac{2y}{R}$$

Isolando a bola que está no topo, temos as forças $\vec{P}$ (peso), $\vec{C}$ (força de contato entre as duas bolas) e $\vec{N}$ (normal com a parede):



Assim:

$$\tan \theta = \frac{|\vec{P}|}{|\vec{N}|} \Rightarrow \frac{2y}{R} = \frac{|\vec{P}|}{|\vec{N}|} \Rightarrow |\vec{N}| = |\vec{P}| \cdot \frac{R}{2y}$$

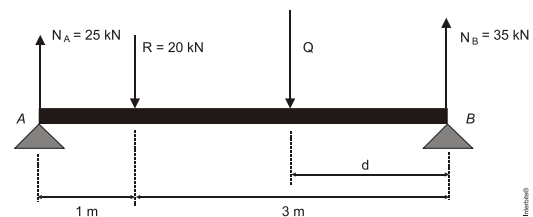


Observe que a reação normal $\vec{N}_C$ com o chão, na iminência do cilindro tombar, estará sobre a borda mais à direita do cilindro, pois a normal entre a parede do cilindro e a bola do topo exerce um torque maior, em relação a um ponto na base do cilindro, do que a normal entre a parede do cilindro e a bola mais para baixo.

Em relação a esse ponto na borda mais à direita na base do cilindro, as forças $\vec{N}$ e $\vec{P}_C$ exercem torque no sentido anti-horário, enquanto $-\vec{N}$ exerce torque no sentido horário e $\vec{N}_C$ não exerce torque. Assim, impondo o equilíbrio dos torques em relação a esse ponto, temos:

$$|\vec{N}| \cdot r + |\vec{P}_C| \cdot R = |\vec{N}| \cdot (r + y) \Rightarrow |\vec{P}_C| = |\vec{N}| \cdot \frac{y}{R} = \left(|\vec{P}| \cdot \frac{R}{2y} \right) \cdot \frac{y}{R} \Rightarrow |\vec{P}_C| = \frac{|\vec{P}|}{2}$$

11. Resposta: [B]



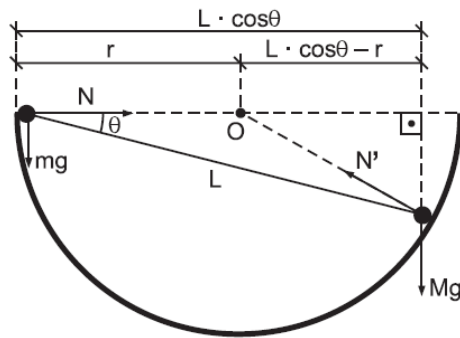
Sendo Q a carga desconhecida, do equilíbrio de translação, temos:

$$Q + 20 = N_A + N_B \Rightarrow Q + 20 = 25 + 35 \Rightarrow Q = 40 \text{ kN.}$$

Em relação ao ponto B , o equilíbrio de rotação nos dá:

$$Qd + R(3) = N_A(4) \Rightarrow 40d + 20(3) = 25(4) \Rightarrow 40d = 40 \Rightarrow d = 1 \text{ m.}$$

12. Resolução:



Lei dos senos:

$$r^2 = r^2 + L^2 - 2 \cdot r \cdot L \cdot \cos \theta$$

$$\cos \theta = \frac{L}{2r}$$

Adotando como polo o ponto O.

$$m \cdot r \cdot g = M \cdot g \cdot (L \cos \theta - r)$$

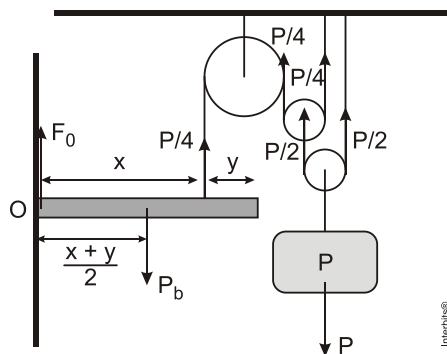
$$\frac{m}{M} = \frac{L \cos \theta - r}{r}$$

Substituindo o valor do cosseno

$$\frac{m}{M} = \frac{L^2 - 2r^2}{2r^2}$$

13. Resposta:

A figura a seguir mostra as forças atuantes nas polias, bem como as forças atuantes na barra, sendo P_b o peso da barra, aplicado no centro de gravidade.



Do equilíbrio de translação:

$$P_b = F_0 + \frac{P}{4} \Rightarrow P_b = \frac{4F_0 + P}{4} \quad (I).$$

Do equilíbrio de rotação, considerando polo em O:

$$P_b \frac{x+y}{2} = \frac{P}{4} x \quad (II).$$

(I) em (II):

$$\frac{4F_0 + P}{4} \frac{x+y}{2} = \frac{P}{4} x \Rightarrow 4F_0(x+y) + P x + P y = 2P x \Rightarrow 4F_0(x+y) = P(x-y) \Rightarrow F_0 = \frac{P(x-y)}{4(x+y)}.$$

14. Resposta:[C]

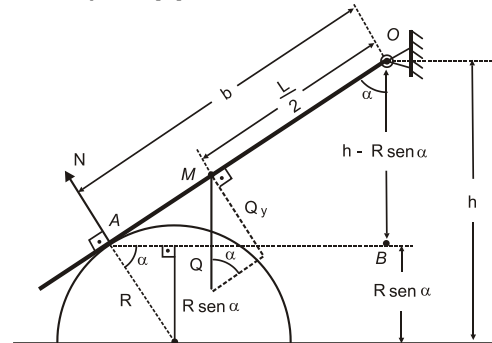


Fig 1 - forças que agem na barra

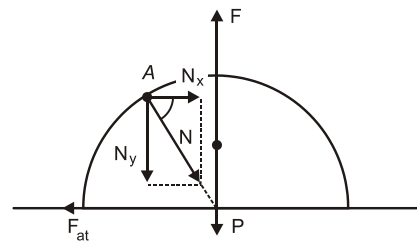


Fig 2 - forças que agem no semicilindro

Nas figuras acima:

b: distância AO;

N: intensidade da normal trocada entre o semicilindro e a barra;

Q_y: componente perpendicular do peso da barra;

M: ponto médio da barra.

F: componente vertical da força de reação que a superfície de apoio exerce no semicilindro;

F_at: componente horizontal da força de reação que a superfície de apoio exerce no semicilindro.

No triângulo ABO temos que:

$$\cos \alpha = \frac{h - R \sin \alpha}{b} \Rightarrow b = \frac{h - R \sin \alpha}{\cos \alpha}.$$

Como a barra está em equilíbrio de rotação, o somatório dos momentos é nulo. Assim, colocando polo em O, temos:

$$Q_y \frac{L}{2} - Nb = 0 \Rightarrow (Q \sin \alpha) \left(\frac{L}{2} \right) = (N) \left(\frac{h - R \sin \alpha}{\cos \alpha} \right)$$

$$N \frac{h - R \sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{L Q \sin \alpha}{2}. \text{ Isolando } N, \text{ vem:}$$

$$N = \frac{L Q \sin \alpha \cos \alpha}{2(h - R \sin \alpha)}$$

$$N = \frac{LQ \sin \alpha \cos \alpha}{2(h - R \sin \alpha)} \quad (\text{equação 1})$$

O semicilindro também está em equilíbrio. Então:

Na direção vertical:

$$F = N_y + P \Rightarrow F = N \sin \alpha + P. \quad (\text{equação 2})$$

Na direção horizontal (supondo iminência de escorregamento):

$F_{at} = N_x \Rightarrow \mu F = N \cos \alpha$. Substituindo a equação (2) e isolando μ , vem:

$$\mu = \frac{N \cos \alpha}{N \sin \alpha + P}. \quad \text{Colocando } N \text{ em evidência no denominador, temos:}$$

$$\mu = \frac{N \cos \alpha}{N \left(\sin \alpha + \frac{P}{N} \right)} \Rightarrow \mu = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha + \frac{P}{N}}.$$

Substituindo a equação (1):

$$\mu = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha + \frac{P}{\frac{LQ \sin \alpha \cos \alpha}{2(h - R \sin \alpha)}}} = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha + \frac{2P(h - R \sin \alpha)}{LQ \sin \alpha \cos \alpha}}$$

$\Rightarrow$

Aplicando a propriedade distributiva no denominador, fazendo os cancelamentos e lembrando que:

$$\sin \alpha \cos \alpha = \frac{\sin 2\alpha}{2}, \text{ vem:}$$

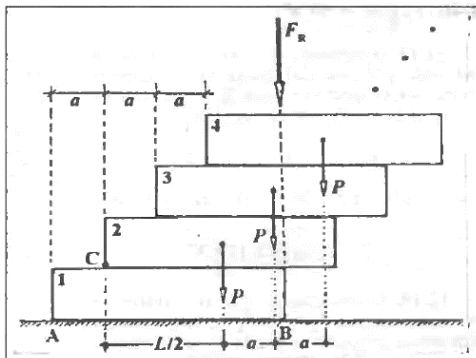
$$\mu = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha + \frac{2Ph}{LQ \frac{\sin 2\alpha}{2}} - \frac{2PR}{LQ \cos \alpha}} =$$

$$\mu = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha + \frac{2P2h}{LQ \sin 2\alpha} - \frac{2PR}{LQ \cos \alpha}}.$$

Colocando $2P$ em evidência, finalmente:

$$\mu = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha + 2P \left(\frac{2h}{LQ \sin 2\alpha} - \frac{R}{LQ \cos \alpha} \right)}$$

15. Resolução:



Verificamos que de todos os tijolos empilhados, o único que sempre permaneceria em seu lugar e em equilíbrio seria o tijolo nº 1. Os demais serão (N-1) tijolos, cujo peso total máximo pode ser colocado em a extremidade B do tijolo 1; se estivesse localizado mais à direita, o empilhamento entraria em colapso.

Pelo teorema de Varignon:

$$\sum (M_F)_A = (M_{F_R})_A \quad \text{eq. 1}$$

$$\begin{cases} (M_2)_A = (a + L/2)P \\ (M_3)_A = (2a + L/2)P \\ (M_4)_A = \left(3a + \frac{L}{2}\right)P \\ \vdots \\ (M_N)_A = [(N-1)a + L/2]P \end{cases} \quad \text{eq. 2}$$

$$(M_{F_R})_A = L F_R = L(N-1)P \quad (3)$$

$$\left[a + 2a + 3a + \dots + (N-1)a + \frac{(N-1)L}{2} \right] P = L(N-1)P$$

$$\frac{1}{2} \{ (N-1)[(N-1) + 1] \} a$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} N(N-1)a + \frac{(N-1)L}{2} = L(N-1)$$

$$\Rightarrow \frac{Na}{2} = \frac{L}{2} \Rightarrow N = \frac{L}{a}$$

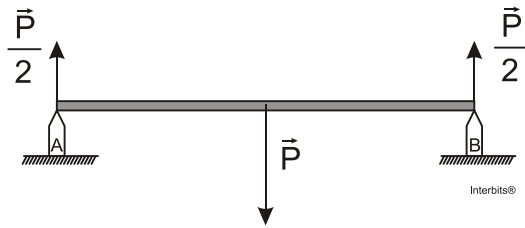
$$a = \frac{L}{n} \Rightarrow N = \frac{L}{L/n} \therefore \boxed{N = n}$$

16.

$$F = Mg \sqrt{d(2R - d)} / (R - d).$$

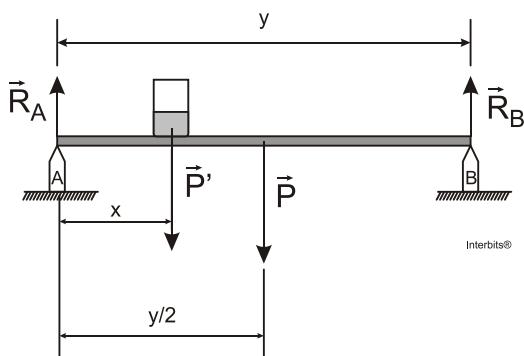
17. [A]

Desenhando as forças que atuam na prancha, antes do recipiente ser colocado sobre ela, teremos o seguinte esquema:



Verificamos que, inicialmente, a intensidade da reação do apoio B vale $\frac{P}{2}$, ou seja, ficamos com as alternativas [A] e [C].

Desenhando as forças que atuam na prancha, após o recipiente ser colocado sobre ela, teremos o seguinte esquema:



P' representa o peso do recipiente, que aumenta de acordo que $V' \rightarrow V$. Quando $V' = V$, $\frac{V'}{V} = 1$ e o recipiente estará cheio, ou seja, teremos o maior valor possível de P' .

Aplicando a somatória dos momentos das forças, em relação ao apoio A e tomando o sentido horário como positivo, teremos:

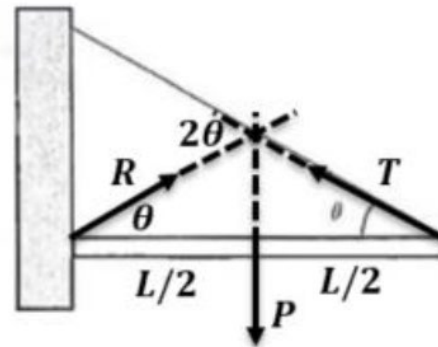
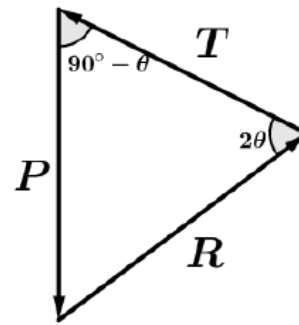
$$\sum m = 0$$

$$R_A \cdot 0 + P' \cdot x + P \cdot \frac{y}{2} - R_B \cdot y = 0 \rightarrow P' \cdot x + P \cdot \frac{y}{2} - R_B \cdot y = 0 \rightarrow R_B \cdot y = P' \cdot x + P \cdot \frac{y}{2}$$

$$\rightarrow R_B = \frac{P' \cdot x + P \cdot y}{2 \cdot y} \rightarrow R_B = \frac{P' \cdot x}{2 \cdot y} + \frac{P}{2}$$

Como x , y e P são constantes, concluímos que R_B varia em função de P' , ou seja, temos uma função de primeiro grau – reta em $R_B \times \frac{V'}{V} = 1$ – Alternativa [A].

18.



$$\frac{P}{\sin(2\theta)} = \frac{R}{\sin(90^\circ - \theta)}$$

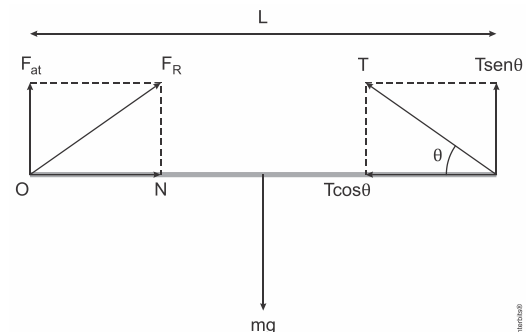
$$\frac{P}{2 \cdot \sin(\theta) \cdot \cos(\theta)} = \frac{R}{\cos(\theta)}$$

$$\therefore R = \frac{mg}{2\sin(\theta)}$$

2ª maneira de resolver

[D]

Isolando a barra, temos:



Equilíbrio rotacional em torno do ponto O :

$$T \sin \theta \cdot L = mg \cdot \frac{L}{2}$$

$$T = \frac{mg}{2 \sin \theta}$$

Equilíbrio em x :

$$N = T \cos \theta = \frac{mg \cos \theta}{2 \sin \theta}$$

Equilíbrio em y :

$$F_{at} = mg - T \sin \theta = mg - \frac{mg \sin \theta}{2 \sin \theta}$$

$$F_{at} = \frac{mg}{2}$$

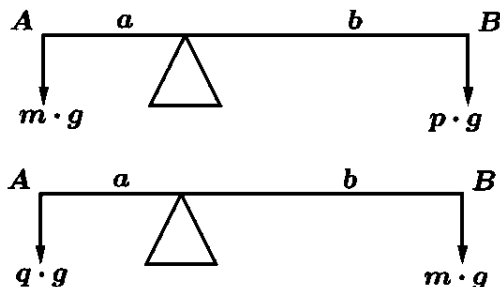
Logo:

$$F_R = \sqrt{N^2 + F_{at}^2} = \sqrt{\frac{m^2 g^2 \cos^2 \theta}{4 \sin^2 \theta} + \frac{m^2 g^2}{4}}$$

$$F_R = \frac{mg}{2} \sqrt{\frac{1 - \sin^2 \theta}{\sin^2 \theta} + 1} = \frac{mg}{2} \sqrt{\frac{1 - \sin^2 \theta + \sin^2 \theta}{\sin^2 \theta}}$$

$$\therefore F_R = \frac{mg}{2 \sin \theta}$$

19.



$$\begin{cases} mga = pgb \\ qga = mgb \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ma = pb \\ mb = qa \end{cases}$$

Multiplicando as equações

$$m^2 ab = pqab \Rightarrow m^2 = pq$$

$$m = \sqrt{pq}$$

20.

- $m_4 = 10g$
- Tomando os momentos em módulo e operando com massas, temos, de baixo para cima:
- $m_3 L = m_4 2L \Rightarrow m_3 = 20g$ e $m_3 + m_4 = 30g$

$$m_2 L = (m_3 + m_4) 2L \Rightarrow m_2 = 60g \text{ e } m_2 + m_3 + m_4 = 90g$$

$$m_1 L = (m_2 + m_3 + m_4) 2L \Rightarrow m_1 = 180g \Rightarrow m_1 = 0,18 \text{ kg}$$

21.

