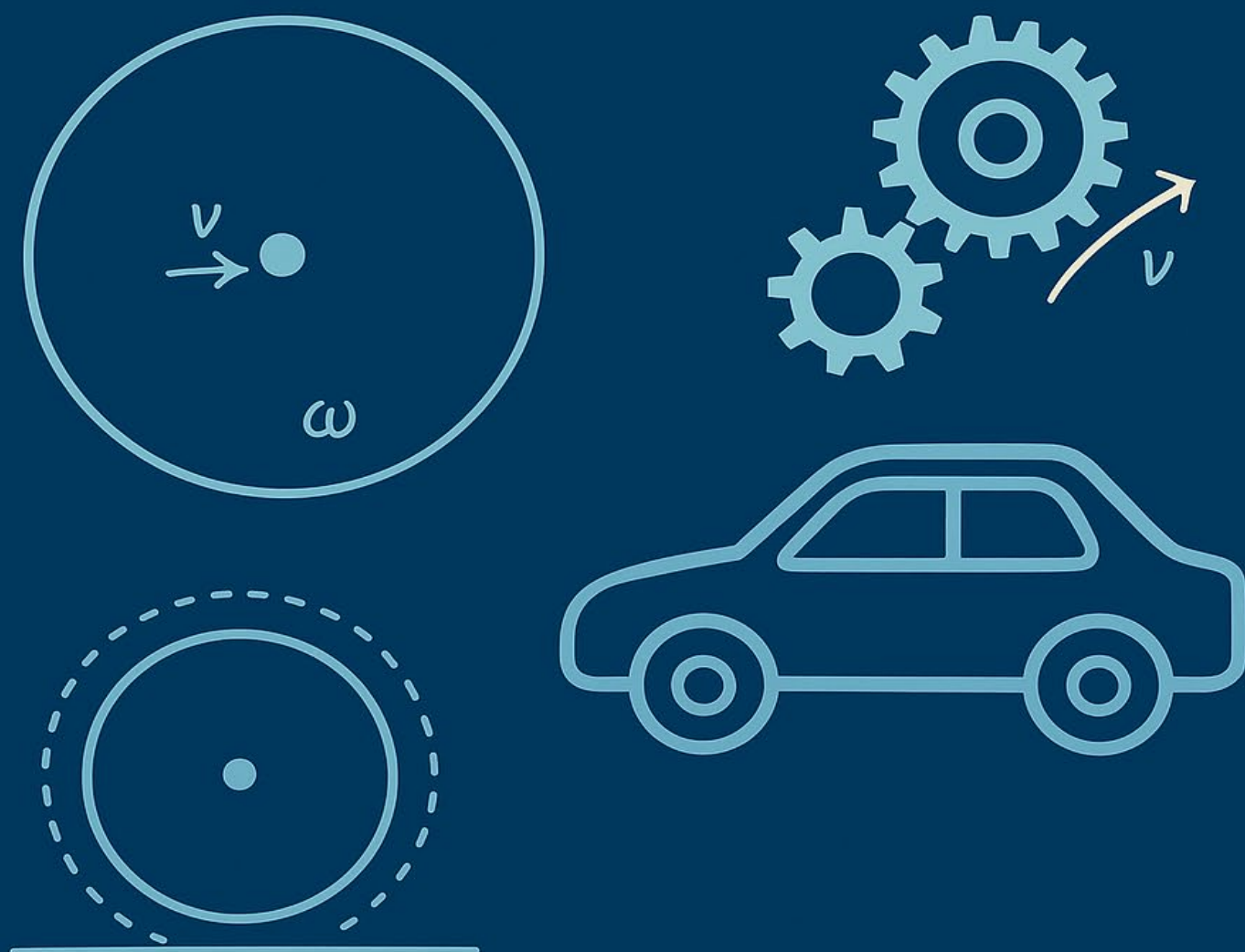


MOVIMENTO CIRCULAR UNIFORME

E CENTRO INSTANTÂNEO DE ROTAÇÃO



PROFESSOR LAERTE



MOVIMENTO CIRCULAR UNIFORME (M.C.U.)

1. INTRODUÇÃO

Até aqui descrevemos movimentos por intermédio de grandezas escalares lineares, onde as grandezas eram definidas em relação a medidas de comprimentos. A partir de agora, vamos introduzir o conceito de grandeza escalar circular (espaço angular, velocidade escalar angular e aceleração escalar angular), tomando como medidas ângulos na circunferência.

2. ESPAÇO ANGULAR OU FASE (φ)

Um objeto pode girar mais rapidamente que outro. O ponteiro de segundos de um relógio gira mais rápido que o de minutos, e este, mais rápido que o de horas. Para estudarmos o movimento circular, é necessário definir uma grandeza que meça essa "rapidez" de giro, que é a velocidade angular. Antes de defini-la, devemos lembrar o conceito de medidas de ângulo, tanto em graus quanto em radianos.

Um grau ($^\circ$) é definido como $1/360$ do ângulo total de uma circunferência. Um radiano (rad) é a medida do ângulo central de uma circunferência que determina um arco de comprimento ℓ , igual ao raio R da mesma circunferência. A figura a seguir mostra, na primeira imagem, um ângulo de 1 radiano. Na segunda imagem, temos um ângulo genérico φ . A relação entre esse ângulo, o comprimento do arco e o raio da circunferência também é apresentada.

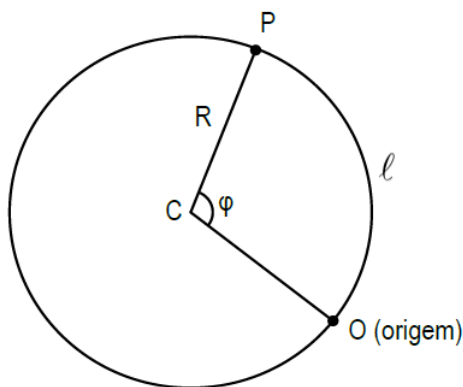


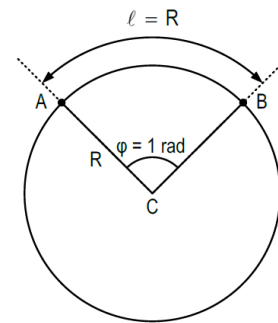
Figura 1

$$\varphi = \frac{\ell}{R}$$

Observação: o espaço angular é adimensional.

Definição de grau: Um grau ($^\circ$) é o ângulo correspondente a $1/360$ do ângulo de uma volta completa de uma circunferência.

Definição de radiano: Um radiano (rad) é um ângulo central φ que determina na circunferência o arco ℓ de comprimento igual ao raio ($\ell = R$). Um radiano corresponde a aproximadamente a 57° .



O comprimento da circunferência é $\ell = 2\pi R$, logo:

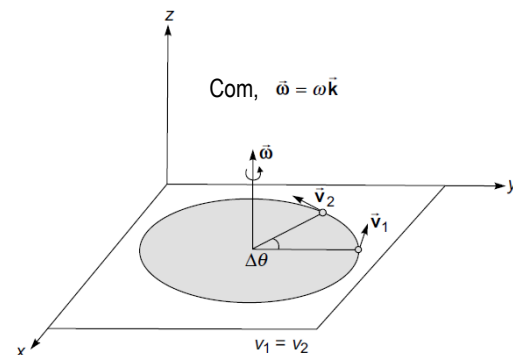
$$\ell = 2\pi R \therefore R\Delta\varphi = 2\pi R \therefore \Delta\varphi = 2\pi$$

O ângulo central que determina a circunferência é então,

$$2\pi \text{ rad} = 360^\circ$$

$$\Rightarrow \left\{ \pi \text{ rad} = 180^\circ; \frac{\pi}{2} \text{ rad} = 90^\circ; \frac{\pi}{4} \text{ rad} = 45^\circ; \frac{\pi}{6} \text{ rad} = 30^\circ \right.$$

3. VELOCIDADE ANGULAR ($\vec{\omega}$) – EM NÍVEL ITAIME.



Considere uma partícula movendo-se ao longo de uma circunferência. Suponha que ela sofra um deslocamento angular $\Delta\theta$ no intervalo de tempo Δt . Podemos definir a velocidade angular média da partícula como:

$$\vec{\omega} = \frac{\vec{\Delta\theta}}{\Delta t}$$

A velocidade angular instantânea

$$\vec{\omega} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{\Delta\theta}}{\Delta t} \text{ ou } \vec{\omega} = \frac{d\vec{\theta}}{dt}$$

A velocidade angular é uma grandeza vetorial cuja direção é ao longo do eixo de rotação e é determinada



pela regra da mão direita. Sua unidade no Sistema Internacional (SI) é rad/s. Se a partícula realiza n ciclos ou revoluções em um segundo, então:

$$\omega = n \cdot 2\pi \text{ ou } \omega = 2\pi n.$$

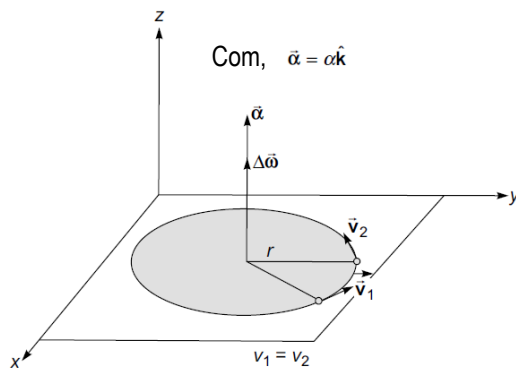
Como

$$n = \frac{1}{T},$$

em que T é o tempo necessário para completar uma revolução, então:

$$\therefore \omega = \frac{2\pi}{T}.$$

4. ACELERAÇÃO ANGULAR DENOTADA POR ($\vec{\alpha}$) – EM NÍVEL ITA/IME.



Se a velocidade angular de um corpo em rotação não for constante, então o corpo terá uma aceleração angular. Sejam ω_1 e ω_2 as velocidades angulares nos instantes t_1 e t_2 , respectivamente. A aceleração angular média é:

$$\vec{\alpha}_m = \frac{\vec{\omega}_2 - \vec{\omega}_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\vec{\omega}}{\Delta t}.$$

A aceleração angular instantânea é:

$$\vec{\alpha} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{\omega}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}.$$

Como:

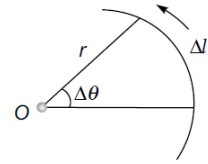
$$\omega = \frac{d\theta}{dt};$$

$$\alpha = \frac{d^2\theta}{dt^2}.$$

A aceleração angular é uma grandeza vetorial; sua direção está ao longo do eixo de rotação. Sua unidade

no Sistema Internacional (SI) é rad/s², com dimensão T^{-2} .

5. RELAÇÃO ENTRE VARIÁVEIS ANGULARES E LINEARES



Se, no intervalo de tempo Δt , a distância de arco percorrida pela partícula for Δs , então temos:

$$\Delta l = r\Delta\theta$$

$$\frac{\Delta l}{\Delta t} = r \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