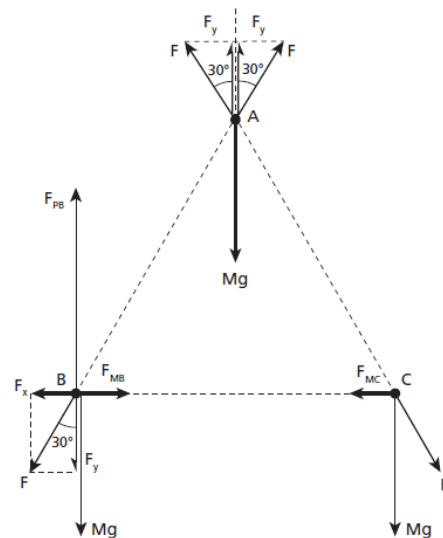
Resposta: 125 N

22.

Resposta: 0,36 m/s

23.

Resolução:



$$a) F_{AB} = F$$

Equilíbrio de A:

$$2F_y = Mg \Rightarrow F_y = \frac{Mg}{2} \Rightarrow F \cos 30^\circ = \frac{Mg}{2} \\ \Rightarrow F \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{Mg}{2} \Rightarrow F = \frac{Mg\sqrt{3}}{3}$$

$$F_{AB} = F = \frac{Mg\sqrt{3}}{3}$$

b) Equilíbrio de B analisado na vertical:

$$F_{PB} = Mg + F_y$$

$$F_{PB} = Mg + \frac{Mg}{2} \Rightarrow F_{PB} = \frac{3Mg}{2}$$

c) Equilíbrio de B analisado na horizontal:

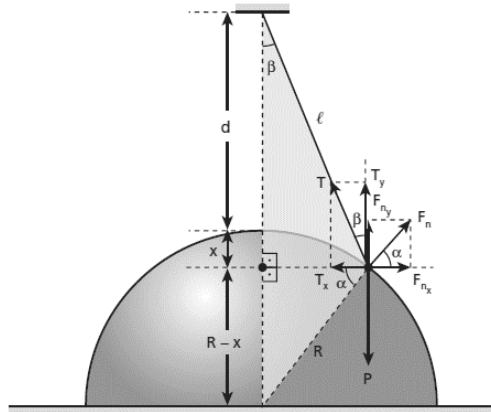
$$F_{MC} = F_{MB}$$

$$F_{MB} = F_x + F \sin 30^\circ = \frac{Mg\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{1}{2}$$

$$F_{MC} = F_{MB} = \frac{Mg\sqrt{3}}{6}$$

24.

Resolução:



$$F_n = T_x \Rightarrow F_n \cos \alpha = T \sin \beta \Rightarrow$$

$$F_n = \frac{T \sin \beta}{\cos \alpha} \quad (I)$$

$$T_y + F_n = P \Rightarrow T \cos \beta + F_n \sin \alpha = P \quad (II)$$

$$(I) \text{ em } (II): T \cos \beta + \frac{T \sin \beta}{\cos \alpha} \sin \alpha = P \quad (III)$$

Nos triângulos destacados:

$$\cos \beta = \frac{d+x}{\ell}, \quad \sin \beta = \frac{R \cos \alpha}{\ell} \text{ e}$$

$$\sin \alpha = \frac{R-x}{R}$$

Em (III):

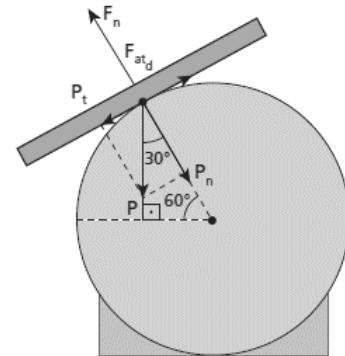
$$T \frac{d+x}{\ell} + \frac{T \frac{R \cos \alpha}{\ell} \cdot \frac{R-x}{R}}{\cos \alpha} = P$$

$$T \frac{d+x}{\ell} + T \frac{R-x}{\ell} = P$$

$$T(d+x) + T(R-x) = P\ell$$

$$T = \frac{P\ell}{d+R}$$

25.



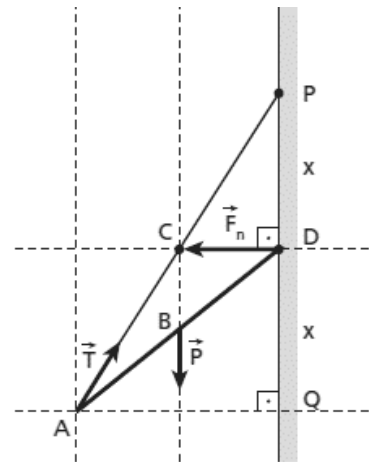
$$P_t = F_{at_d} = \mu_e F_n$$

$$P_n = F_n$$

$$\tan 30^\circ = \frac{P_t}{P_n} = \frac{\mu_e F_n}{F_n}$$

$$\mu_e = \tan 30^\circ \approx 0,58$$

26.



Na barra atuam apenas três forças (peso, tração e normal), de direções diferentes. Como sabemos, essas forças são concorrentes num mesmo ponto. Se **B** é o ponto médio da barra, então **C** é o ponto médio da corda e **D** é o ponto médio de PQ.

No triângulo ACD:

$$\overline{AD}^2 = \overline{QD}^2 + \overline{AQ}^2$$

$$3^2 = x^2 + \overline{AQ}^2$$

$$\overline{AQ}^2 = 9 - x^2$$

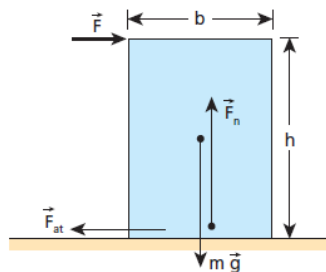
$$\overline{AP}^2 = \overline{PQ}^2 + \overline{AQ}^2$$

$$4^2 = (2x)^2 + 9 - x^2$$

$$x = 1,53 \text{ m} = 153 \text{ cm}$$

27.

•



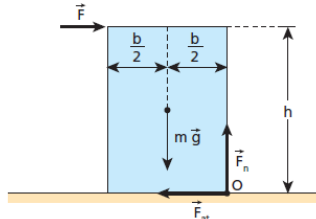
$$F_{at_d} = \mu_e F_n = \mu_e m g$$

O bloco só escorrega se:

$$F > F_{at_d}, \text{ ou seja, se } F > \mu_e m g \quad (I)$$

Na iminência de tombar, o bloco se encontra totalmente apoiado em uma região do plano onde está sua aresta inferior direita.

Para tombar, o módulo do momento horário de F, em relação a O, deve superar o módulo do momento anti-horário do peso m g:



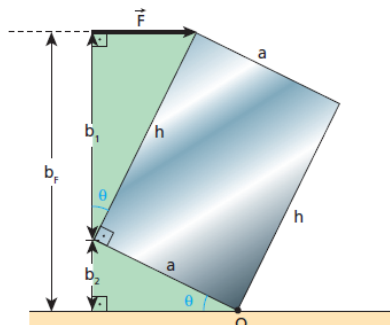
$$F h > m g \frac{b}{2} \Rightarrow F > \frac{m g b}{2 h} \quad (II)$$

Para tombar antes de escorregar, a condição (II) deve ser verificada antes da (I), ou seja:

$$\frac{m g b}{2 h} < \mu_e m g \Rightarrow b < 2 \mu_e h$$

28.

• Vamos determinar, em relação a O, o módulo do momento de $\vec{F}$:

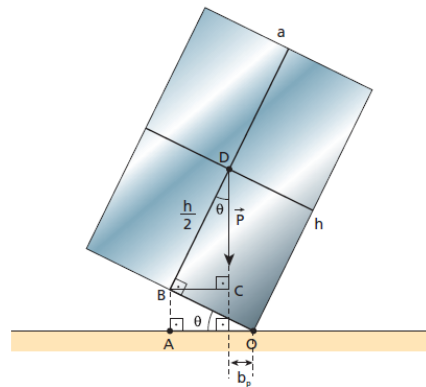


$$M_F = F b_F = F (b_1 + b_2)$$

$$M_F = F (h \cos \theta + a \sin \theta)$$

(horário)

Vamos determinar, agora, em relação a O, o módulo do momento do peso da chapa:



$$M_p = P b_p = P (\overline{OA} - \overline{BC})$$

$$M_p = P (\overline{OB} \cos \theta - \overline{BD} \sin \theta)$$

$$M_p = P \left(\frac{a}{2} \cos \theta - \frac{h}{2} \sin \theta \right)$$

(anti-horário)

$$M_p = P b_p = P (\overline{OA} - \overline{BC})$$

$$M_p = P (\overline{OB} \cos \theta - \overline{BD} \sin \theta)$$

$$M_p = P \left(\frac{a}{2} \cos \theta - \frac{h}{2} \sin \theta \right)$$

(anti-horário)

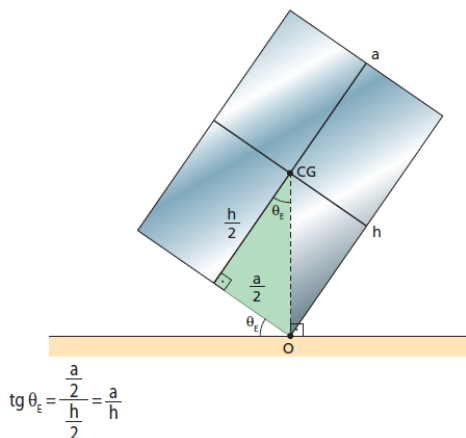
Do equilíbrio de rotação da chapa:

$$M_F = M_p \Rightarrow$$

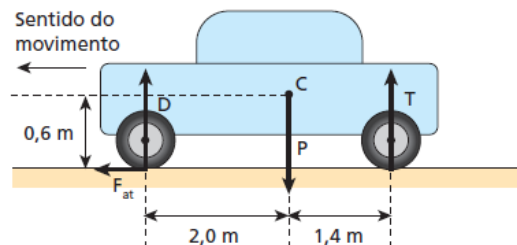
$$F (h \cos \theta + a \sin \theta) = \frac{P}{2} (a \cos \theta - h \sin \theta)$$

$$F = \frac{P}{2} \left(\frac{a \cos \theta - h \sin \theta}{h \cos \theta + a \sin \theta} \right)$$

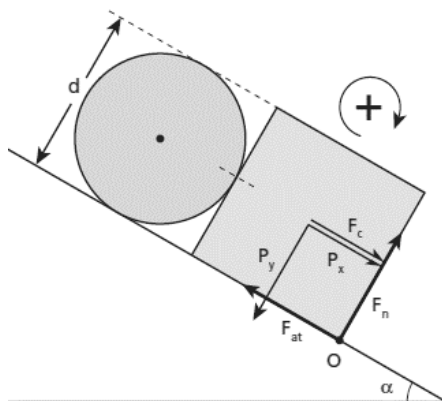
- b) Na posição de equilíbrio (no caso, instável), a vertical traçada pelo centro de gravidade da chapa deve passar pelo ponto de apoio O:



29.



30.



Quando o bloco está na iminência de tomar, a força normal que ele recebe do plano está aplicada em O. Na figura, P_x e P_y são as intensidades dos componentes do peso do bloco e F_c (também igual a P_x) é a intensidade da força que o cilindro exerce no bloco. Em relação a O, temos:

$$(F_c + P_x) \frac{d}{2} - P_y \frac{d}{2} = 0$$

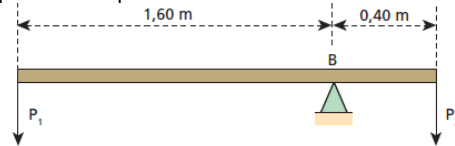
$$2mg \sin \alpha \frac{d}{2} = mg \cos \alpha \frac{d}{2}$$

$$\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = 2 \Rightarrow \cotg \alpha = 2$$

31. Resolução:

• Analisando o sistema, nas condições da figura dada, constatamos que ele não se encontra em equilíbrio: a barra vai tomar, girando no sentido horário.

- A quantidade mínima pedida fica determinada considerando-se o sistema em equilíbrio, apoiado apenas no suporte B:



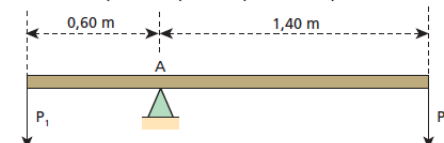
$$P_2 \cdot 0,40 = P_1 \cdot 1,60 \Rightarrow P_2 = 4 P_1$$

$$V_2 = 4 V_1, \text{ em que } V_1 \text{ e } V_2 \text{ são volumes.}$$

$$\left. \begin{array}{l} V_2 = 4 V_1 \\ V_2 + V_1 = 60 \end{array} \right\} \Rightarrow V_1 = 12 \ell \text{ e } V_2 = 48 \ell$$

Portanto, 2ℓ de água devem ser transferidos da direita para a esquerda.

A quantidade máxima pedida fica determinada considerando-se o sistema em equilíbrio, apoiado apenas no suporte A:



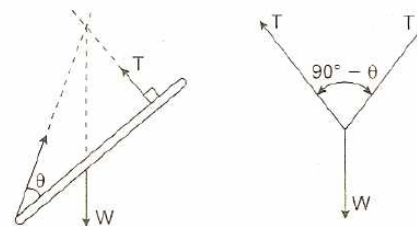
$$P_2 \cdot 1,40 = P_1 \cdot 0,60 \Rightarrow V_2 \cdot 1,40 = V_1 \cdot 0,60 \Rightarrow 7V_2 = 3V_1$$

$$\left. \begin{array}{l} 7V_2 = 3V_1 \\ V_2 + V_1 = 60 \end{array} \right\} \Rightarrow V_2 = 18 \ell \text{ e } V_1 = 42 \ell$$

Portanto, 32ℓ de água devem ser transferidos da direita para a esquerda.

32.

Resolução:



Realizamos el DCL de la viga y haciendo concurrir en un punto las fuerzas:

Pero: $\Sigma \vec{F} = 0$, entonces, se cumple que:

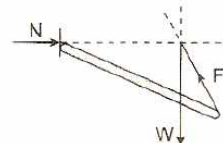
$$W^2 = T^2 + T^2 + 2T^2 \cos(90^\circ - \theta)$$

Reemplazando los datos se obtiene: $\theta = 30^\circ$

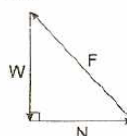
33.

Resolución:

Diagrama de cuerpo libre, de la barra:



Equilíbrio de traslación: fuerza resultante igual a zero.



Teorema de Pitágoras:

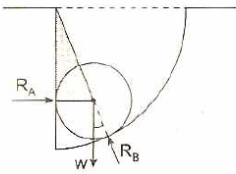
$$F^2 = W^2 + N^2$$

$$F^2 = 144 + 25$$

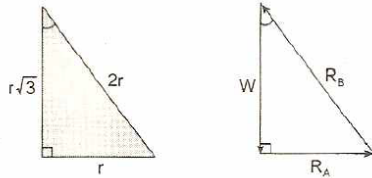
$$\therefore F = 13 \text{ N}$$

34.

Resolución:



DCL (esfera):
Semejanza de triángulos:

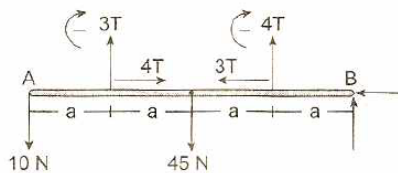


$$\frac{R_A}{r} = \frac{W}{r\sqrt{3}} \quad \therefore R_A = 2\sqrt{3} \text{ N}$$

35.

Resolución:

Haciendo DCL de la barra:



Por 2.ª condición de equilibrio:

$$\Sigma M_B \uparrow = \Sigma M_B \downarrow$$

$$10(4a) + 45(2a) = 3T(3a) + 4T(a)$$

$$T = 10 \Rightarrow 5T = 50 \text{ N}$$

Debemos aclarar que hemos asumido, por conveniencia que la tensión de la cuerda es 5T.

36.

Resolución:

Haciendo DCL del bloque Q y aplicando la primera condición de equilibrio:

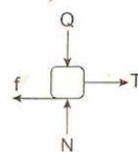
$$\Sigma F_y = \Sigma F_y$$

$$N = Q$$

$$\Sigma F_x = \Sigma F_x$$

$$T = 0,8N$$

$$\Rightarrow T = 0,8Q \quad \dots(I)$$

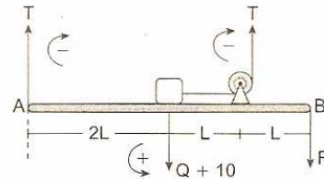


Haciendo DCL de todo el sistema y aplicando la segunda condición de equilibrio:

$$\Sigma M_B \uparrow = \Sigma M_B \downarrow$$

$$(Q + 10)(2L) = T(4L) + T(L)$$

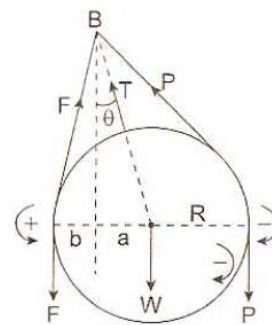
$$\Rightarrow 2Q + 20 = 5T \quad \dots(II)$$



Reemplazando (I) en (II):

$$2Q + 20 = 4Q \quad \therefore Q = 10 \text{ N}$$

37.



$$\Sigma M_B = 0$$

$$M_B^F = M_B^W + M_B^P$$

$$Fb = Wa + P(a + R) \quad \dots(1)$$

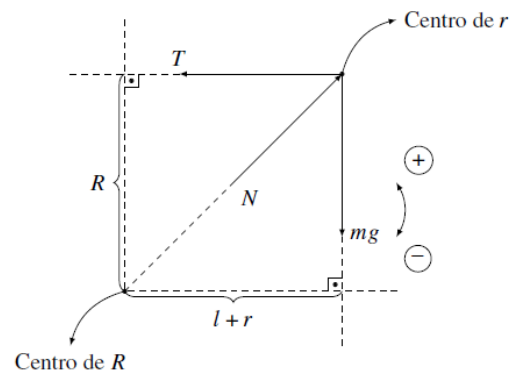
$$\text{Pero: } BM = MO = R$$

$$a = 2R \sin \theta \quad \wedge \quad b = R(1 - 2 \sin \theta)$$

$$\sin \theta = \frac{1}{7}$$

$$\text{Reemplazando en (1): } F = 16 \text{ N}$$

38. Tomando o centro da esfera maior como polo, temos

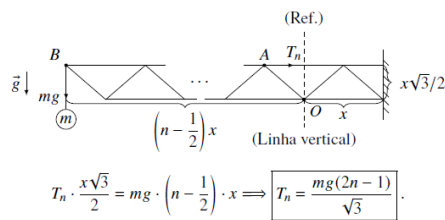


$$TR - mg(l+r) = 0 \Rightarrow T = \frac{mg(r+l)}{R}$$

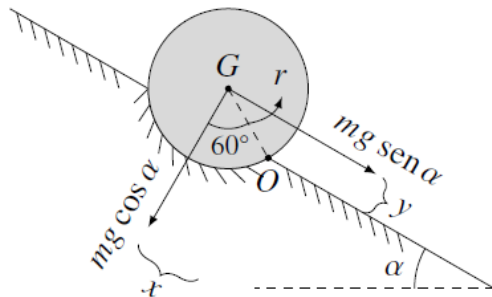
39.