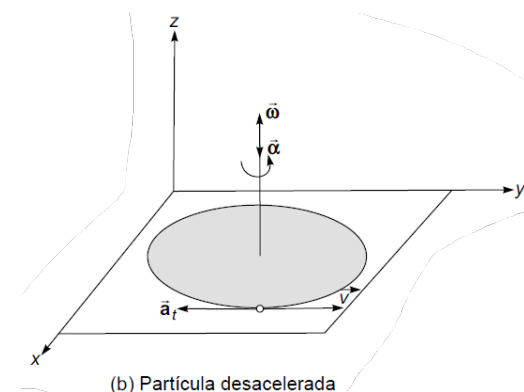
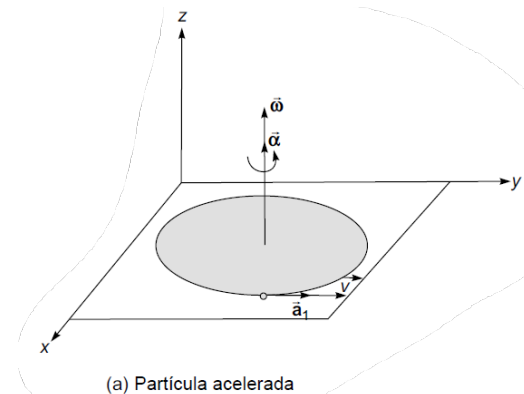
$$v = r\omega$$

Ao diferenciar a equação acima em relação ao tempo, obtemos a aceleração tangencial:

$$a_t = \frac{dv}{dt} = r \frac{d\omega}{dt}$$

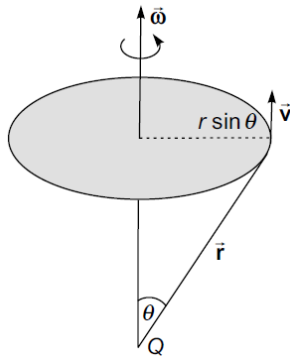
$$a_t = r\alpha$$

No movimento circular uniforme, a velocidade da partícula permanece constante; portanto, $a_t = 0$ (aceleração tangencial).





6. Velocidade angular ($\vec{\omega}$) na forma vetorial – EM NÍVEL ITAIME.



Considere uma partícula P girando em torno de um eixo com velocidade angular $\vec{\omega}$. Seja $\vec{r}$ o vetor posição da partícula em relação a qualquer ponto Q do eixo. Como a partícula descreve uma circunferência de raio $r \sin \theta$, situada no plano perpendicular ao eixo de rotação, o módulo da velocidade linear é:

$$v = \omega r \sin \theta$$

e sua direção é perpendicular ao plano que contém $\vec{r}$ e $\vec{\omega}$. Pela regra do parafuso da mão direita, podemos escrever:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

EXEMPLO 1: Uma partícula está girando com uma velocidade angular de 4 rad/sem torno de um eixo paralelo a $3\hat{j} - \hat{k}$, que passa pelo ponto $\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}$. Determine a velocidade da partícula no ponto $4\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$.

Solução:

Seja $\hat{n}$ o vetor unitário na direção de $3\hat{j} - \hat{k}$. Então,

$$\hat{n} = \frac{3\hat{j} - \hat{k}}{\sqrt{3^2 + (-1)^2}} = \frac{3\hat{j} - \hat{k}}{\sqrt{10}}$$

Logo, a velocidade angular da partícula é:

$$\vec{\omega} = \omega \hat{n}$$

$$\vec{\omega} = \frac{4}{\sqrt{10}} (3\hat{j} - \hat{k}) \text{ rad/s}$$

O vetor posição do ponto em relação ao ponto $\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}$ é:

$$\vec{r} = (4\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}) - (\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k})$$

$$\vec{r} = 3\hat{i} - 5\hat{j} + 2\hat{k} \text{ m}$$

Portanto, a velocidade linear é:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

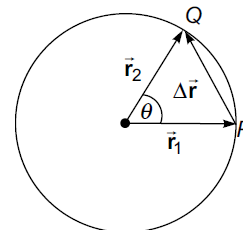
$$\vec{v} = \frac{4}{\sqrt{10}} (3\hat{j} - \hat{k}) \times (3\hat{i} - 5\hat{j} + 2\hat{k})$$

$$\vec{v} = \frac{-4}{\sqrt{10}} (\hat{i} + 3\hat{j} + 9\hat{k}) \text{ m/s}$$

Resposta:

$$\vec{v} = \frac{4}{\sqrt{10}} (\hat{i} + 3\hat{j} + 9\hat{k}) \text{ m/s}$$

7. Mudança de posição (deslocamento linear)



Se a partícula muda sua posição de P para Q em um tempo t , então o deslocamento é:

$$\vec{PQ} = \Delta \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

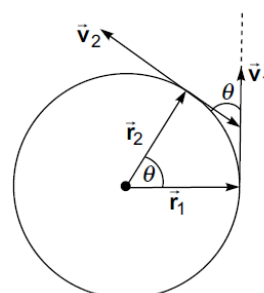
$$\Delta r = |\vec{r}_2 - \vec{r}_1| = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos \theta}$$

Para $r_1 = r_2 = r$:

$$\Delta r = \sqrt{r^2 + r^2 - 2r^2 \cos \theta} = \sqrt{2r^2 (1 - \cos \theta)}$$

$$\Delta r = 2r \sin \left(\frac{\theta}{2} \right)$$

8. Variação da velocidade





Varição da velocidade após percorrer o ângulo θ :

$$\Delta \vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$$

$$\Delta v = |\vec{v}_2 - \vec{v}_1| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 - 2v_1v_2\cos\theta}$$

Para velocidade uniforme:

$$v_1 = v_2 = v = \omega r$$

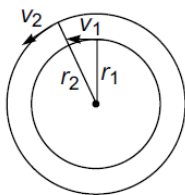
$$\Delta v = \sqrt{v^2 + v^2 - 2v^2\cos\theta}$$

$$\Delta v = \sqrt{2v^2(1 - \cos\theta)}$$

Sabendo que:

$$1 - \cos\theta = 2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

$$\Delta v = 2v\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$$



Se duas partículas estão se movendo na mesma circunferência ou em circunferências diferentes no mesmo plano, com velocidades angulares diferentes ω_1 e ω_2 , respectivamente, a velocidade angular da partícula 2 em relação à partícula 1 será:

$$\vec{\omega}_{21} = \vec{\omega}_2 - \vec{\omega}_1$$

ou

$$\omega_{21} = \omega_2 - \omega_1.$$

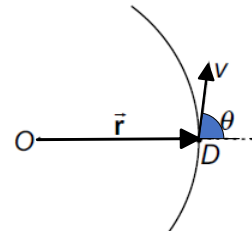
O tempo que a partícula 2 leva para completar uma revolução em relação à partícula 1 é dado por:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_{21}} = \frac{2\pi}{\omega_2 - \omega_1} = \frac{2\pi}{\frac{2\pi}{T_1} - \frac{2\pi}{T_2}}$$

Portanto,

$$\therefore T = \frac{T_1 T_2}{T_2 - T_1}.$$

9. VELOCIDADE ANGULAR EM GERAL



Considere a situação em que uma partícula não está em uma trajetória circular. Suponha que a partícula D , em qualquer instante, esteja se movendo ao longo da tangente à curva. Seja v sua velocidade escalar, e suponha que a direção de seu movimento forme um ângulo θ com o vetor raio $\vec{r}$ em relação a D .

A velocidade angular da partícula D é definida como:

$$\omega = \frac{\text{componente da velocidade perpendicular a } OD}{OD}$$

$$\omega = \frac{v_{\perp}}{r}$$

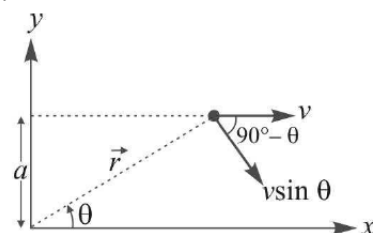
$$v_{\perp} = v\sin\theta$$

Portanto,

$$\omega = \frac{v\sin\theta}{r} = \frac{rv\sin\theta}{r^2}$$

$$\omega = \frac{|\vec{r} \times \vec{v}|}{r^2}$$

EXEMPLO 2: Um corpo rígido move-se paralelamente ao eixo x , com velocidade constante v , a uma distância a do eixo. Determine sua velocidade angular em torno de um eixo que passa pela origem O , no instante em que o vetor radial do corpo rígido forma um ângulo θ com o eixo x .



**Solução:**

A velocidade da partícula perpendicular ao vetor radial $\vec{r}$ é $v \sin \theta$. Além disso,

$$r \sin \theta = a.$$

Assim, pela definição:

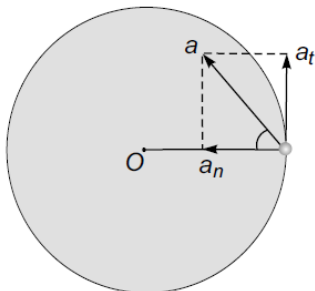
$$\omega = \frac{v_{\perp}}{r}$$

$$\omega = \frac{v \sin \theta}{(a / \sin \theta)} = \frac{v}{a} \sin^2 \theta.$$

10. ACELERAÇÃO NO MOVIMENTO CIRCULAR**A) Movimento circular uniforme**

O movimento de uma partícula que se desloca ao longo de uma trajetória circular com velocidade escalar constante é chamado de **movimento circular uniforme (MCU)**. No movimento ao longo de uma trajetória circular, a velocidade da partícula muda continuamente devido à mudança na direção do movimento. Por isso, existe uma aceleração, chamada **aceleração normal ou centrípeta**. Seu módulo é dado por:

$$\frac{v^2}{r}$$

B) Movimento circular não uniforme

Se uma partícula se move ao longo de uma trajetória circular com velocidade escalar variável, sua velocidade muda devido à mudança na direção do movimento e também à mudança no módulo da velocidade. Nesse caso, existem duas acelerações perpendiculares:

I) Aceleração normal ou centrípeta (a_c)

Essa aceleração ocorre devido à mudança na direção do movimento e é dada por:

$$a_c = \frac{v^2}{r}$$

II) Aceleração tangencial (a_t)

Essa aceleração ocorre devido à mudança no módulo da velocidade e é dada por:

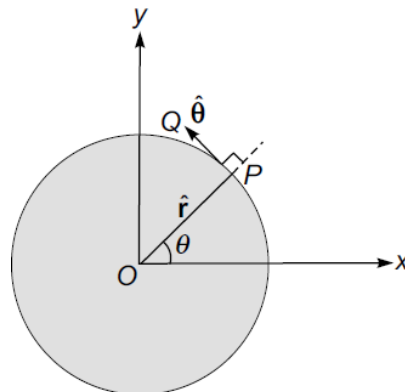
$$a_t = \frac{dv}{dt} = \alpha r$$

Assim, a aceleração resultante é:

$$\vec{a} = \vec{a}_c + \vec{a}_t$$

$$\vec{a} = -\left(\frac{v^2}{r}\right)\hat{r} + \left(\frac{dv}{dt}\right)\hat{\theta}$$

$$a = \sqrt{a_c^2 + a_t^2}.$$

Vetor unitário ao longo do raio e da tangente

Vamos traçar um vetor unitário $\vec{OP} = \hat{r}$ ao longo do raio externo e um vetor unitário $\vec{PQ} = \hat{\theta}$ ao longo da tangente, na direção de aumento de θ . Chamamos $\hat{r}$ de vetor unitário radial e $\hat{\theta}$ de vetor unitário tangencial. Assim,

$$\vec{OP} = OP \cos \theta \hat{i} + OP \sin \theta \hat{j} \quad (\text{como } OP = 1)$$

$$\therefore \hat{r} = \cos \theta \hat{i} + \sin \theta \hat{j}$$

De modo semelhante,

$$\vec{PQ} = PQ \sin \theta \hat{i} + PQ \cos \theta \hat{j} \quad (\text{como } PQ = 1)$$

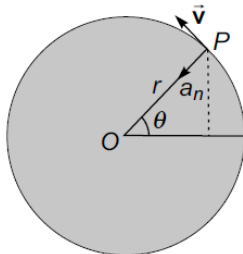
$$\hat{\theta} = -\sin \theta \hat{i} + \cos \theta \hat{j}$$