Alternativa A

Para o polo O , vem



40.



Decompondo o peso da esfera nas direções tangencial e normal ao plano, temos a figura abaixo. O torque gerado por $mg \sin \alpha$, em relação a O , deve superar o feito por $mg \cos \alpha$. Então:

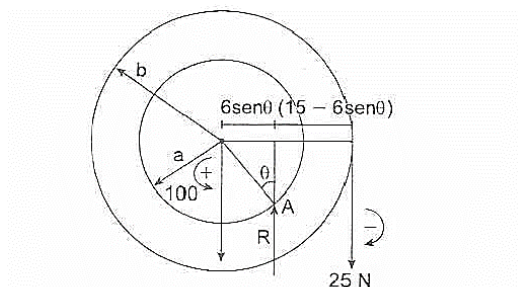
$$mgy \sin \alpha > mgx \cos \alpha$$

$$\operatorname{tg} \alpha > \frac{x}{y}$$

$$\operatorname{tg} \alpha > \frac{r \sin 60^\circ}{r \cos 60^\circ}$$

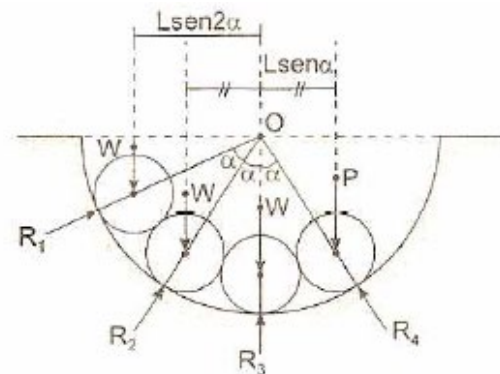
$$\operatorname{tg} \alpha > \operatorname{tg} 60^\circ \Rightarrow \alpha > \frac{\pi}{3}$$

41.



La sumatoria de momentos, respecto del punto A es igual a cero: $\Sigma M_A = 0 \Rightarrow M_A^{100} = M_A^{25}$
 $100(6 \operatorname{sen} \theta) = 25(15 - 6 \operatorname{sen} \theta)$
 $24 \operatorname{sen} \theta = 15 - 6 \operatorname{sen} \theta$
 $\operatorname{sen} \theta = 1/2 \quad \therefore \theta = 30^\circ$

42.



La suma de momentos respecto del centro de curvatura O es igual a cero: $\Sigma M_O = 0$

$$M_O^P = M_O^A + M_O^B + M_O^C$$

$$P(L \operatorname{sen} \alpha) = W(L \operatorname{sen} 2 \alpha) + W(L \operatorname{sen} \alpha) + 0$$

$$\Rightarrow P \operatorname{sen} \alpha = 2W \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha + W \operatorname{sen} \alpha$$

$$P = W(1 + 2 \cos \alpha) \quad \dots (I)$$

En el triángulo isósceles formado:

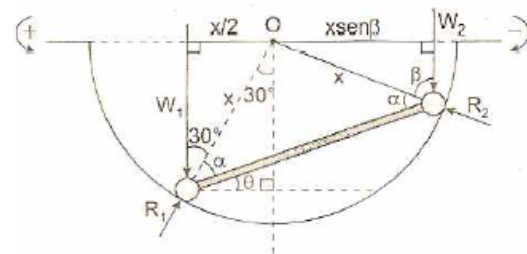


$$\text{Ley de cosenos: } \cos \alpha = \frac{7}{8}$$

Reemplazando en (I):

$$P = \frac{11}{4}W \Rightarrow P = 11 \text{ N}$$

43.



De la segunda condición de equilibrio:

$$\Sigma M_O = 0 \Rightarrow M_O^{W_1} = M_O^{W_2}$$

$$(6) \frac{x}{2} = 5(x \operatorname{sen} \beta) \Rightarrow \operatorname{sen} \beta = \frac{3}{5} \Rightarrow \beta = 37^\circ$$

Del diagrama del cuerpo libre:

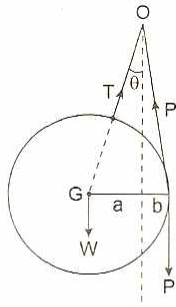
$$30^\circ + \alpha + \theta = 90^\circ \quad \dots (I)$$

$$(\alpha - \theta) + \beta = 90^\circ \quad \dots (II)$$

$$\text{De (I) - (II): } \theta = \frac{\beta - 30^\circ}{2}$$

Reemplazando el valor de β : $\theta = 3,5^\circ$

44.



$$a = 100\sin\theta \quad \wedge \quad b = 60 - 100\sin\theta$$

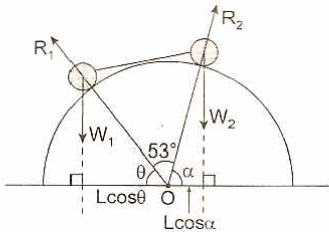
La suma de momentos respecto del punto O es igual a cero:

$$\Sigma M_O = 0 \Rightarrow M_O^W = M_O^T$$

$$Wa = Pb \Rightarrow 2(100\sin\theta) = 10(60 - 100\sin\theta)$$

$$\sin\theta = 1/2 \Rightarrow \theta = 30^\circ$$

45.



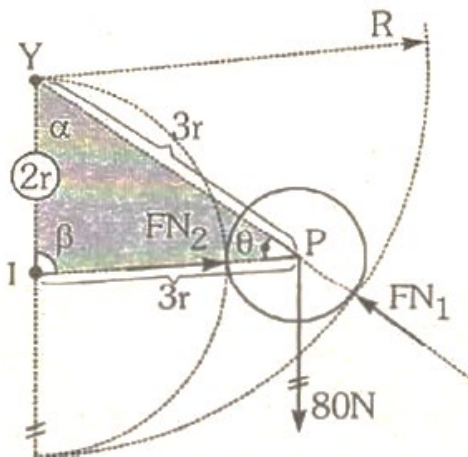
La suma de momentos, respecto del centro de curvatura O, es igual a cero: $\Sigma M_O = 0$

$$M_O^{W1} = M_O^{W2} \quad \wedge \quad W_1(L\cos\theta) = W_2(L\cos\alpha)$$

$$15\cos\theta = 7\cos(127^\circ - \theta) \Rightarrow 15\cos\theta = 7\sin(\theta - 37^\circ)$$

$$\tan\theta = \frac{24}{7} \quad \therefore \theta = 74^\circ$$

46.

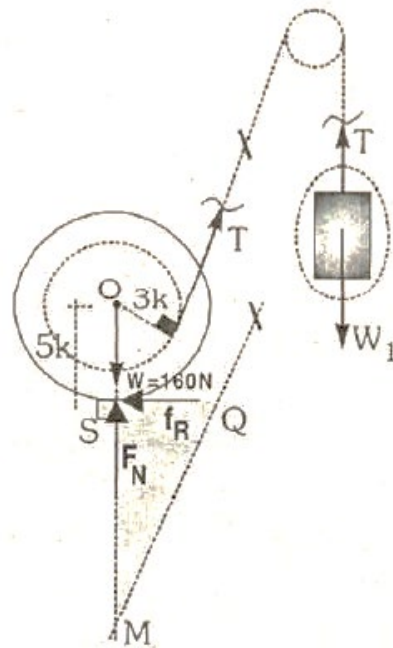


$$\Delta ABC \sim \Delta IYP$$

$$\frac{F_{N2}}{3r} = \frac{80N}{2r}$$

$$\therefore F_{N2} = 120N$$

47.



$$\Rightarrow \Sigma M_O(\curvearrowright) = \Sigma M_O(\curvearrowleft)$$

$$f_R(5k) = T(3k)$$

$$\frac{f_R}{T} = \frac{3}{5} \dots (1)$$

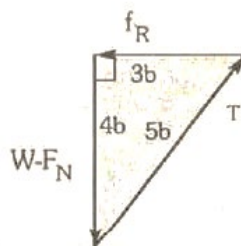
$$\mu_s = \frac{1}{4} = \frac{f_R}{F_N} \dots (2)$$

De (1) $\wedge$ (2).

$$f_R = 3b; T = 5b$$

$$F_N = 12b$$

• En el D.C.L. del cilindro; tomando como referencia el Δ MSQ:



Del Δ :

$$\Rightarrow W - F_N = 4b \rightarrow W = 16b$$

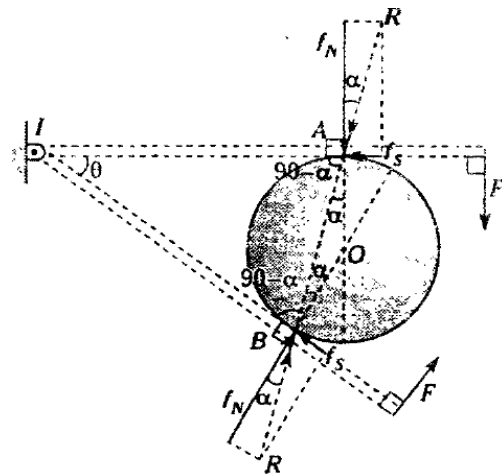
$$\rightarrow 16b = 160$$

$$\rightarrow b = 10N$$

$$\Rightarrow 5b = T \rightarrow T = 50N$$

$$\therefore \boxed{W_1 = 50N}$$

48.



Ao decompor a reação por parte de ambos os planos, notamos que:

$$f_s = f_N \tan \alpha$$

Agora, também deve ser cumprido que:

à

$$f_s \leq f_{s(\text{máx})}$$

$$f_N \tan \alpha \leq \mu_s f_N$$

$$\Rightarrow \mu_s \geq \tan \alpha \quad (1)$$

Bastaria encontrar uma relação entre θ e α .

Do ΔIAB :

$$\theta + (90 - \alpha) + (90 - \alpha) = 180$$

$$\therefore \alpha = \frac{\theta}{2}$$

Substituindo em (1):

$$\boxed{\mu_s \geq \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

49.

i) Determinamos $\vec{F}$:

$$\overrightarrow{BC} = \vec{C} - \vec{B}$$

$$\overrightarrow{BC} = (3; 0; 4) - (5; 6; 1)$$

$$\overrightarrow{BC} = (-; 2; -63)$$

$$\frac{\vec{BC}}{|\vec{BC}|} = \frac{-2\vec{i} - 6\vec{j} + 3\vec{k}}{\sqrt{(-2)^2 + (-6)^2 + 3^2}} = \frac{-2\vec{i} - 6\vec{j} + 3\vec{k}}{7}$$

$$\vec{F} = \frac{\vec{BC}}{|\vec{BC}|} \cdot 210 \text{ N}$$

$$\vec{F} = -60\vec{i} - 180\vec{j} + 90\vec{k} \text{ N}$$

ii) Calculamos el vector posición $\vec{r}$ de un punto de la línea de acción de la fuerza $\vec{F}$. En nuestro caso elegimos el punto C (en la Fig. 7, se tiene A).

$$\vec{r} = \vec{OB}$$

$$\vec{r} = 5\vec{i} + 6\vec{j} + 1\vec{k} \text{ m}$$

iii) Finalmente determinamos el momento de la fuerza $\vec{F}$ respecto del punto A (origen de coordenadas), para lo cual aplicamos la ecuación vectorial:

$$\vec{\tau}_A = \vec{r} \times \vec{F}$$

$$\vec{\tau}_A = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 5 & 6 & 1 \\ -60 & -180 & 90 \end{vmatrix} \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$\vec{\tau}_A = 720\vec{i} - 510\vec{j} - 540\vec{k} \text{ N} \cdot \text{m}$$

Rpta. B

50.

• Aplicando la primera condición de equilibrio, en las direcciones de los ejes X e Y, tenemos:

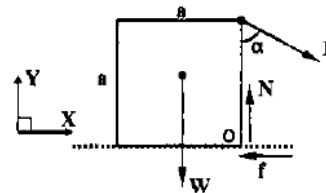
$$\sum \vec{F}_x = 0 \Rightarrow F \sin \alpha = \mu N \quad (1)$$

$$\sum \vec{F}_y = 0 \Rightarrow N = W + F \cos \alpha \quad (2)$$

De (2) en (1):

$$F \sin \alpha = \mu (W + F \cos \alpha) \quad (3)$$

Representación de las fuerzas que actúan sobre el cubo.



Ahora, aplicando la segunda condición de equilibrio, respecto del punto O, tenemos:

$$\sum \vec{M}_O = 0$$

$$(F \sin \alpha)(a) = (W) \left(\frac{a}{2} \right)$$

$$F \sin \alpha = \frac{W}{2} \quad (4)$$

De (3) y (4), obtenemos:

$$\frac{W}{2} = \mu (W + F \cos \alpha)$$

$$F \cos \alpha = W \left(\frac{1}{2\mu} - 1 \right)$$

$$F^2 \cos^2 \alpha = W^2 \left(\frac{1}{2\mu} - 1 \right)^2$$

$$F^2 = F^2 \sin^2 \alpha + W^2 \left(\frac{1}{2\mu} - 1 \right)^2$$

$$F^2 = \left(\frac{W}{2} \right)^2 + W^2 \left(\frac{1}{2\mu} - 1 \right)^2$$

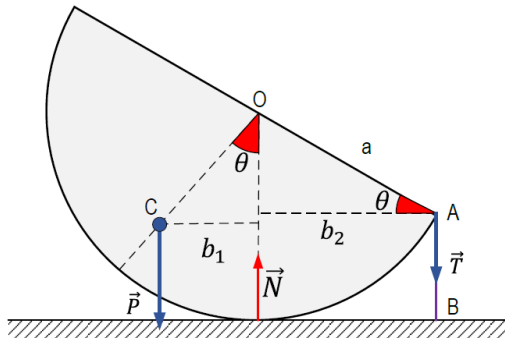
$$F = \left[\left(\frac{1}{2\mu} - 1 \right)^2 + \left(\frac{1}{2} \right)^2 \right]^{1/2} W$$

$$F = \left[\left(\frac{1}{2(1/2)} - 1 \right)^2 + \left(\frac{1}{2} \right)^2 \right]^{1/2} (100) \quad (100)$$

$$F = 50 \text{ N (D)}$$

51.

- Peso que atua no seu centro de gravidade;
- Força normal trocada com o solo;
- Força de tração aplicada no ponto A;



Da geometria da figura:

$$\begin{cases} b_2 = a \cdot \cos \theta \\ b_1 = OC \cdot \sin \theta \end{cases}$$

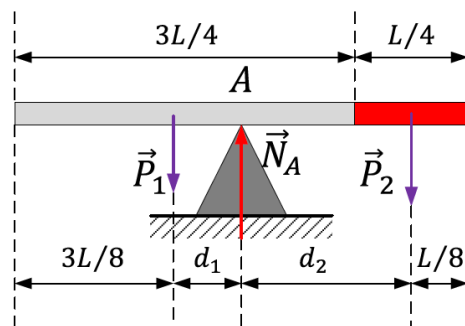
Para que haja equilíbrio em relação ao ponto de apoio, podemos escrever:

$$P \cdot b_1 = T \cdot b_2$$

$$P \cdot (OC \cdot \sin \theta) = T \cdot (a \cdot \cos \theta)$$

$$T = P \cdot \frac{OC}{a} \cdot \operatorname{tg} \theta$$

52.



Do enunciado temos:

$$\begin{cases} L_1 + L_2 = L \\ L_1 = 3L_2 \end{cases} \therefore \begin{cases} L_2 = \frac{L}{4} \\ L_1 = \frac{3L}{4} \end{cases}$$

Além disso:

$$\begin{cases} d_1 = \frac{L}{2} - \frac{3L}{8} = \frac{L}{8} \\ d_2 = \frac{L}{2} - \frac{L}{8} = \frac{3L}{8} \end{cases}$$

As massas de cada parte da barra serão dadas por:

$$m_1 = \rho_1 \cdot A \cdot L_1 = \rho_1 \cdot A \cdot \frac{3L}{4}$$

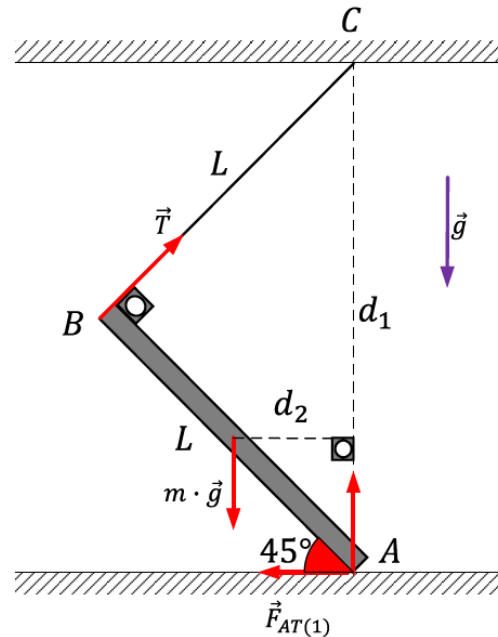
$$m_2 = \rho_2 \cdot A \cdot L_2 = \rho_2 \cdot A \cdot \frac{L}{4}$$

Para o equilíbrio da haste, a soma dos torques em relação ao ponto A deve ser nula, logo:

$$P_1 \cdot d_1 = P_2 \cdot d_2$$

$$\rho_1 \cdot A \cdot \frac{3L}{4} \cdot g \cdot \frac{L}{8} = \rho_2 \cdot A \cdot \frac{L}{4} \cdot g \cdot \frac{3L}{8} \therefore \frac{\rho_1}{\rho_2} = 1$$

53



Pela figura, temos:

$$\begin{cases} d_1 = L \cdot \sqrt{2} \\ d_2 = \frac{L}{2 \cdot \sqrt{2}} \end{cases}$$

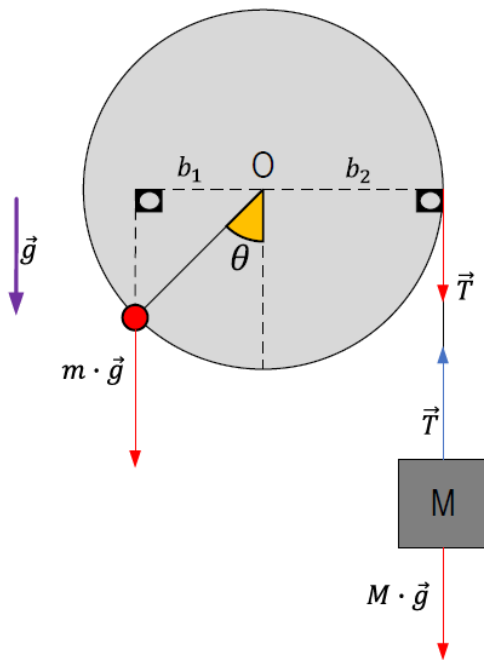
Pela condição de equilíbrio de rotação, podemos escrever:

$$P \cdot d_2 = F_{AT} \cdot d_1$$

$$P \cdot \frac{L}{2 \cdot \sqrt{2}} = F_{AT} \cdot L \cdot \sqrt{2}$$

$$F_{AT} = \frac{P}{4}$$

54



Para garantir o equilíbrio de M , devemos ter:

$$T = M \cdot g$$

Para garantir o equilíbrio de rotação da polia em torno do ponto O , temos:

ÁÁ

$$\sum |\vec{\tau}_{\text{HORÁRIO}}| = \sum |\vec{\tau}_{\text{ANTI-HORÁRIO}}|$$

$$m \cdot g \cdot b_1 = T \cdot b_2$$

Note que:

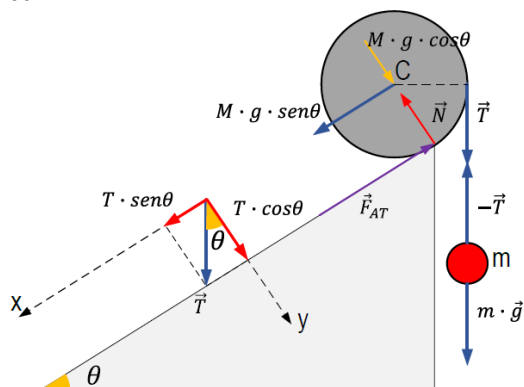
$$\begin{cases} b_1 = R \cdot \sin\theta \\ b_2 = R \end{cases}$$

Finalmente:

$$m \cdot g \cdot b_1 = T \cdot b_2 \Rightarrow m \cdot g \cdot R \cdot \sin\theta = M \cdot g \cdot R$$

$$\frac{m}{M} = \frac{1}{\sin\theta}$$

55



Para garantir o equilíbrio de m , devemos ter:

$$T = m \cdot g$$

A componente da força de tração ao longo do plano inclinado é dada por:

$$T_x = T \cdot \sin\theta = m \cdot g \cdot \sin\theta$$

A força resultante sobre o cilindro ao longo do plano inclinado é nula, assim:

$$F_{AT} = M \cdot g \cdot \sin\theta + T_x$$

$$F_{AT} = M \cdot g \cdot \sin\theta + m \cdot g \cdot \sin\theta$$

O torque resultante em torno do centro C do cilindro será nula, assim:

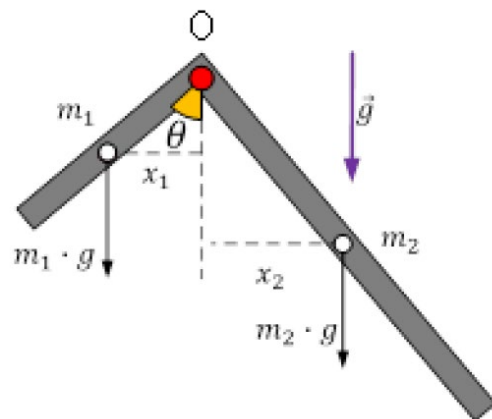
$$\sum |\vec{\tau}_{\text{HORÁRIO}}| = \sum |\vec{\tau}_{\text{ANTI-HORÁRIO}}|$$

$$T \cdot R = F_{AT} \cdot R$$

$$m \cdot g = M \cdot g \cdot \sin\theta + m \cdot g \cdot \sin\theta$$

$$m = \frac{M \cdot \sin\theta}{1 - \sin\theta}$$

56



A linha vertical que passa pelo centro de massa do sistema, deve estar posicionada sobre a estaca O . Primeiramente determinaremos a massa de cada haste. A haste de comprimento L possui uma massa m_1 e a haste de comprimento $2L$ possui uma massa m_2 , logo:

$$\begin{cases} m_1 = \lambda \cdot L \\ m_2 = \lambda \cdot 2L \end{cases}$$

A soma dos torques exercida por cada haste em relação ao eixo O deve ser nula, assim:

$$m_1 \cdot x_1 = m_2 \cdot x_2$$

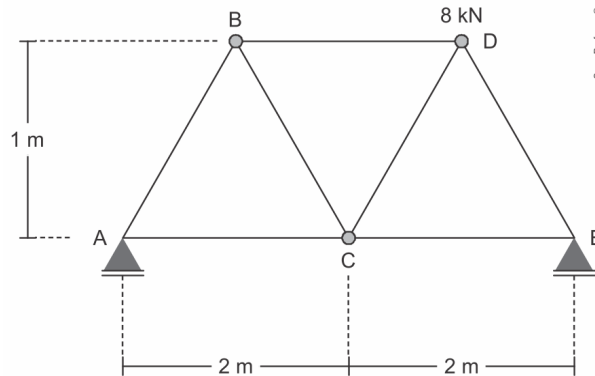
$$m_1 \cdot \left[\frac{L}{2} \cdot \sin\theta \right] = m_2 \cdot \left[\frac{2L}{2} \cdot \sin(90^\circ - \theta) \right]$$

$$\lambda \cdot L \cdot \left[\frac{L}{2} \cdot \sin\theta \right] = \lambda \cdot 2L \cdot \left[\frac{2L}{2} \cdot \cos(\theta) \right]$$

$$\tan\theta = 4$$

Exercícios de treliças

1. (Ime)

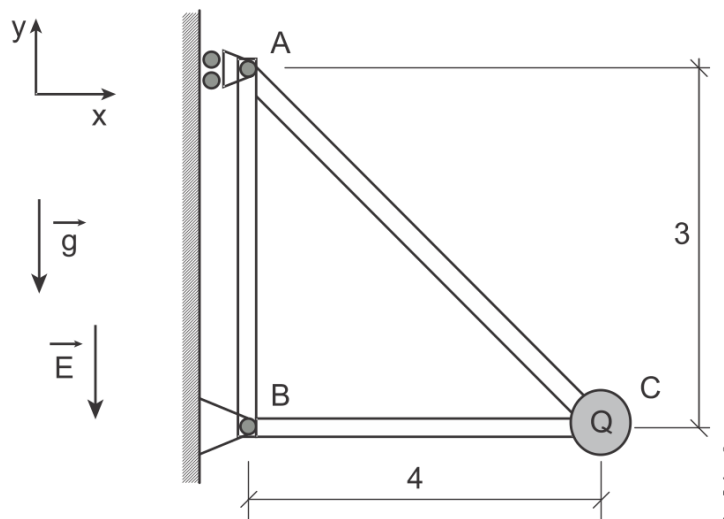


A treliça estável da figura, composta por barras metálicas formando 3 triângulos isósceles, é apoiada nos pontos A e E. No ponto D é aplicada uma força vertical, de cima para baixo, de 8 kN.

Diante do exposto, determine.:

- as reações de apoio nos pontos A e E;
- as cargas a que são submetidas as barras AB, AC, CE e DE, além da natureza de cada uma delas (tração ou compressão);
- as cargas a que são submetidas as barras BC e CD, além da natureza de cada uma delas (tração ou compressão).

2. (Ime)



A figura apresenta uma estrutura formada pelas barras AB, BC e CA. Essa estrutura está apoiada na parede vertical nos pontos A e B. O apoio A permite reações apenas na direção do eixo x, enquanto o apoio B permite reações nas direções dos eixos x e y. Na extremidade C da estrutura está posicionada uma partícula de carga Q e massa M. A estrutura está em uma região do espaço submetida a um campo elétrico vertical de módulo E e sentido de cima para baixo.

Dados:

- comprimento da barra BC: 4 m;
- comprimento da barra AB: 3 m;

- massa da barra BC: 2,5 kg;
- massa da partícula: $M = 0,3 \text{ kg}$;
- carga da partícula: $Q = -5 \text{ C}$;
- intensidade do campo elétrico: $4,6 \text{ N/C}$;
- aceleração da gravidade: $g = 10 \text{ m/s}^2$.

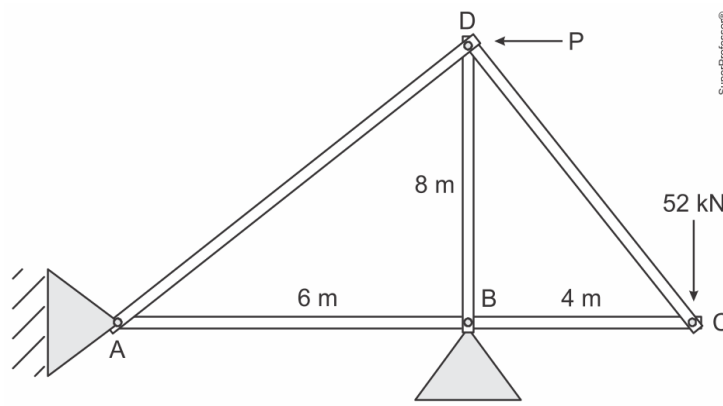
Observações:

- os apoios não admitem torque;
- as massas das barras AB e AC são desprezíveis;
- a distribuição de massa da barra BC é uniforme.

O módulo da reação no apoio A, em N, é aproximadamente:

- a) 10
- b) 17
- c) 19
- d) 21
- e) 23

3. (Ime)



O guindaste da figura é montado com o auxílio da barra vertical BD, das barras horizontais AB e BC e das barras inclinadas AD e CD. O apoio A resiste a forças horizontais e verticais, enquanto o apoio B resiste apenas às forças verticais. Sabe-se que a reação normal no apoio B é 60 kN de baixo para cima e que são aplicadas forças externas indicadas nos pontos C e D.

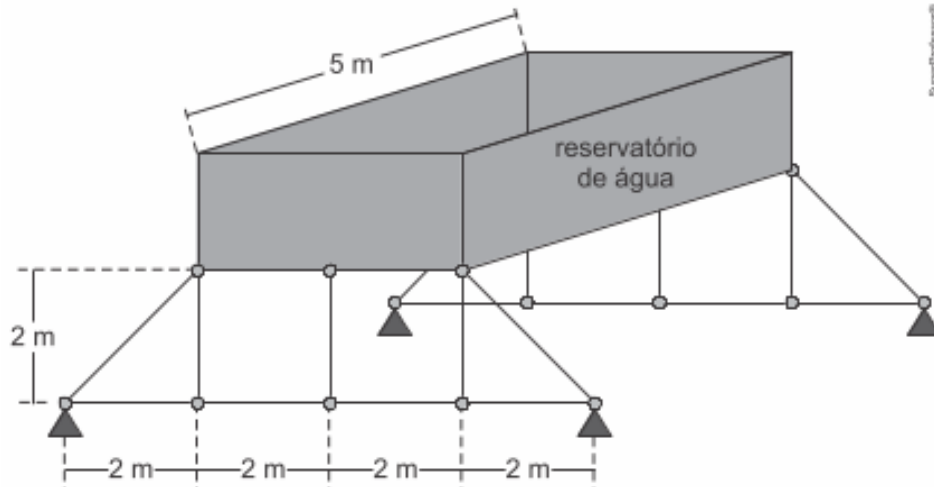
Observações:

- as barras são rígidas e possuem massa desprezível;
- a força P no ponto D é horizontal e a força de 52 kN no ponto C é vertical.

Na condição de equilíbrio, determine:

- a) a força horizontal P;
- b) o módulo da reação no apoio A;
- c) a força atuante na barra AD, discriminando se é de tração ou compressão.

4. (Ime)



Um reservatório com $4\text{m} \times 5\text{m}$ de base retangular contém 1.000 L de água. Duas treliças iguais em planos paralelos verticais o sustentam na configuração mostrada na figura acima, por meio de quatro apoios que estão representados por pequenos triângulos. No instante $t = 0$, a água passa a entrar no reservatório a uma vazão de $2\text{ m}^3/\text{min}$.

Dados:

- área transversal de cada barra das treliças: $0,04\text{ m}^2$;
- pressão de ruptura de cada barra das treliças: 1 MPa ;
- $\sqrt{2} \approx 1,4$;
- aceleração da gravidade: 10 m/s^2 ;
- massa específica da água: 1.000 kg/m^3 ;

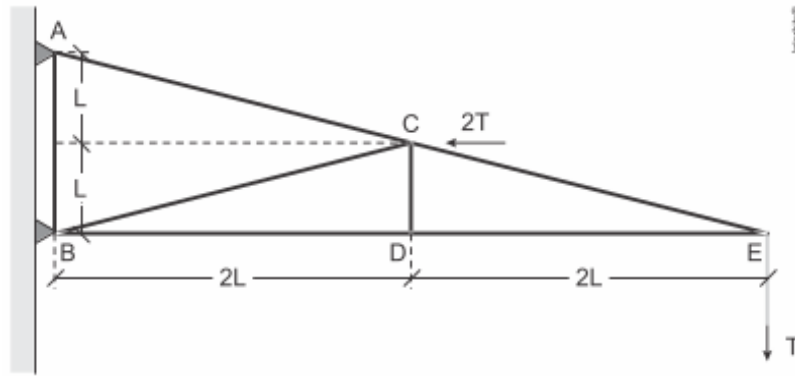
Observações:

- os quatro apoios do reservatório de água estão num mesmo plano horizontal;
- as paredes laterais do reservatório de água estão contidas em planos verticais;
- despreze o peso do reservatório;
- a pressão em cada barra das treliças é constante em sua área;
- cada treliça é indeformável e apenas pode se romper quando alguma pressão de ruptura for atingida.

Mediante os dados apresentados, determine:

- a) o módulo da tensão em cada uma das barras das treliças na iminência do primeiro rompimento de barra devido ao aumento do peso acumulado no reservatório;
- b) o instante t em que ocorre o primeiro rompimento de barra.

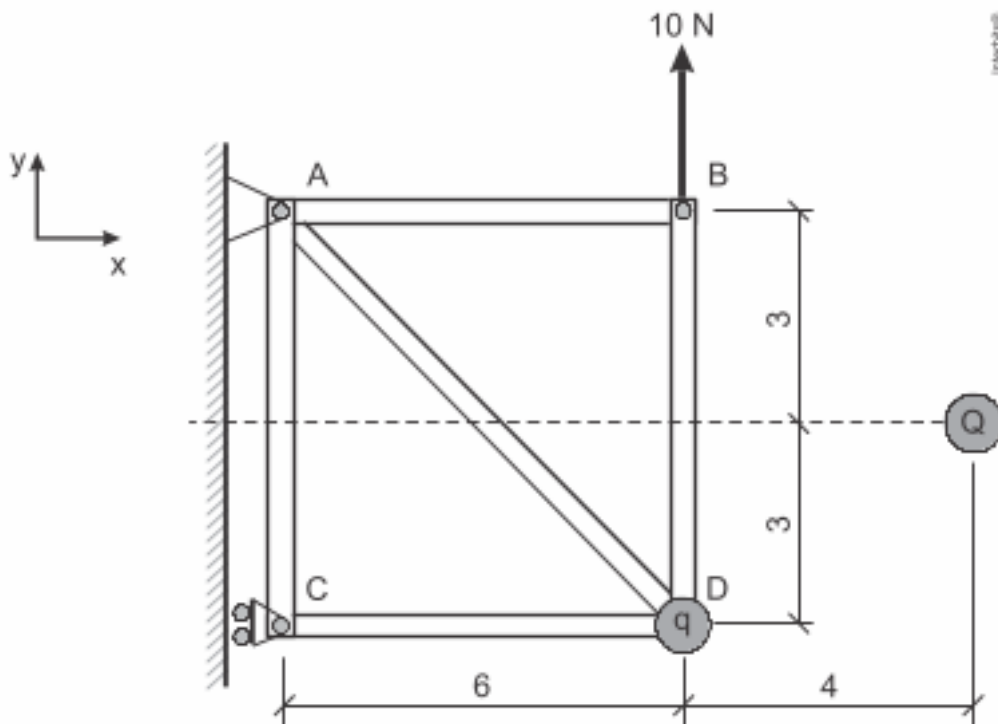
5. (Ime)



Uma estrutura rígida (treliça), formada por barras de aço, encontra-se suspensa pelos pinos A e B, conforme mostrado na figura. Sabe-se que o pino A impede os movimentos vertical e horizontal e que o pino B impede o movimento horizontal. No ponto E é aplicada uma força T na direção vertical e no ponto C é aplicada uma força $2T$ na direção horizontal. Desprezando o peso próprio da estrutura, calcule, em função de T , as:

- reações nos apoios A e B; e
- forças que agem nas três barras que partem do ponto D.