Como $\hat{r}$ e $\hat{\theta}$ são mutuamente perpendiculares, Portanto,

$$\hat{r} \cdot \hat{\theta} = 0.$$

11. ACELERAÇÃO CENTRÍPETA ($\vec{a}_n$).



Consideremos uma partícula movendo-se ao longo de uma trajetória circular de raio r , com velocidade angular constante ω . Seu vetor posição, em qualquer instante t , é dado por:

$$\vec{r} = \vec{OP}$$

$$\vec{r} = OP\hat{r}$$

$$\vec{r} = r(\cos\theta\hat{i} + \sin\theta\hat{j}) \quad eq(i)$$

Diferenciando a equação (i) em relação ao tempo, obtemos a velocidade:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = r\left(-\sin\theta\frac{d\theta}{dt}\hat{i} + \cos\theta\frac{d\theta}{dt}\hat{j}\right)$$

$$\vec{v} = r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)(-\sin\theta\hat{i} + \cos\theta\hat{j})$$

ou

$$\vec{v} = r\omega(-\sin\theta\hat{i} + \cos\theta\hat{j}) \quad eq(ii)$$

Sabemos que:

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega$$

$$-\sin\theta\hat{i} + \cos\theta\hat{j} = \hat{\theta}$$

Portanto,

$$\vec{v} = r\omega\hat{\theta}$$

$$|\vec{v}| = \omega r$$

A aceleração pode ser obtida diferenciando a equação (ii). Assim:

$$\vec{a}_n = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left[r\omega(-\sin\theta\hat{i} + \cos\theta\hat{j})\right]$$

$$\vec{a}_n = r\omega\left[-\cos\theta\frac{d\theta}{dt}\hat{i} - \sin\theta\frac{d\theta}{dt}\hat{j}\right]$$

$$\vec{a}_n = -r\omega\left(\frac{d\theta}{dt}\right)(\cos\theta\hat{i} + \sin\theta\hat{j})$$

$$\vec{a}_n = -r\omega^2\hat{r}$$

ou

$$\vec{a}_n = -\omega^2\vec{r}$$

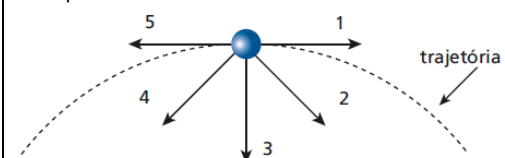
e

$$a_n = \omega^2 r = \frac{v^2}{r}$$

Aqui, $\vec{a}_n$ é chamada de **aceleração normal**, e sua direção aponta para o centro da trajetória circular.

O sinal negativo indica que a aceleração aponta para a origem, isto é, para o centro da circunferência. Essa aceleração é conhecida como **aceleração centrípeta**.

EXEMPLO 3: A figura a seguir representa um instante do movimento curvilíneo e acelerado de uma partícula:



Se o movimento ocorre da esquerda para a direita, os vetores que melhor representam a velocidade vetorial e a aceleração vetorial da partícula no instante considerado, e nessa ordem, são:

- 1 e 2.
- 5 e 3.
- 1 e 4.
- 5 e 4.



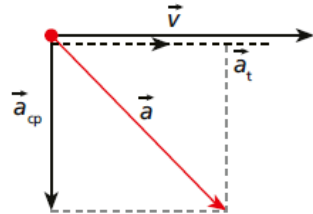
e) 1 e 1.

Resolução:

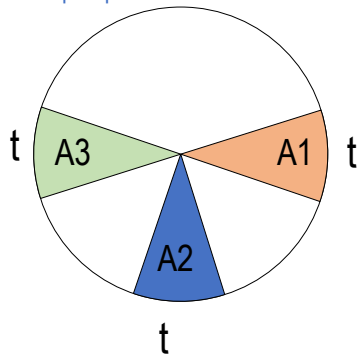
I. A velocidade vetorial é tangente à trajetória e orientada no sentido do movimento. Logo: vetor (1).

II. Se o movimento é acelerado, a aceleração vetorial deve admitir uma componente tangencial no sentido do movimento.

III. Se o movimento é curvilíneo, a aceleração vetorial deve admitir uma componente centrípeta.



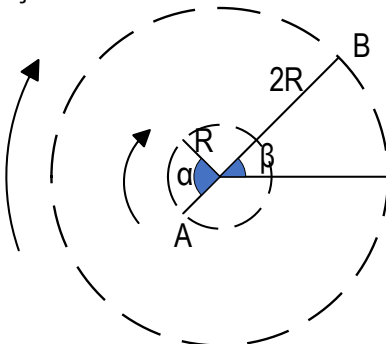
12. A lei de Kepler para MCU



Qualquer partícula com movimento circular uniforme descreve áreas iguais em tempos iguais, com respeito a de um sistema de referência localizado no centro da circunferência.

Exemplo 4: Dois satélites A e B descrevem trajetórias circulares de raios de curvatura R e $2R$, respectivamente. Se os vetores de posição, com respeito a o centro da curvatura, de A e B descrevem áreas iguais em tempos iguais, determinar a relação entre suas velocidades angulares.

Resolução do Prof. Laerte Pereira:



Igualando áreas: $A_A = A_B$

$$\frac{\alpha R^2}{2} = \frac{\beta (2R)^2}{2}$$

$$\alpha = 4\beta$$

logo:

$$\omega_A = 4\omega_B$$

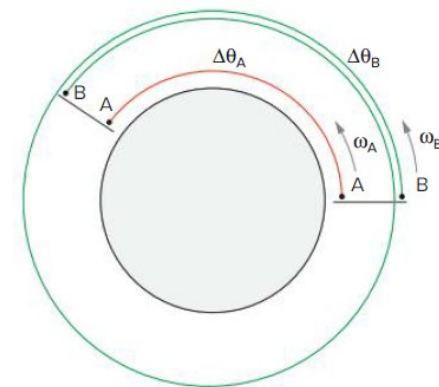
EXEMPLO 5: Dois móveis, A e B, percorrem a mesma circunferência com velocidades angulares constantes e iguais a $2\pi \text{ rad/s}$ e $3\pi \text{ rad/s}$. Se eles partem juntos do mesmo ponto, determine o tempo que levam para se encontrar:

a) quando se deslocam no mesmo sentido.

b) quando se deslocam em sentidos contrários.