6. (Ime)



A figura mostra uma estrutura composta pelas barras AB, AC, AD e CD e BD articuladas em suas extremidades. O apoio no ponto A impede os deslocamentos nas direções x e y , enquanto o apoio no ponto C impede o deslocamento apenas na direção X . No ponto D dessa estrutura encontra-se uma partícula elétrica de carga positiva q . Uma partícula elétrica de carga positiva Q encontra-se posicionada no ponto indicado na figura. Uma força de 10 N é aplicada no ponto B, conforme indicada na figura.

Para que a força de reação no ponto C seja zero, o produto $q \cdot Q$ deve ser igual a:

Observação:

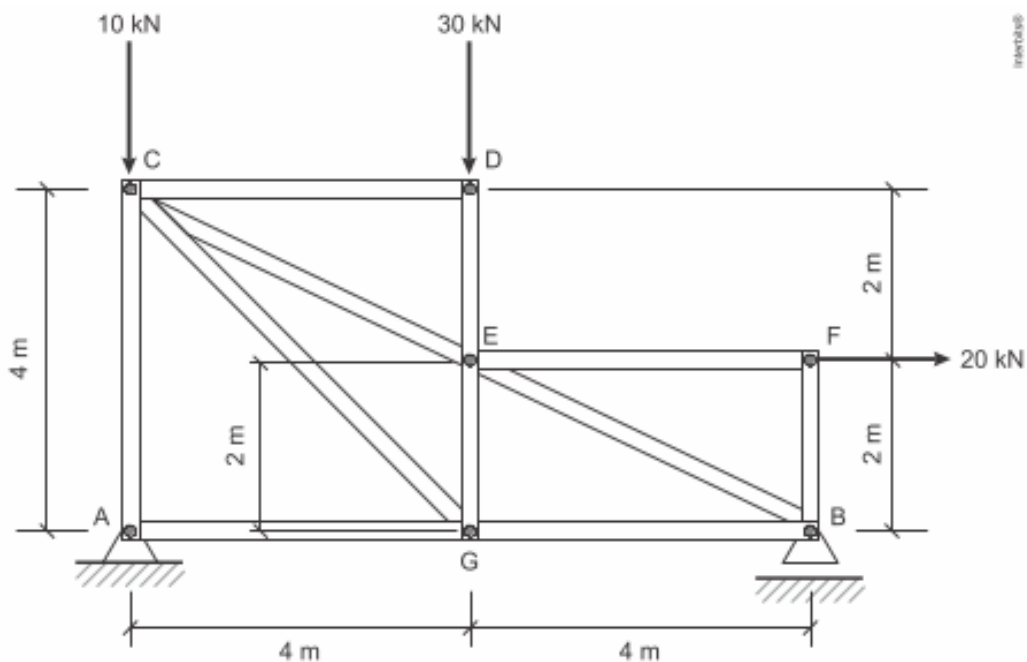
- as barras e partículas possuem massa desprezível; e
- as distâncias nos desenhos estão representadas em metros.

Dado:

- constante eletrostática do meio: k .

- $\frac{1250}{7k}$
- $\frac{125}{70k}$
- $\frac{7}{1250k}$
- $\frac{1250}{k}$
- $\frac{k}{1250}$

7. (Ime)



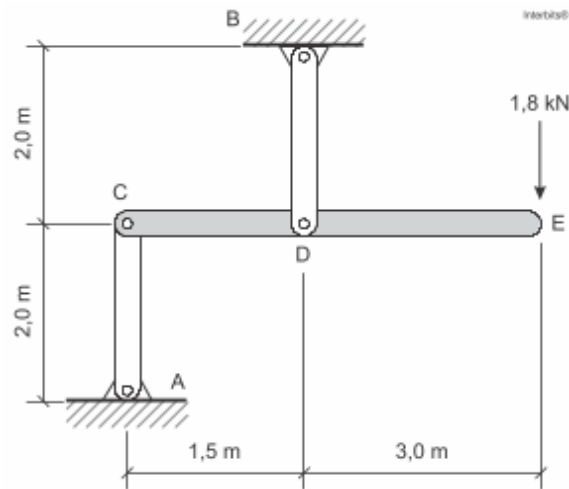
A figura acima mostra uma estrutura em equilíbrio formada por onze barras. Todas as barras têm peso desprezível. O apoio A impede deslocamentos nas direções horizontal e vertical, enquanto o apoio B somente impede deslocamentos na direção vertical. Nos pontos C e D há cargas concentradas verticais e no ponto F é aplicada uma carga horizontal.

Determine os valores das forças, em kN, a que estão submetidas as barras BG e EG.

Dados:

- $\sqrt{2} \cong 1,4$ e
- $\sqrt{5} \cong 2,2$.

8. (Ime)

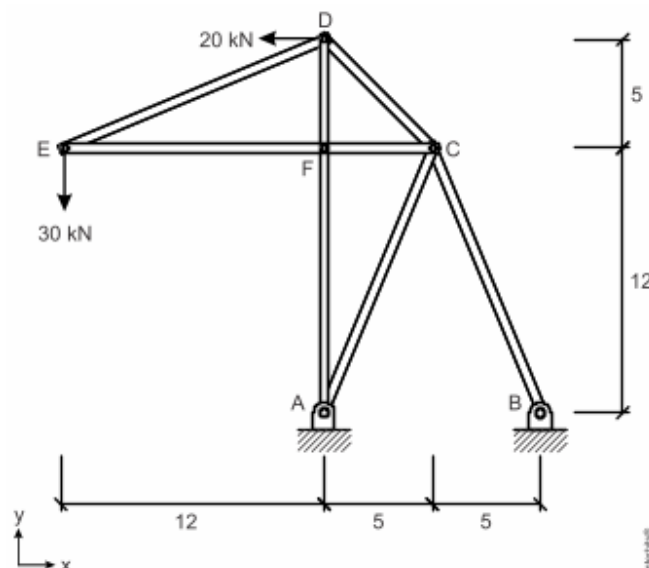


A figura acima apresenta uma estrutura em equilíbrio, formada por uma barra horizontal CE e duas barras verticais rotuladas AC e BD. Todas as barras possuem material uniforme e homogêneo e as barras AC e BD têm peso desprezível, enquanto a barra CE tem densidade linear de massa μ . Na extremidade da barra CE há uma carga concentrada vertical, de cima para baixo, de 1,8 kN. Para que a força de tração na barra BD seja 8,1 kN, a densidade linear de massa μ da barra CE em kg/m, e a força em módulo na barra AC, em kN, devem ser iguais a:

Dado: aceleração da gravidade: $g = 10 \text{ m/s}^2$.

- a) 40 e 3,6
- b) 40 e 4,5
- c) 60 e 3,6
- d) 400 e 4,5
- e) 600 e 3,5

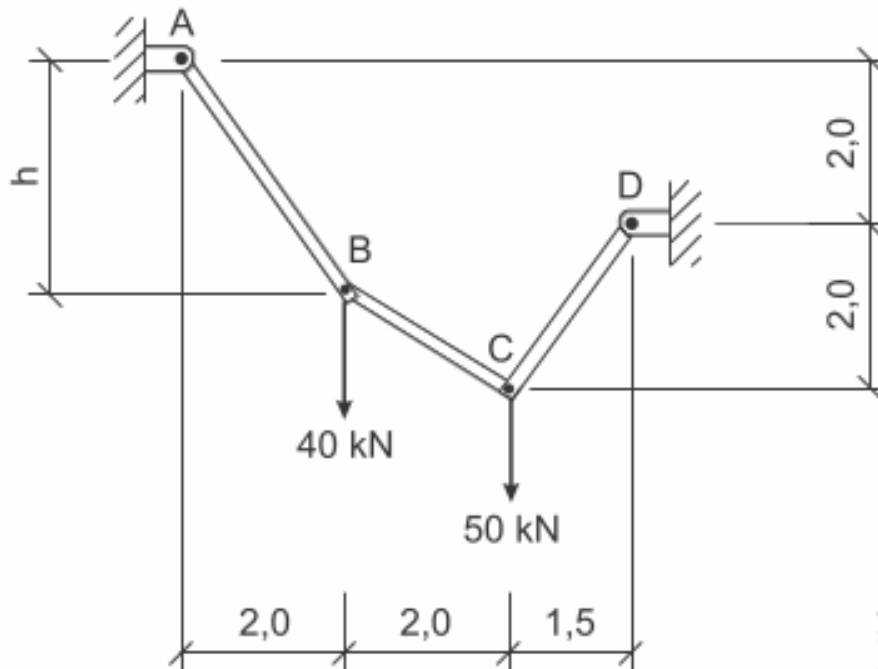
9. (Ime)



A figura acima apresenta uma estrutura em equilíbrio, formada por oito barras AC, BC, AF, CF, CD, DE, DF e EF conectadas por articulações e apoiadas nos pontos A e B. Os apoios A e B impedem as translações nas direções dos eixos x e y . Todas as barras são constituídas por material uniforme e homogêneo e possuem pesos desprezíveis. No ponto D, há uma carga concentrada, paralela à direção do eixo x , da direita para esquerda, de 20 kN, e, no ponto E existe uma carga concentrada, paralela à direção do eixo y , de cima para baixo, de 30 kN. Determine:

- as componentes da reação do apoio A em kN;
- as componentes da reação do apoio B em kN;
- as barras que possuem forças de tração, indicando os módulos destas forças em kN;
- as barras que possuem forças de compressão, indicando os módulos destas forças em kN.

10. (Ime)



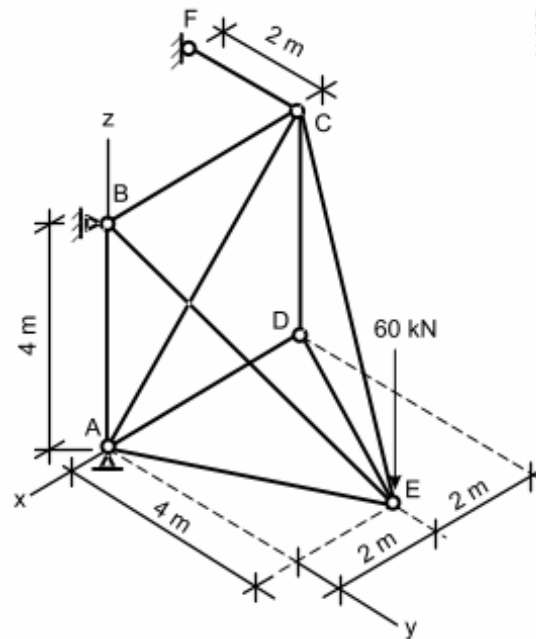
A figura acima, cujas cotas estão em metros, exibe uma estrutura em equilíbrio formada por três barras rotuladas AB, BC e CD. Nos pontos B e C existem cargas concentradas verticais. A maior força de tração que ocorre em uma barra, em kN, e a altura h , em metros, da estrutura são

Consideração:

- as barras são rígidas, homogêneas, inextensíveis e de pesos desprezíveis.

- 50,0 e 2,50
- 31,6 e 1,67
- 58,3 e 3,33
- 50,0 e 1,67
- 58,3 e 2,50

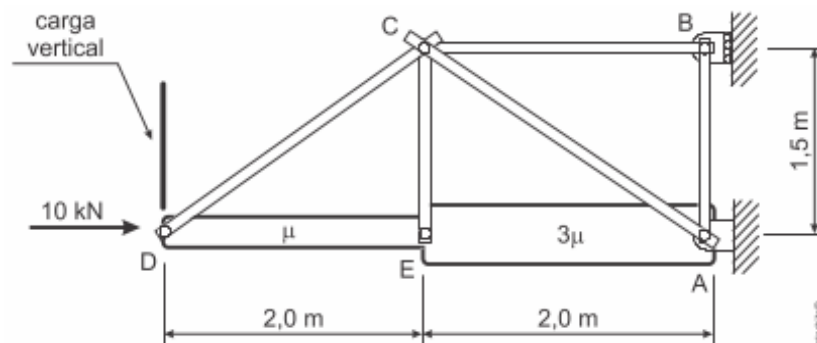
11. (lme)



A figura acima mostra uma estrutura em equilíbrio, formada por nove barras AB, AC, AD, AE, BC, BE, CD, CE e DE conectadas por articulações e apoiadas nos pontos A, B e C. O apoio A impede as translações nas direções dos eixos x , y e z . enquanto o apoio B impede as translações nas direções x e y . No ponto C, há um cabo CF que só restringe a translação da estrutura na direção do eixo y . Todas as barras possuem material uniforme e homogêneo e peso desprezível. No ponto E há uma carga concentrada, paralela ao eixo z . de cima para baixo, de 60 kN. Determine, em kN:

- a) as componentes da reação do apoio B.
- b) as componentes da reação do apoio A.
- c) o módulo da força do cabo CF.
- d) os módulos das forças das barras BE, BC, AB e AC.

12. (lme)



A figura mostra uma estrutura em equilíbrio, formada por barras fixadas por pinos. As barras AE e DE são feitas de um material uniforme e homogêneo. Cada uma das barras restantes tem massa desprezível e seção transversal circular de 16mm de diâmetro. O apoio B, deformável, é elástico e só apresenta força de reação na horizontal. No ponto D, duas cargas são aplicadas, sendo uma delas conhecida e igual a 10kN e outra na direção vertical, conforme indicadas na

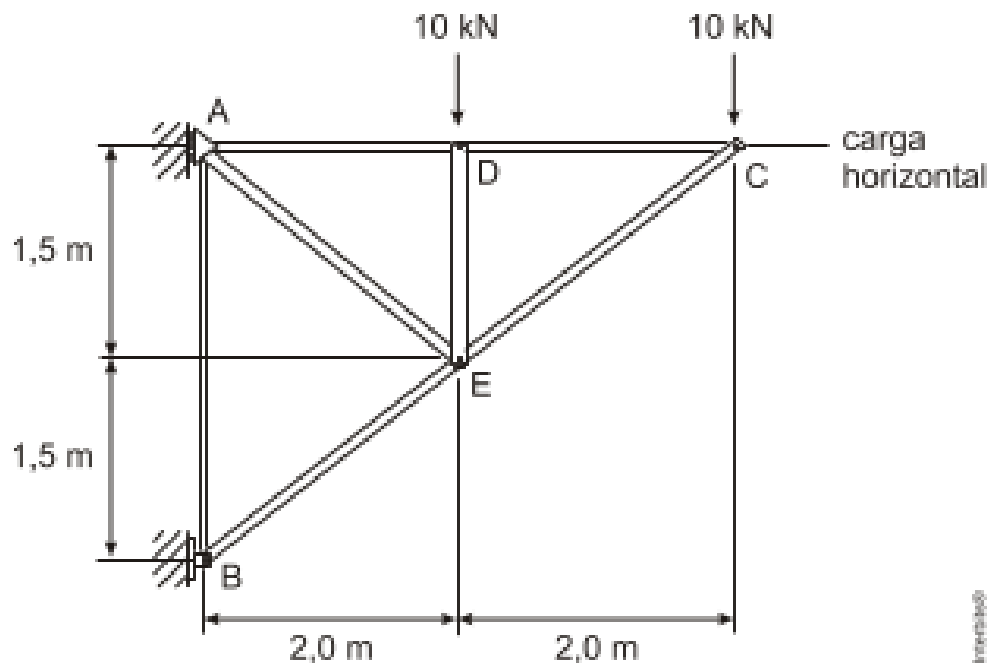
figura. Sabendo que a estrutura no ponto B apresenta um deslocamento horizontal para a esquerda de 2 cm, determine:

- a) a magnitude e o sentido da reação do apoio B;
- b) as reações horizontal e vertical no apoio A da estrutura, indicando seu sentido;
- c) a magnitude e o sentido da carga vertical concentrada no ponto B;
- d) o esforço normal (força) por unidade de área da barra BC, indicando sua magnitude e seu tipo (tração ou compressão).

Dados:

- aceleração da gravidade: $g = 10 \text{ m/s}^2$,
- densidade linear de massa: $\mu = 100 \text{ kg/m}$;
- constante elástica do apoio B: $k = 1600 \text{ kN/m}$.

13. (Ime)

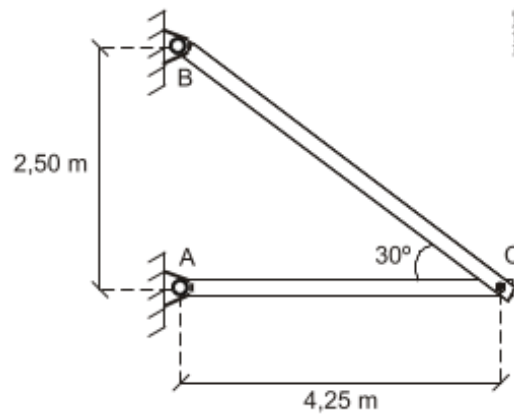


A figura acima mostra uma estrutura em equilíbrio de peso desprezível em relação ao carregamento externo. As barras desta estrutura só resistem aos esforços normais de tração ou de compressão.

Sobre o nó D há uma carga vertical concentrada de 10 kN, enquanto no nó C há uma carga vertical concentrada de 10 kN e uma carga horizontal. Sabendo que o apoio A restringe o deslocamento vertical e a força de compressão na barra AB é 5 kN, determine:

- a) a intensidade, em kN, e o sentido da carga horizontal no nó C;
- b) as reações de apoio, em kN, nos nós A e B, indicando suas direções e sentidos;
- c) as barras que estão tracionadas, indicando suas magnitudes em kN;
- d) as barras que estão comprimidas, indicando suas magnitudes em kN,

14. (Ime)



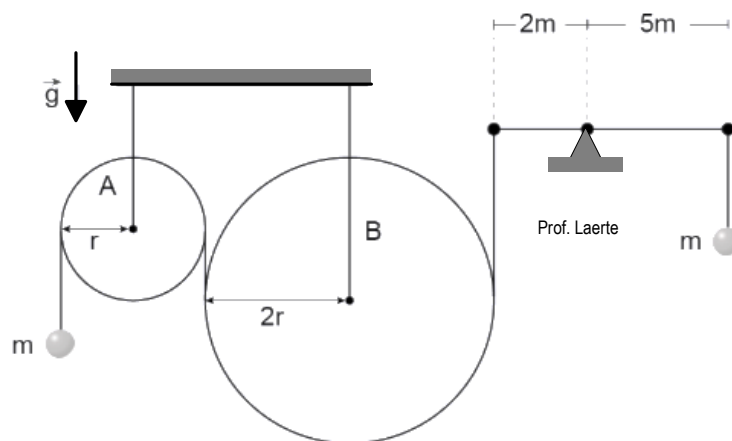
A figura mostra duas barras AC e BC que suportam, em equilíbrio, uma força F aplicada no ponto C. Para que os esforços nas barras AC e BC sejam, respectivamente, 36 N (compressão) e 160 N (tração), o valor e o sentido das componentes vertical e horizontal da força F devem ser:

Observação:

Despreze os pesos das barras e adote $\sqrt{3} = 1,7$.

- a) $80 \text{ N}(\downarrow), 100 \text{ N}(\rightarrow)$
- b) $100 \text{ N}(\downarrow), 80 \text{ N}(\rightarrow)$
- c) $80 \text{ N}(\uparrow), 100 \text{ N}(\leftarrow)$
- d) $100 \text{ N}(\uparrow), 80 \text{ N}(\leftarrow)$
- e) $100 \text{ N}(\downarrow), 80 \text{ N}(\leftarrow)$

15.



A figura mostra duas roldanas presas ao teto por hastes verticais, duas partículas de massa m e uma barra horizontal funcionando como uma "gangorra". O sistema está inicialmente em repouso.

Dado:

- aceleração da gravidade: g .

Observações:

- as hastes, roldanas e barra possuem massas desprezíveis;
- o fio que passa pelas roldanas é ideal e inextensível;
- os segmentos de fio desenhados na figura estão na vertical.

De acordo com os dados listados, geometria apresentada e pelo princípio da conservação da energia, o sistema, ao ser liberado, provoca uma aceleração inicial instantânea para baixo na partícula da direita de aproximadamente:

A) $\frac{30}{29}g$

B) $\frac{5}{7}g$

C) $\frac{15}{29}g$

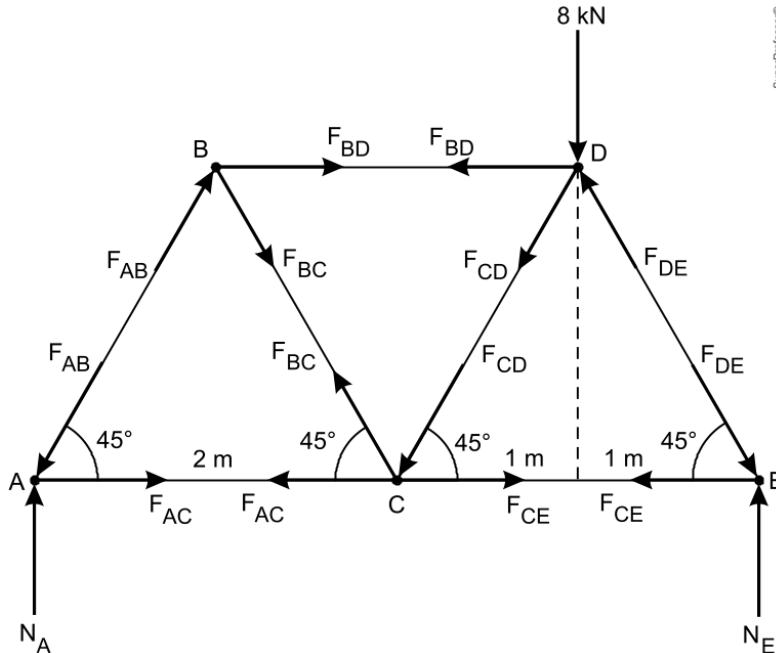
D) $\frac{5}{21}g$

E) $\frac{1}{5}g$

Gabarito de treliças

Resposta da questão 1:

Como os triângulos isósceles possuem base 2 m e altura 1 m, os ângulos das suas bases valem 45° . Do esquema de forças abaixo, obtemos:



a) Equilíbrio rotacional em torno do nó A (considerando as forças N_A , N_E e 8 kN):

$$N_E \cdot 4 - 8 \cdot 3 = 0 \Rightarrow N_E = 6 \text{ kN}$$

Equilíbrio translacional do sistema:

$$N_A + 6 = 8 \Rightarrow N_A = 2 \text{ kN}$$

b) Nó A:

$$F_{AB} \sin 45^\circ = N_A \Rightarrow F_{AB} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 2 \Rightarrow F_{AB} = 2\sqrt{2} \text{ kN (compressão)}$$

$$F_{AC} = F_{AB} \cos 45^\circ = 2\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow F_{AC} = 2 \text{ kN (tração)}$$

Nó E:

$$F_{DE} \sin 45^\circ = N_E \Rightarrow F_{DE} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 6 \Rightarrow F_{DE} = 6\sqrt{2} \text{ kN (compressão)}$$

$$F_{CE} = F_{DE} \cos 45^\circ = 6\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow F_{CE} = 6 \text{ kN (tração)}$$

c) Nó C:

$$F_{BC} \sin 45^\circ = F_{CD} \sin 45^\circ \Rightarrow F_{BC} = F_{CD}$$

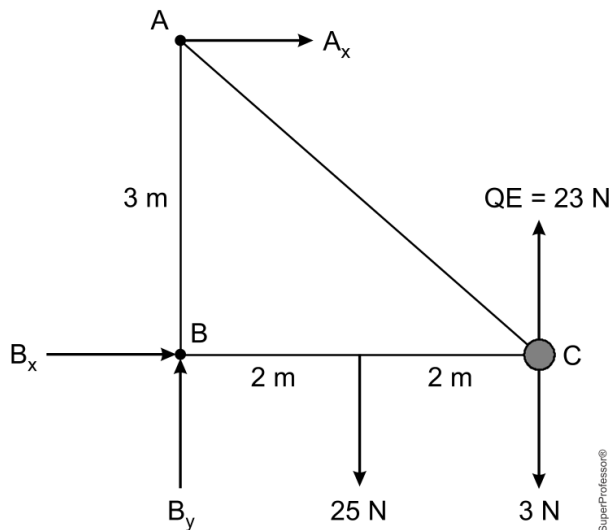
$$F_{AC} + (F_{BC} + F_{CD}) \cos 45^\circ = F_{CE} \Rightarrow 2 + 2F_{BC} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 6$$

$$\Rightarrow F_{BC} = 2\sqrt{2} \text{ kN (tração)} \text{ e } F_{CD} = 2\sqrt{2} \text{ kN (compressão)}$$

Resposta da questão 2:

[A]

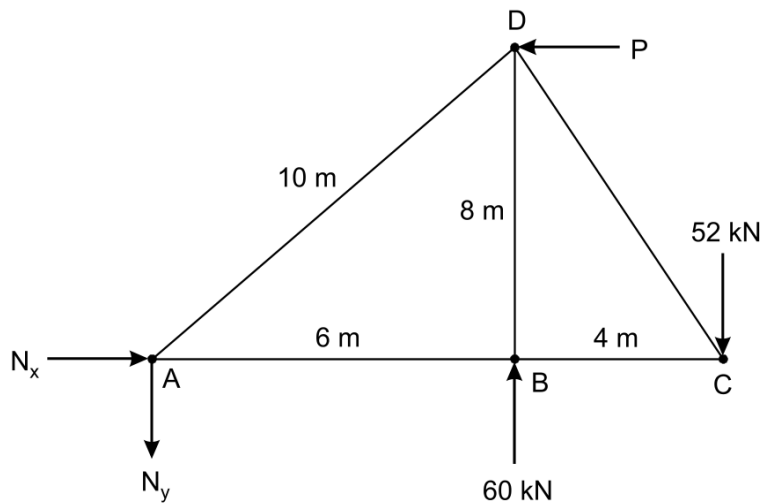
Para o equilíbrio rotacional em torno do ponto B, devemos ter:



$$\begin{aligned}
 A_x \cdot 3 - 23 \cdot 4 + 3 \cdot 4 + 25 \cdot 2 &= 0 \\
 3A_x - 30 &= 0 \\
 \therefore A_x &= 10 \text{ N}
 \end{aligned}$$

Resposta da questão 3:

a) Para o equilíbrio do sistema em relação ao ponto A, devemos ter:

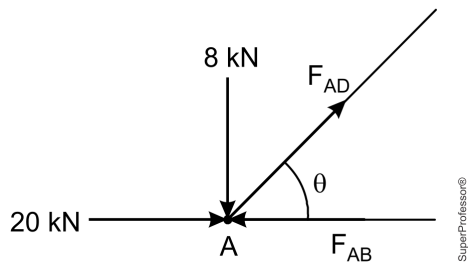


$$\begin{aligned}
 P \cdot 8 + 60 \cdot 6 &= 52 \cdot 10 \\
 \therefore P &= 20 \text{ kN}
 \end{aligned}$$

b) Do equilíbrio das forças nas direções horizontal e vertical, obtemos:

$$\begin{aligned}
 \begin{cases} N_x = P \\ N_y + 52 = 60 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} N_x = 20 \text{ kN} \\ N_y = 8 \text{ kN} \end{cases} \\
 N &= \sqrt{20^2 + 8^2} = \sqrt{464} \\
 \therefore N &= 4\sqrt{29} \text{ kN}
 \end{aligned}$$

c) No nó A, temos:



$$F_{AD} \cdot \sin \theta = 8$$

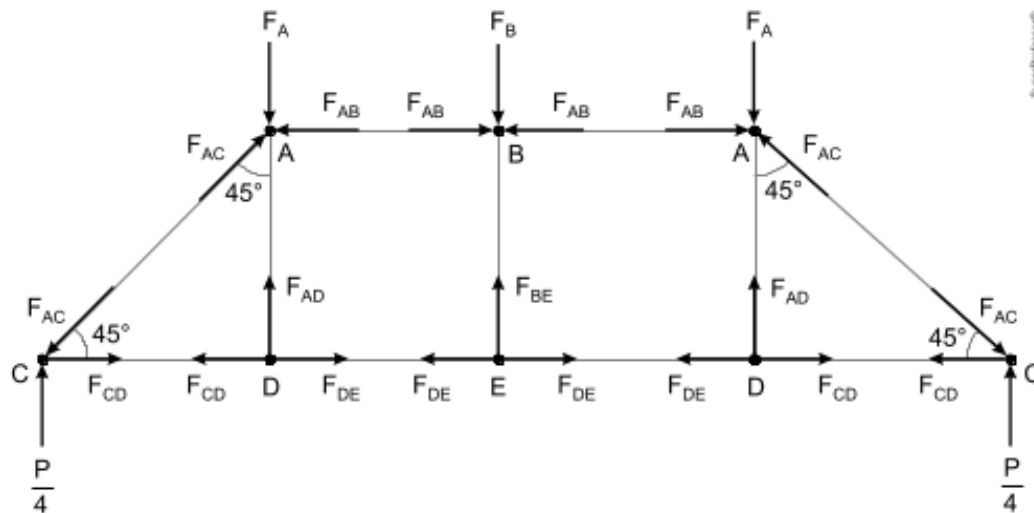
$$F_{AD} \cdot \frac{8}{10} = 8$$

$$F_{AD} = 10 \text{ kN}$$

Logo, a força na barra AD é de tração.

Resposta da questão 4:

a) Sendo P o peso do reservatório, a força sobre cada um dos apoios será igual a P/4. Da simetria do problema, podemos representar as forças sobre uma das treliças da seguinte forma:



De onde obtemos:

$$\text{Nó C: } \begin{cases} \frac{P}{4} = F_{AC} \sin 45^\circ \\ F_{CD} = F_{AC} \cos 45^\circ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F_{AC} = \frac{P\sqrt{2}}{4} \\ F_{CD} = \frac{P}{4} \end{cases}$$

$$\text{Nó A: } \begin{cases} F_{AB} = F_{AC} \sin 45^\circ \\ F_A = F_{AC} \cos 45^\circ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F_{AB} = \frac{P}{4} \\ F_A = \frac{P}{4} \end{cases}$$

$$\text{Nó B: } F_B = 0$$

$$\text{Nó D: } \begin{cases} F_{AD} = 0 \\ F_{CD} = F_{DE} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F_{AD} = 0 \\ F_{DE} = \frac{P}{4} \end{cases}$$

$$\text{Nó E: } F_{BE} = 0$$

Na iminência da ruptura na barra AC (que suporta a maior tensão), teremos:

$$p_{\text{ruptura}} = \frac{F_{AC}}{A} \Rightarrow 10^6 = \frac{\frac{P\sqrt{2}}{4}}{0,04} \Rightarrow P \cong 114 \text{ kN}$$

Logo, o módulo das tensões nas barras são:

$$T_{AC} = \frac{\frac{114 \cdot 10^3 \cdot 1,4}{4} \text{ N}}{0,04 \text{ m}^2} \approx 1 \text{ MPa}$$

$$T_{AB} = \frac{\frac{114 \cdot 10^3}{4} \text{ N}}{0,04 \text{ m}^2} \approx 0,7 \text{ MPa}$$

$$T_{AD} = 0 \text{ Pa}$$

$$T_{CD} = \frac{\frac{114 \cdot 10^3}{4} \text{ N}}{0,04 \text{ m}^2} \approx 0,7 \text{ MPa}$$

$$T_{DE} = \frac{\frac{114 \cdot 10^3}{4} \text{ N}}{0,04 \text{ m}^2} \approx 0,7 \text{ MPa}$$

$$T_{BE} = 0 \text{ Pa}$$

b) O instante t é dado por:

$$P = \rho Vg = \rho(V_0 + Qt)$$

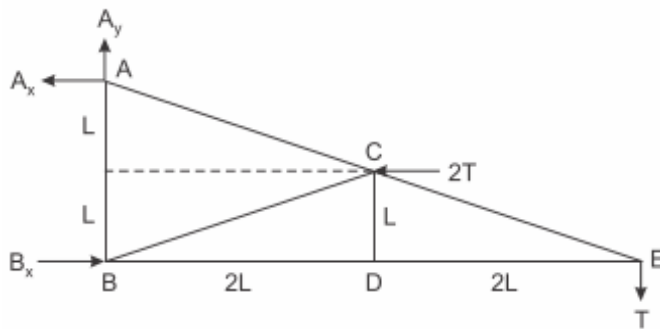
$$114 \cdot 10^3 = 10^3 \cdot (1 + 2t) \cdot 10$$

$$11,4 = 1 + 2t$$

$$\therefore t = 5,2 \text{ min}$$

Resposta da questão 5:

a) Representando as forças relevantes no sistema, temos:



Equilíbrio rotacional em A:

$$B_x \cdot 2L = T \cdot 4L + 2T \cdot L \therefore B_x = 3T$$

Equilíbrio em X:

$$A_x + 2T = B_x \Rightarrow A_x = 3T - T \Rightarrow A_x = T$$

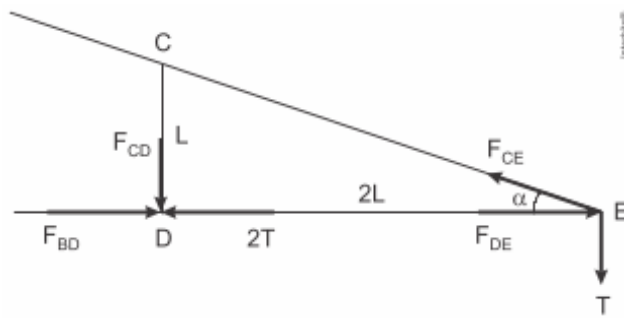
Equilíbrio em y:

$$A_y = T$$

Força resultante em A:

$$A_R = \sqrt{A_x^2 + A_y^2} \Rightarrow \sqrt{T^2 + T^2} \therefore A_R = T\sqrt{2}$$

b) Considere agora as seguintes forças:



Da figura, obtemos:

$$CE^2 = L^2 + (2L)^2 \Rightarrow CE = L\sqrt{5}$$

$$\sin \alpha = \frac{L}{L\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\cos \alpha = \frac{2L}{L\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

Nó E :

$$F_{CE} \sin \alpha = T \Rightarrow F_{CE} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} = T \quad \therefore F_{CE} = T\sqrt{5}$$

$$F_{CE} \cos \alpha = F_{DE} \Rightarrow T\sqrt{5} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} = F_{DE} \quad \therefore F_{DE} = 2T$$

Nó D:

$$F_{BD} = 2T$$

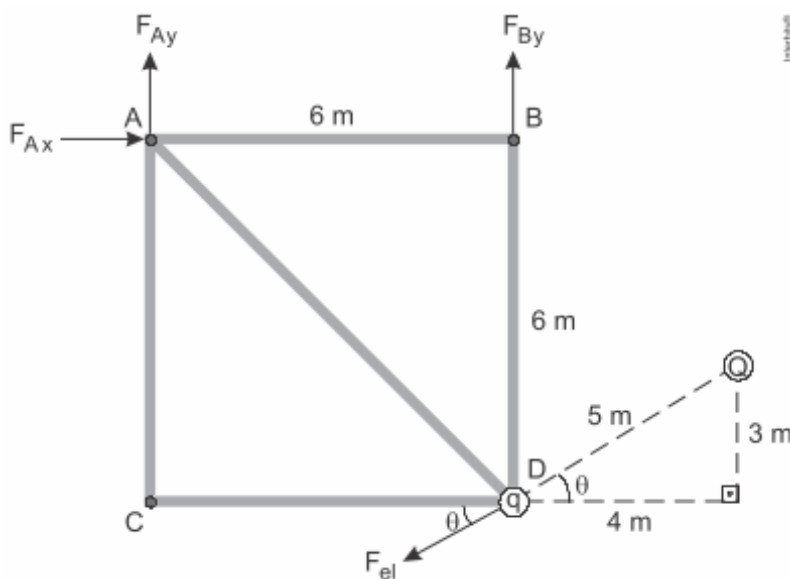
$$F_{CD} = 0$$

Portanto, há uma compressão de $2T$ nas barras DE e BD e uma força nula na barra CD.