Resolução: a) Após um tempo t , os espaços angulares percorridos por A e B são:

$$\Delta\theta_A = 2\pi \cdot t \text{ e } \Delta\theta_B = 3\pi \cdot t$$



Se os móveis se deslocam no mesmo sentido e B é mais rápido que A, eles se encontram quando B dá uma volta a mais que A, ou seja:

$$\Delta\theta_B = \Delta\theta_A + 2\pi \Rightarrow 3\pi \cdot t = 2\pi \cdot t + 2\pi$$

$$\Rightarrow t = 2 \text{ s}$$

b) Se os móveis se deslocam em sentidos contrários, eles se encontram quando a soma dos ângulos descritos por A e B vale $2\pi \text{ rad}$:

$$\Delta\theta_B + \Delta\theta_A = 2\pi$$

$$t = 0,4 \text{ s}$$

13. PERÍODO E FREQUÊNCIA

Um movimento é chamado periódico quando todas as suas características se repetem para intervalos de tempo iguais. Ao estudarmos movimentos periódicos precisamos definir algumas grandezas fundamentais como período e frequência.

O período (T) é o menor intervalo de tempo para o fenômeno se repetir; suas unidades são: segundo



minuto, hora, dia, mês e ano. No SI, a unidade de período é o segundo.

A frequência (f) está associada ao número de voltas efetuadas pela partícula a cada unidade de tempo.

$$f = \frac{n}{\Delta t}$$

onde:

n = número de repetições;

Δt = intervalo de tempo considerado.

As repetições ou ciclos, no movimento circular, serão voltas ou rotações.

Se n é dado em ciclos e Δt em segundos, a unidade de frequência, no SI, será ciclo/s, também chamada hertz (Hz).

No movimento circular, ciclos por segundo são rotações por segundo (rps).

Observe que, se $n = 1$ ciclo, então, pela definição de período, $\Delta t = T$. Então:

$$f = \frac{1}{T} \Rightarrow T = \frac{1}{f}$$

(Relação entre período e frequência)

Por exemplo, se você amarrar um barbante a uma pedra e girá-los, de modo a obrigar a pedra a efetuar 50 voltas em 10 s, a frequência desse movimento será de 5 voltas/segundo ou 5 hertz (5 Hz).

EXEMPLO 6: Um ponto material descreve uma circunferência horizontal com velocidade constante em módulo. O raio da circunferência é 15 cm e o ponto material completa uma volta a cada 10 s. Calcule:

- o período e a frequência;
- a velocidade angular;
- a velocidade escalar linear;
- o módulo da aceleração centrípeta.

Solução:

a) O período corresponde ao tempo necessário para o ponto material completar uma volta. Portanto:

$$T = 10 \text{ s}$$

A frequência é:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{10} \Rightarrow f = 0,1 \text{ Hz}$$

b) A velocidade angular é dada por:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{10} \Rightarrow \omega = \frac{\pi}{5} \text{ rad/s}$$

c) A velocidade linear é:

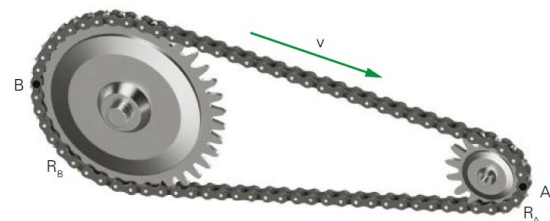
$$v = \omega R = \frac{\pi}{5} \cdot 15 \Rightarrow v = 3\pi \text{ cm/s}$$

d) A aceleração centrípeta tem módulo dado por:

$$\left| \vec{a}_{cp} \right| = \frac{v^2}{R} = \frac{(3\pi)^2}{15} = \frac{3\pi^2}{5} \Rightarrow \left| \vec{a}_{cp} \right| = 0,6\pi^2 \text{ cm/s}^2$$

14. Transmissão de movimento circular com acoplamento em eixos independentes

Caso 1: Imagine duas engrenagens com tamanhos diferentes (raios diferentes) ligadas por uma correia ou polia, como mostra a Figura. Podemos observar essa montagem, por exemplo, em uma bicicleta. A corrente faz a ligação de duas catracas com tamanhos distintos.



Considerando que a corrente não desliza sobre as engrenagens, isso nos permite concluir que a velocidade de deslocamento da corrente é igual à velocidade linear dos pontos A e B situados nas extremidades das polias. Logo, temos:

$$v_A = v_B$$

E como:

$$v = \omega \cdot R$$

vem:

$$\omega_A \cdot R_A = \omega_B \cdot R_B$$

Ainda temos que:



$$\omega = 2\pi f$$

então:

$$2\pi f_A \cdot R_A = 2\pi f_B \cdot R_B$$

Portanto:

$$f_A \cdot R_A = f_B \cdot R_B$$

E, por fim:

$$f = \frac{1}{T}$$

então:

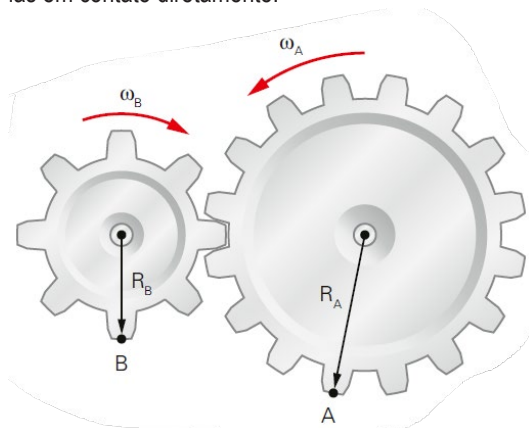
$$\frac{R_A}{T_A} = \frac{R_B}{T_B}$$

Logo:

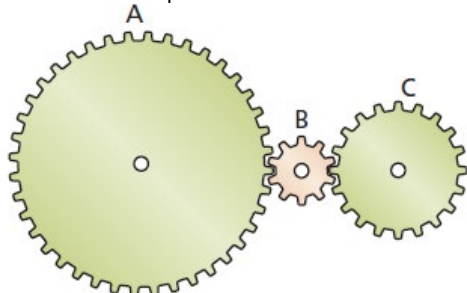
$$\frac{T_A}{R_A} = \frac{T_B}{R_B}$$

Caso 2:

Essa análise também é válida quando, em vez de usar uma correia ligando as rodas, colocamos em contato diretamente.



EXEMPLO 7: A figura representa um acoplamento de três rodas dentadas A, B e C que possuem 40, 10 e 20 dentes respectivamente.

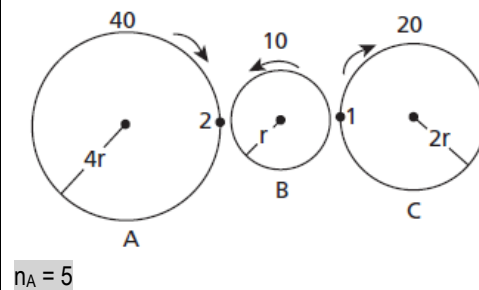


Lembrando que os dentes são todos iguais,

quantas voltas da a roda A enquanto a roda C completa 10?

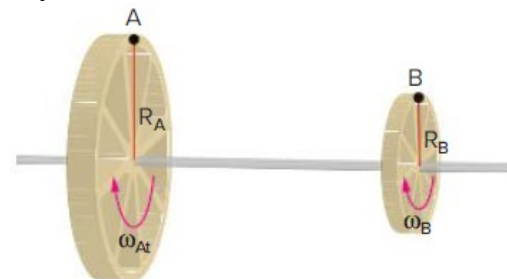
Resolução:

perímetro é proporcional ao número de dentes. Como o raio e o perímetro também são proporcionais, o raio é proporcional ao número de dentes.



Caso 3: Eixo de rotação comum a duas rodas

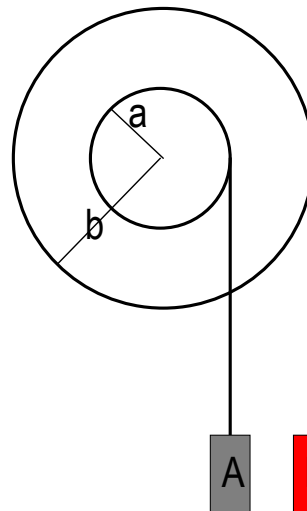
Também podemos transmitir o movimento circular acoplando duas rodas ao mesmo eixo de rotação.



Nesse caso, as rodas giram com a mesma velocidade escalar angular do eixo de rotação. Assim:

$$\omega_A = \omega_B$$

EXEMPLO 8: A figura mostra duas roldanas concêntricas de raios $a = 20$ cm e $b = 30$ cm. Se as roldanas rodarem no sentido horário com velocidade angular ω constante $= 4$ rad/s, determine o valor da velocidade relativa entre os blocos A e B.





Resolução:

$$V = \omega R$$

Para A: $v_A = (4)(20) = 80 \text{ cm/s}$ ($\downarrow$)

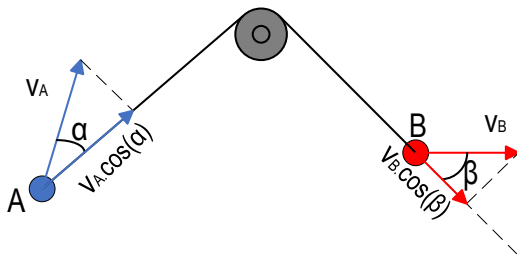
Para B: $v_B = (4)(30) = 120 \text{ cm/s}$ ($\downarrow$)

Logo

$$v_{rel} = 40 \text{ cm/s}$$

15. Aprofundamento ITAIME - Transmissão de movimento através de cabos tensos (Ideais).

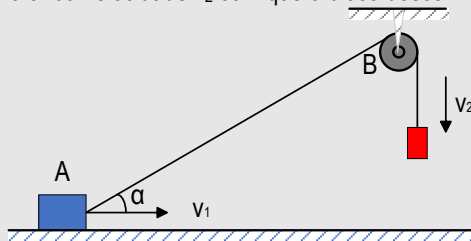
Sejam $\vec{v}_A$ e $\vec{v}_B$ as respectivas velocidades de dois objetos que estão ligados por uma corda tensa como está representado na figura. Se suas velocidades são $\vec{v}_A$ e $\vec{v}_B$ em um dado instante, será verdade que as magnitudes das componentes dessas velocidades na direção da corda, para a qual eles são vinculados são iguais.



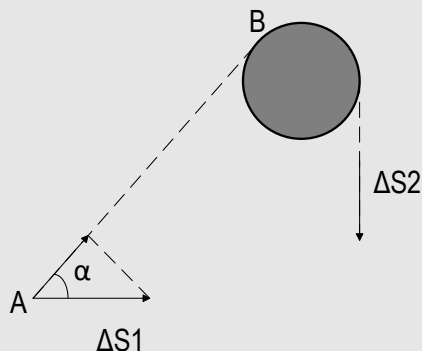
Então temos:

$$v_A \cdot \cos \theta_A = v_B \cdot \cos \theta_B$$

Exemplo 9: A figura mostra um bloco movendo-se horizontalmente por causa de uma corda que a puxa no ponto A. Se no instante mostrado $v_1 = 15 \text{ m/s}$ e a corda AB forma o ângulo $\alpha = 53^\circ$ com o piso, somos solicitados a determinar em m/s a o valor da velocidade v_2 com que o bloco desce.