Resposta da questão 6:

[A]

Representando as forças na estrutura, temos:



Sendo nulo o torque resultante em A, vem:

$$F_{el}\sin\theta \cdot 6 + F_{el}\cos\theta \cdot 6 - F_{By} \cdot 6 = 0$$

$$F_{el}(\sin\theta + \cos\theta) = 10$$

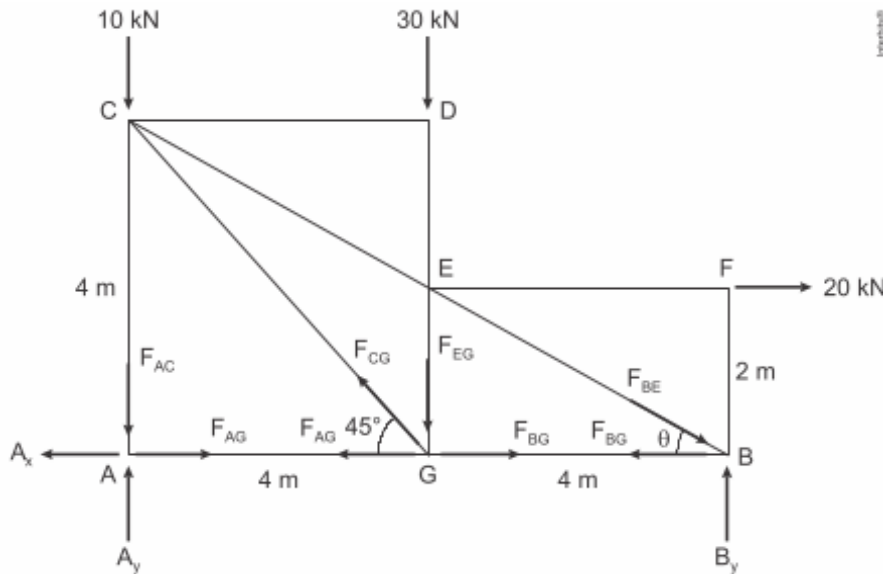
$$\frac{kQq}{5^2} \left(\frac{3}{5} + \frac{4}{5} \right) = 10$$

$$\frac{kQq}{25} \cdot \frac{7}{5} = 10$$

$$\therefore Qq = \frac{1250}{7k}$$

Resposta da questão 7:

Esquematizando o problema, temos:



Em que:

$$\begin{cases} \sin\theta = \frac{EG}{BE} = \frac{2}{2\sqrt{5}} \Rightarrow \sin\theta = \frac{\sqrt{5}}{5} \\ \cos\theta = \frac{BG}{BE} = \frac{4}{2\sqrt{5}} \Rightarrow \cos\theta = \frac{2\sqrt{5}}{5} \end{cases}$$

$$\Sigma F_x = 0: A_x - 20 = 0 \Rightarrow A_x = 20\text{kN}$$

$$\Sigma F_y = 0: A_y + B_y - 10 - 30 = 0 \Rightarrow A_y + B_y = 40\text{kN}$$

$$\Sigma M_A = 0: B_y \cdot 8 - 20 \cdot 2 - 30 \cdot 4 = 0 \Rightarrow B_y = 20\text{kN}$$

$$\text{Logo: } A_y + 20 = 40 \Rightarrow A_y = 20\text{kN}$$

Nó A:

$$F_{AG} - A_x = 0 \Rightarrow F_{AG} = 20\text{kN}$$

Nó B:

$$F_{BE}\sin\theta = B_y \Rightarrow F_{BE} \cdot \frac{\sqrt{5}}{5} = 20 \Rightarrow F_{BE} = 20\sqrt{5}\text{kN}$$

$$F_{BE}\cos\theta = F_{BG} \Rightarrow 20\sqrt{5} \cdot \frac{2\sqrt{5}}{5} = F_{BG} \Rightarrow F_{BG} = 40\text{kN}$$

Nó G:

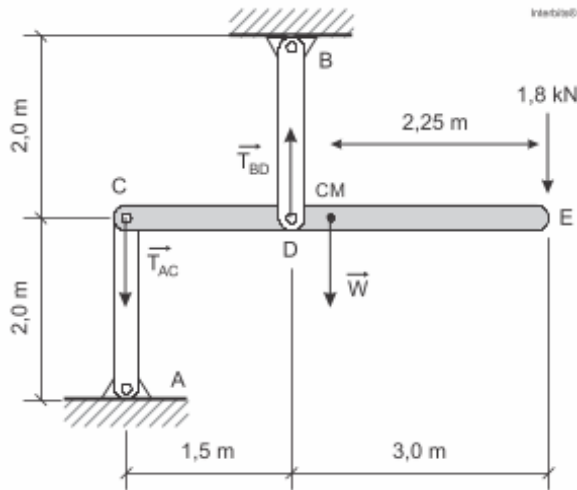
$$F_{CG}\cos 45^\circ + F_{AG} = F_{BG} \Rightarrow F_{CG} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 20 = 40 \Rightarrow F_{CG} = 20\sqrt{2}\text{kN}$$

$$F_{CG}\sin 45^\circ = F_{EG} \Rightarrow 20\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = F_{EG} \Rightarrow F_{EG} = 20\text{kN}$$

Portanto, as barras BG e EG estão, respectivamente, sob a ação de uma força de tração de 40kN e uma força de compressão de 20kN.

Resposta da questão 8:

[B]



Dados:

$$T_{BD} = 8,1 \text{ kN}$$

$$\mu = ? \text{ [kg/m]}$$

$$T_{AC} = ? \text{ [kN]}$$

Como a barra CE possui massa não desprezível, e sua distribuição de massa é uniforme, acrescentou-se à figura da questão a força peso W, aplicada no centro de massa -CM- da barra.

Partindo-se do equilíbrio de momentos em relação ao ponto C, tem-se que:

$$\begin{aligned} \sum M_C = 0 & \therefore T_{BD} \times 1,5 - \frac{W}{m_{CE}} \times 2,25 - 1,8 \times 10^3 \times 4,5 = 0 \\ \Rightarrow \mu &= \frac{T_{BD} \times 1,5 - 1,8 \times 10^3 \times 4,5}{4,5 \times g \times 2,25} \end{aligned}$$

Como $T_{BD} = 8,1 \times 10^3 \text{ N}$, então:

$$\mu = \frac{8,1 \times 10^3 \times 1,5 - 1,8 \times 10^3 \times 4,5}{4,5 \times 10 \times 2,25} = 40 \text{ kg/m}$$

sendo μ a densidade linear da barra CE.

Partindo-se do equilíbrio das forças na direção yy, tem-se que:

$$\begin{aligned} \sum F_y = 0 & \therefore -T_{AC} - W - 1,8 \times 10^3 + 8,1 \times 10^3 = 0 \\ T_{AC} &= 8,1 \times 10^3 - 1,8 \times 10^3 - \mu \times 4,5 \times g \\ &= 6,3 \times 10^3 - 40 \times 4,5 \times 10 \\ T_{AC} &= 4,5 \times 10^3 \text{ N} = 4,5 \text{ kN} \end{aligned}$$

Resposta da questão 9:

$$F_{DE} \cdot \sin \alpha + 20 = F_{CD} \cdot \sin 45^\circ \Rightarrow 78 \cdot \frac{12}{13} + 20 = F_{CD} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow F_{CD} = 92\sqrt{2} \text{ kN}$$

ou

$$F_{DE} \cdot \cos \alpha + F_{DF} + F_{CD} \cdot \cos 45^\circ = 0 \Rightarrow 78 \cdot \frac{5}{13} - 122 + F_{CD} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \Rightarrow F_{CD} = 92\sqrt{2} \text{ kN}$$

Respostas:

a) $F_{Ax} = \frac{55}{6} \text{ kN}$ (da direita para a esquerda) e $F_{Ay} = 100 \text{ kN}$ (de baixo para cima);

b) $F_{Bx} = \frac{175}{6} \text{ kN}$ (da esquerda para a direita) e $F_{By} = -70 \text{ kN}$ (de cima para baixo);

c) Barras que possuem força de tração:

$$AC \left(\frac{143}{6} \text{ kN} \right), BC \left(\frac{455}{6} \text{ kN} \right), CD (92\sqrt{2} \text{ kN}) \text{ e } DE (78 \text{ kN});$$

d) Barras que possuem forças de compressão:

$$AF (122 \text{ kN}), CF (72 \text{ kN}), DF (122 \text{ kN}) \text{ e } EF (72 \text{ kN}).$$

Resposta da questão 10:

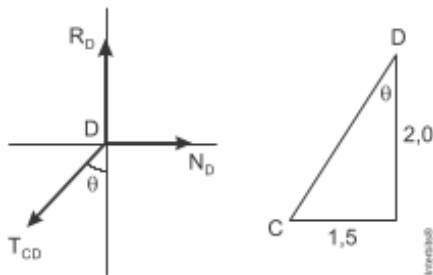
[C]

Devido às reações dos rótulos A e D sobre as barras AB e CD, respectivamente, e ao equilíbrio da estrutura, pode-se afirmar que:

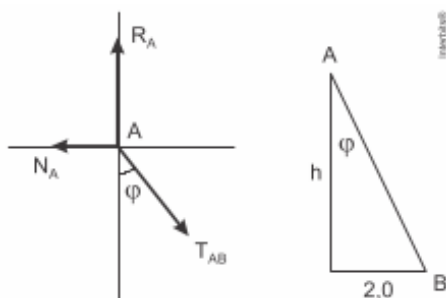
$$\begin{aligned} N_A &= N_D \\ R_D + R_A &= 90 \quad (1) \end{aligned}$$

Considerando o equilíbrio do nó D, tem-se que:

$$\left. \begin{aligned} N_D &= T_{CD} \sin \theta \\ R_D &= T_{CD} \cos \theta \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{N_D}{R_D} = \tan \theta = \frac{1,5}{2} = \frac{3}{4} \quad (2)$$



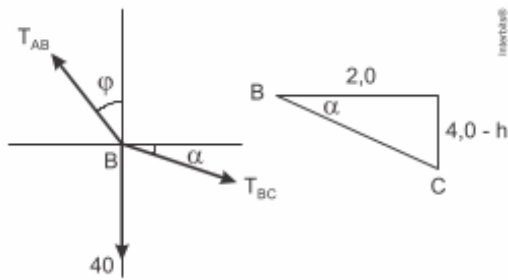
Considerando o equilíbrio do nó A, tem-se que:



Considerando o equilíbrio do nó B, tem-se que:

$$\left. \begin{aligned} T_{BC} \cos \alpha &= T_{AB} \sin \varphi = N_A \\ 40 + T_{BC} \sin \alpha &= T_{AB} \cos \varphi = R_A \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{T_{BC} \sin \alpha}{T_{BC} \cos \alpha} = \frac{R_A - 40}{N_A} \Rightarrow \frac{R_A - 40}{N_A} = \tan \alpha = \frac{4 - h}{2} = 2 - \frac{h}{2}$$

$$\frac{R_A - 40}{N_A} = 2 - \frac{h}{2}(4)$$



Combinando-se as equações (3) e (4) tem-se que:

$$\frac{h}{2} = \frac{R_A}{N_A} \quad \frac{R_A - 40}{N_A} = 2 - \frac{h}{2} \Rightarrow \frac{R_A - 40}{N_A} = 2 - \frac{R_A}{N_A} \Rightarrow R_A - N_A = 20$$

$$R_A - N_A = 20(5)$$

Isolando-se, nas equações (1) R_D , em função de R_A , então:

$$N_D = \frac{3}{4}R_D \Rightarrow N_A = \frac{3}{4}(90 - R_A)$$

chegando-se no seguinte resultado:

$$3R_A + 4N_A = 270(6)$$

Do sistema formado pelas equações (5) e (6), chega-se então aos valores de $N_A = 30$ kN e $R_A = 50$ kN.

Substituindo-se os valores de N_A e R_A nas equações (1), obtém-se:

$$N_D = 30 \\ R_D = 90 - R_A = 40$$

Substituindo os valores de N_A e R_A nas equações (3), obtém-se o valor de h :

$$\frac{h}{2} = \frac{R_A}{N_A} \Rightarrow h = 2 \times \frac{50}{30} = 3,33 \text{ m}$$

As forças de tração em cada barra podem ser obtidas como segue:

$$T_{AB} = \sqrt{N_A^2 + R_A^2} = \sqrt{30^2 + 50^2} = 10\sqrt{34} \cong 58,3 \text{ kN}$$

$$T_{BC} = \sqrt{N_A^2 + (R_A - 40)^2} = \sqrt{30^2 + 10^2} = 10\sqrt{10} \cong 31,6 \text{ kN}$$

$$T_{CD} = \sqrt{N_D^2 + R_D^2} = \sqrt{30^2 + 40^2} = 50 \text{ kN}$$

Como $T_{AB} \cong 58,3$ kN é a maior força de tração e $h = 3,33$ m, conclui-se que a alternativa correta é a [C].

Resposta da questão 11:

A ideia da resolução da questão é partir do equilíbrio de cada nó da estrutura.

Algumas considerações prévias são importantes:

1. Nos pontos dotados de restrições devem ser incluídas as forças de reação correspondente a cada restrição.

2. A parte mais complicada da questão é o volume de equações e variáveis com que se trabalha. Por isso, é importante definir um algoritmo de abordagem do problema. Como exemplo, o ponto A possui três restrições de translação, representadas pelas forças de reação A_x , A_y e A_z . Ambas foram dispostas no diagrama de equilíbrio do nó A como orientadas conforme o sentido positivo dos eixos coordenados.

3. As forças ao longo das barras foram representadas utilizando-se os nós das extremidades de cada barra. Exemplo: a força da barra AB sobre o nó A foi representada como $\vec{AB}$, vetor com origem em A, apontando para o nó B. Da mesma forma, a força da barra AB sobre o nó B foi representada como $\vec{BA}$ vetor com origem em B, apontando para o nó A. Naturalmente $\vec{BA} = -\vec{AB}$

4. O índice x,y ou z indicam o módulo da respectiva componente do referido vetor. Ex: AB_x , AB_y e AB_z .

5. Quando se suprime a seta, indica-se que se trata do módulo do vetor. Ex: $AB = |\vec{AB}|$.

6. O ângulo α referenciado na resolução a seguir corresponde ao ângulo agudo entre a barra AE e o eixo y, e é tal que $\cos(\alpha) = \frac{4}{\sqrt{20}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$. Já β corresponde ao ângulo agudo entre as barras AE e BE, de modo que $\sin(\beta) = \frac{2}{3}$.

Com essas considerações, partimos para a resolução.

Do equilíbrio do nó A, tem-se que:

$$\begin{cases} A_x - AD - AE_x - AC_x = 0 \\ -A_y + AE_y = 0 \\ AB + A_z + AC_z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_x - AD - AE \sin(\alpha) - AC \cos(45) = 0 \\ -A_y + AE \cos(\alpha) = 0 \\ AB + A_z + AC \sin(45) = 0 \end{cases}$$

Do equilíbrio do nó B, tem-se que:

$$\begin{cases} B_x - BC - BE_x = 0 \\ B_y + BE_y = 0 \\ -BA - BE_z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B_x - BC - BE \cos(\beta) \sin(\alpha) = 0 \\ B_y + BE \cos(\beta) \cos(\alpha) = 0 \\ AB - BE \sin(\beta) = 0 \end{cases}$$

Do equilíbrio do nó C, tem-se que:

$$\begin{cases} CB + CA_x + CE_x = 0 \\ -CF + CE_y = 0 \\ -CD - CA_z - CE_z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -BC - AC \cos(45) + CE \cos(\beta) \sin(\alpha) = 0 \\ -CF + CE \cos(\beta) \cos(\alpha) = 0 \\ -CD + AC \cos(45) - CE \sin(\beta) = 0 \end{cases}$$

Do equilíbrio do nó D, tem-se que:

$$\begin{cases} DA + DE_x = 0 \\ DE_y = 0 \\ DC = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} AD = 0 \\ DE = 0 \\ CD = 0 \end{cases}$$

Do equilíbrio do nó E, tem-se que:

$$\begin{cases} -60 + EC \sin(\beta) + EB \sin(\beta) = 0 \\ -EB \cos(\beta) \cos(\alpha) - EC \cos(\beta) \cos(\alpha) - EA \cos(\alpha) = 0 \\ EA \sin(\alpha) + EB \cos(\beta) \cos(\alpha) - EC \cos(\beta) \sin(\alpha) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -CE - BE = \frac{60}{\sin(\beta)} \\ (BE + CE) \cos(\beta) + AE = 0 \\ -AE - BE \cos(\beta) + CE \cos(\beta) = 0 \end{cases}$$

A seguir, a relação das equações obtidas:

1. $A_x - AD - AE \sin(\alpha) - AC \cos(45) = 0$
2. $-A_y + AE \cos(\alpha) = 0$
3. $AB + A_z + AC \sin(45) = 0$
4. $B_x - BC - BE \cos(\beta) \sin(\alpha) = 0$

$$5. B_y + BE \cos(\beta) \cos(\alpha) = 0$$

$$6. AB - BE \sin(\beta) = 0$$

$$7. -BC - AC \cos(45) + CE \cos(\beta) \sin(\alpha) = 0$$

$$8. -CF + CE \cos(\beta) \cos(\alpha) = 0$$

$$9. -CD + AC \cos(45) - CE \sin(\beta) = 0$$

$$10. AD = 0$$

$$11. DE = 0$$

$$12. CD = 0$$

$$13. -CE - BE = \frac{60}{\sin(\beta)}$$

$$14. (BE + CE) \cos(\beta) + AE = 0$$

$$15. -AE - BE \cos(\beta) + CE \cos(\beta) = 0$$

Das equações 10, 11 e 12: $AD = 0$, $DE = 0$ e $CD = 0$.

Somando-se as equações 14 e 15 chega-se a $CE = 0$.

Da equação 8: $CF = 0$.

Das equações 9 e 12: $AC = 0$.

Da equação 13: $BE = -\frac{60}{\sin(\beta)}$.

Da equação 7: $BC = 0$.

Da equação 14: $AE = -BE \cos(\beta) = \frac{60}{\sin(\beta)} \cos(\beta)$.

Da equação 4: $B_x = BE \cos(\beta) \sin(\alpha) = -\frac{60}{\sin(\beta)} \cos(\beta) \sin(\alpha)$.

Da equação 5: $B_y = -BE \cos(\beta) \cos(\alpha) = \frac{60}{\sin(\beta)} \cos(\beta) \cos(\alpha)$.

Da equação 6: $AB = BE \sin(\beta) = -\frac{60}{\sin(\beta)} \sin(\beta) = -60$

Da equação 3: $A_z = -AB = 60$

Da equação 2: $A_y = AE \cos(\alpha) = \frac{60}{\sin(\beta)} \cos(\beta) \cos(\alpha)$

Da equação 1: $A_x = AE \sin(\alpha) = \frac{60}{\sin(\beta)} \cos(\beta) \sin(\alpha)$

Respostas:

$$a) B_x = -\frac{60}{\sin(\beta)} \cos(\beta) \sin(\alpha) = -\frac{60}{\left(\frac{2}{3}\right)} \times \frac{\sqrt{5}}{2} \times \frac{1}{\sqrt{5}} = -45 \text{ kN}$$

$$B_y = \frac{60}{\sin(\beta)} \cos(\beta) \cos(\alpha) = \frac{60}{\left(\frac{2}{3}\right)} \times \frac{\sqrt{5}}{2} \times \frac{2}{\sqrt{5}} = 90 \text{ kN}$$

$$b) A_x = \frac{60}{\sin(\beta)} \cos(\beta) \sin(\alpha) = \frac{60}{\left(\frac{2}{3}\right)} \times \frac{\sqrt{5}}{2} \times \frac{1}{\sqrt{5}} = 45 \text{ kN}$$

$$A_y = \frac{60}{\sin(\beta)} \cos(\beta) \cos(\alpha) = \frac{60}{\left(\frac{2}{3}\right)} \times \frac{\sqrt{5}}{2} \times \frac{2}{\sqrt{5}} = 90 \text{ kN}$$

$$A_z = 60 \text{ kN}$$

c) $CF = 0$

d) $|BE| = \frac{60}{\sin(\beta)} = \frac{60}{\left(\frac{2}{3}\right)} = 90 \text{ kN}$

$$\begin{aligned} |BC| &= 0 \\ |AC| &= 0 \\ |AB| &= 60 \text{ kN} \end{aligned}$$

Resposta da questão 12:

a) Se a estrutura está deslocada 2cm para a esquerda, é porque ela puxa o apoio para esse sentido. Então há uma reação do apoio **tracionando** a barra para a direita. Assim:

– Força de ação da barra no apoio: para esquerda;

– Força de reação do apoio na barra: para a direita.

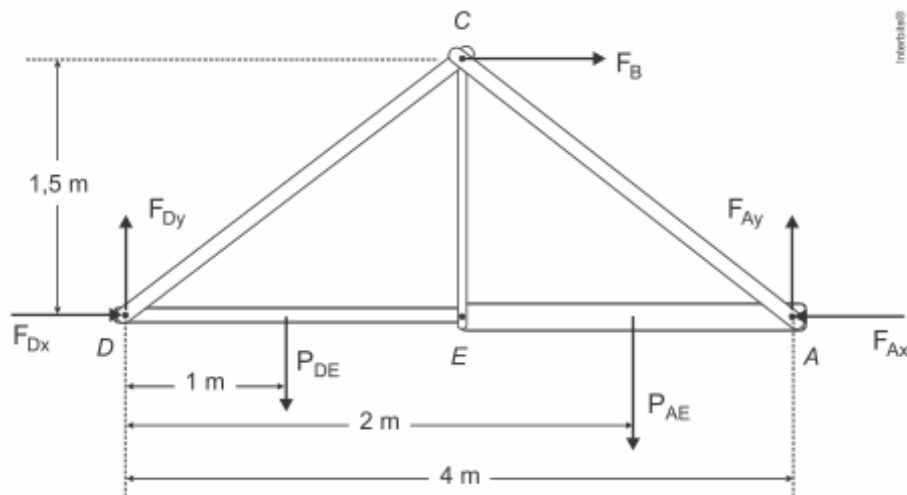
A intensidade dessas forças é dada pela lei de Hooke:

$$F_B = kx = 1.600 \times 2 \times 10^{-2} \Rightarrow F_B = 32 \text{ kN}$$

b) Calculando os pesos das barras:

$$P = \mu g L \begin{cases} P_{DE} = 100 \times 10 \times 2 = 2.000 \text{ N} \Rightarrow P_{DE} = 2 \text{ kN.} \\ P_{AE} = 3 \times 100 \times 10 \times 2 = 6.000 \text{ N} \Rightarrow P_{DE} = 6 \text{ kN.} \end{cases}$$

A figura mostra as forças externas atuando sobre a estrutura.



Do equilíbrio de translação na direção horizontal, vem:

$$F_{Ax} = F_B + F_{Dx} \Rightarrow F_{Ax} = 32 + 10 \Rightarrow F_{Ax} = 42 \text{ kN}$$

Do equilíbrio de translação, adotando polo em D tem-se:

$$\begin{aligned} \sum M_{A-\text{hor}}^D &= \sum M_{\text{hor}}^D \Rightarrow F_{Ay}(4) = F_B(1,5) + P_{DE}(1) + P_{AE}(3) \Rightarrow \\ 4F_{Ay} &= 32(1,5) + 2(1) + 6(3) \Rightarrow F_{Ay} = \frac{68}{4} \Rightarrow F_{Ay} = 17 \text{ kN.} \end{aligned}$$

c) Do equilíbrio de translação na direção vertical, vem:

$$F_{Dy} + F_{Ay} = P_{DE} + P_{AE} \Rightarrow F_{Dy} + 17 = 2 + 6 \Rightarrow F_{Dy} = -9 \text{ kN (em sentido oposto ao indicado na figura)} \Rightarrow$$

$F_{Dy} = 9 \text{ kN}$, para baixo.

d) Como já justificado no item a), a barra BC está sujeita a uma força de tração.

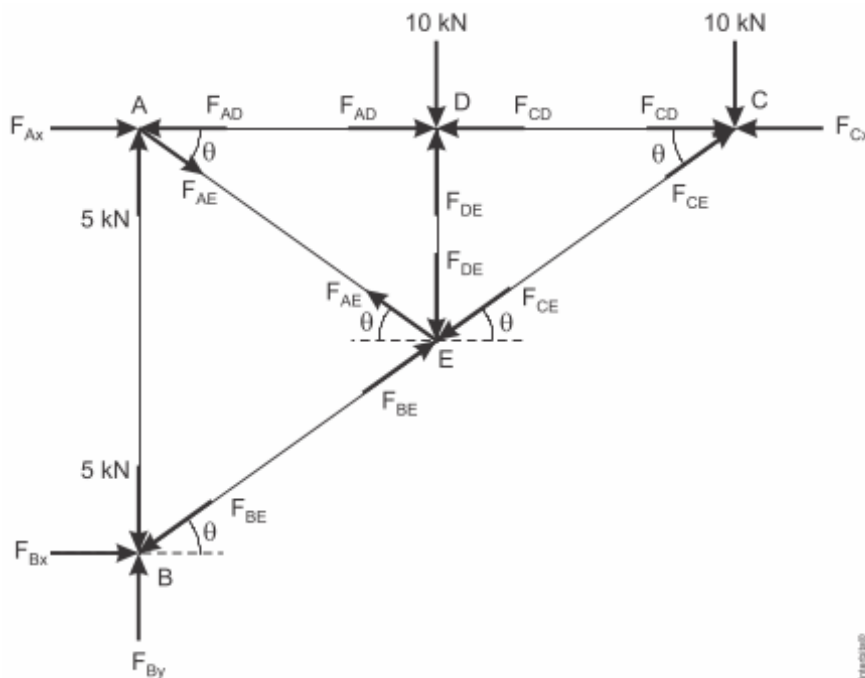
Sendo σ a intensidade da tensão nessa barra, vem:

$$\sigma = \frac{F_B}{A} = \frac{F_B}{\pi D^2/4} = \frac{4F_B}{\pi D^2} \Rightarrow \sigma = \frac{4 \times 32}{\pi (16 \times 10^{-3})^2} = \frac{128}{256\pi \times 10^{-6}} \Rightarrow$$

$$\sigma = \frac{5}{\pi} \times 10^5 \text{ kN/m}^2.$$

Resposta da questão 13:

Esquematizando o problema, temos:



Onde:

$$\text{sen } \theta = \frac{3}{5} \text{ e } \cos \theta = \frac{4}{5}$$

Nó A:

$$F_{AE} \text{ sen } \theta = 5 \Rightarrow F_{AE} \cdot \frac{3}{5} = 5 \Rightarrow F_{AE} = \frac{25}{3} \text{ kN}$$

Nó B :

$$F_{By} = 20 \text{ kN}$$

$$F_{BE} \text{ sen } \theta + 5 = F_{By} \Rightarrow F_{BE} \cdot \frac{3}{5} + 5 = 20 \Rightarrow F_{BE} = 25 \text{ kN}$$

$$F_{Bx} = F_{BE} \cos \theta = 25 \cdot \frac{4}{5} \Rightarrow F_{Bx} = 20 \text{ kN}$$

Nó E:

$$F_{AE} \cos \theta + F_{CE} \cos \theta = F_{BE} \cos \theta \Rightarrow \frac{25}{3} + F_{CE} = 25 \Rightarrow F_{CE} = \frac{50}{3} \text{ kN}$$

Nó D:

$$F_{DE} = 10 \text{ kN}$$

Nó C:

$$F_{CD} + F_{CE} \cos \theta = F_{Cx} \Rightarrow F_{CD} + \frac{50}{3} \cdot \frac{4}{5} = F_{Cx} \Rightarrow F_{CD} = F_{Cx} - \frac{40}{3}$$

Mas: $F_{CD} = F_{AD}$ (nó D) e

$$F_{AE} \cos \theta + F_{Ax} = F_{AD} \Rightarrow \frac{25}{3} \cdot \frac{4}{5} + F_{Ax} = F_{Cx} - \frac{40}{3} \Rightarrow F_{Cx} = F_{Ax} + 20 \text{ (nó A)}$$

a) $F_{Cx} = F_{Ax} + 20$ (é necessário conhecer F_{Ax} para se determinar F_{Cx}),

b) Nó A:

$$F_{Ax} = F_{Cx} - 20 \text{ (mesmo problema do item anterior).}$$

Nó B :

$$F_{Bx} = 20 \text{ kN (para a direita) e } F_{By} = 20 \text{ kN (para cima).}$$

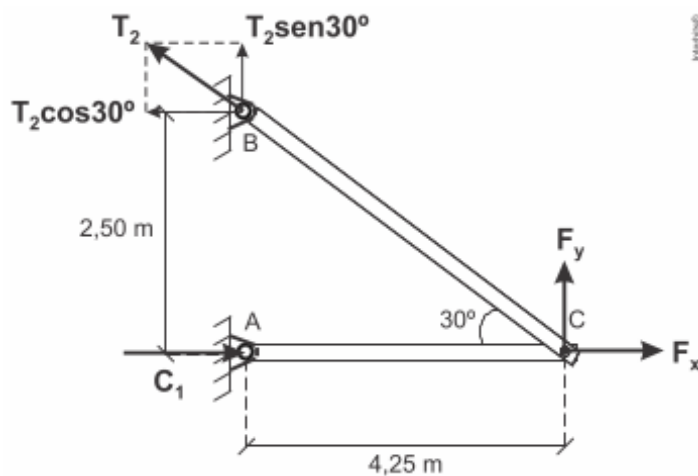
c) Barra A E , com $F_{AE} = \frac{25}{3} \text{ kN}$.

d) Barras AB, BE, CE e DE, com $F_{AB} = 5 \text{ kN}$, $F_{BE} = 25 \text{ kN}$, $F_{CE} = \frac{50}{3} \text{ kN}$ e $F_{DE} = 10 \text{ kN}$.

Resposta da questão 14:

[A]

A figura abaixo mostra as forças externas que agem na estrutura:



Para haver equilíbrio é preciso que $\sum F = 0$ e $\sum M_F^{O(\text{qualquer})} = 0$.

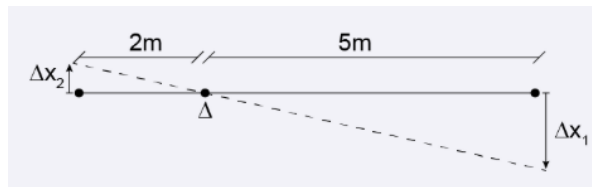
Calculando a resultante vertical das forças, temos:

$$F_y + T_2 \sin 30^\circ = 0 \Rightarrow F_y = -T_2 \cdot \sin 30^\circ = -80 \text{ N}$$

Calculando a resultante horizontal das forças, temos:

$$F_x + C_1 - T_2 \cos 30^\circ = 0 \Rightarrow F_x + 36 - 160 \times 1,7/2 = 0 \Rightarrow F_x = 100 \text{ N}$$

Resposta da questão 15:



Para deslocamentos pequenos, a relação entre o deslocamento da partícula à direita (Δx_1) e o da esquerda (Δx_2) pode ser inferida a partir do vínculo que a gangorra impõe:

$$(I) \quad \frac{\Delta x_2}{2} = \frac{\Delta x_1}{5}$$

Relação entre as acelerações

$$\frac{\Delta x_2}{2} = \frac{\Delta x_1}{5}$$

$$\frac{d}{dt} \rightarrow \frac{v_2}{2} = \frac{v_1}{5}$$

$$\frac{d}{dt} \rightarrow \frac{a_2}{2} = \frac{a_1}{5}$$

$$(II) \Rightarrow a_2 = \frac{2a_1}{5}$$

Princípio do trabalho Virtual

$$T_2 \cdot \Delta x_2 - T_1 \cdot \Delta x_1 = 0$$

$$(III) \xrightarrow{(I)} T_2 = \frac{5T_1}{2}$$

Segunda lei de Newton

$$\begin{cases} mg - T_1 = ma_1 \\ T_2 - mg = ma_2 \end{cases}$$

Usando as relações (II) e (III):

$$\begin{cases} mg - T_1 = ma_1 & (IV) \\ \frac{5T_1}{2} - mg = \frac{2ma_1}{5} & (V) \end{cases}$$

De $5 \cdot (\text{IV}) + 2 \cdot (\text{V})$:

$$5mg - 5T_1 + 5T_1 - 2mg = 5ma_1 + \frac{4ma_1}{5}$$

$$\Rightarrow 3mg = \frac{29ma_1}{5}$$

$$\Rightarrow \boxed{a_1 = \frac{15}{29}g}$$

Outra maneira

Como as roldanas são fixas e sem massa ($I = 0$), teremos a seguinte configuração:

$$\tau_A: mg \cdot 5d - mg \cdot 2d = I_1\alpha + I_2\alpha$$

$$3mgd = \alpha(I_1 + I_2) \Rightarrow 3mgd = \alpha \cdot [m(5d)^2 + m(2d)^2]$$

$$3gd = \alpha(25d^2 + 4d^2) \Rightarrow \alpha = \frac{3g}{29d}$$

$$a_2 = \alpha R_2 = \frac{3g}{29d} \cdot 5d$$

$$a_2 = \frac{15g}{29}$$

Alternativa C.