Resolução do Prof. Laerte Pereira:



$$\Delta s_1 \cos \alpha = \Delta s_2$$

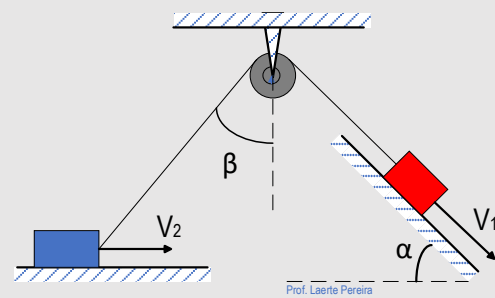
Derivando em relação ao tempo

$$v_1 \cos \alpha = v_2$$

Logo

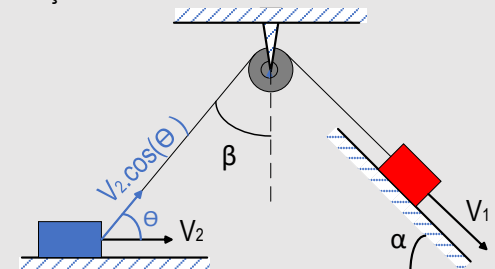
$$v_2 = 9 \text{ m/s}$$

Exemplo 10: A figura mostra um sistema composto por dois blocos e uma corda ideal que é mantida esticada enquanto eles estão em movimento. Se no instante mostrado $v = 18,0 \text{ m/s}$ e $\beta = 53^\circ$, o Professor Laerte Pereira pede pra você determinar a velocidade v_2 em m/s correspondente ao bloco 2.



Resolução do Prof. Laerte Pereira:

Nossa estratégia será projetar a velocidade v_2 na direção da corda.



Portanto, e como mostra o esquema vetorial, será satisfatório que:

$$v_2 \cos \theta = v_1$$

Onde

$$\theta = 90^\circ - \beta$$

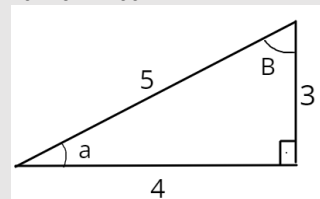
$$\cos(90^\circ - \beta) = \sin \beta$$

Então

$$v_2 \sin \beta = v_1$$

Dica do Laerte: aluno de turma ITA/IME tem que saber deste triângulo.

Onde $a = 37^\circ$ e $B = 53^\circ$



Então

$$\sin 53^\circ = \frac{4}{5}$$



$$v_2 \cdot \frac{4}{5} = 18$$

$$v_2 = 22,5 \text{ m/s}$$

16. MOVIMENTO CIRCULAR UNIFORMEMENTE VARIADO (MCUV)

Denomina-se movimento circular uniformemente variado o movimento de um corpo que descreve uma trajetória circular com uma aceleração tangencial (a_t) constante.

Nota: Quando a aceleração tangencial possui o mesmo sentido da velocidade instantânea, dizemos que o movimento circular é uniformemente acelerado. Quando a aceleração tangencial possui sentido contrário ao sentido da velocidade instantânea, dizemos que o movimento circular é uniformemente retardado.

No movimento circular uniformemente variado, temos as seguintes relações:

Função horária do espaço angular

$$s = s_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}$$

Dividindo toda a expressão pelo raio R , teremos:

$$\frac{s}{R} = \frac{s_0}{R} + \frac{v_0}{R} t + \frac{a}{R} \frac{t^2}{2}$$

Como:

$$\varphi = \frac{s}{R}, \varphi_0 = \frac{s_0}{R}, \omega_0 = \frac{v_0}{R} \text{ e } a = \frac{a}{R},$$

resulta:

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{at^2}{2}$$

Função horária da velocidade angular

$$v = v_0 + at$$

Dividindo toda a expressão pelo raio R , teremos:

$$\frac{v}{R} = \frac{v_0}{R} + \frac{a}{R} t$$

O que resulta em:

$$\omega = \omega_0 + at$$

Equação de Torricelli angular

$$v^2 = v_0^2 + 2a\Delta s$$

Dividindo toda a expressão pelo raio R^2 , teremos:

$$\frac{v^2}{R^2} = \frac{v_0^2}{R^2} + 2 \frac{a}{R} \frac{\Delta s}{R}$$

O que resulta em:

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2a\Delta\varphi$$

Velocidade escalar angular média

$$v_m = \frac{v + v_0}{2}$$

Dividindo toda a expressão pelo raio R , teremos:

$$\frac{v_m}{R} = \frac{\frac{v}{R} + \frac{v_0}{R}}{2}$$

O que resulta em:

$$\omega_m = \frac{\omega + \omega_0}{2}$$

17. O ÂNGULO PERCORRIDO DURANTE O ENÉSIMO SEGUNDO

Observemos que:

1º segundo equivale a: de 0 s até 1 s.

2º segundo equivale a: de 1 s até 2 s.

3º segundo equivale a: de 2 s até 3 s.

...

n° segundo equivale a: de $(n - 1)$ s até n s.

Sendo

$$\varphi = \frac{at^2}{2}$$

quando o corpo parte do repouso, observemos que:

Para $t_1 = n - 1$, obtemos:

$$\varphi_1 = \frac{a(n - 1)^2}{2}$$



Para $t_2 = n$, obtemos:

$$\varphi_2 = \frac{an^2}{2}$$

Assim, o ângulo percorrido durante o n ésimo segundo vale:

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$$

$$\Delta\varphi = \frac{an^2}{2} - \frac{a(n-1)^2}{2}$$

$$\therefore \Delta\varphi = \frac{a}{2} [n^2 - (n-1)^2]$$

$$\therefore \Delta\varphi = \frac{a}{2} [n^2 - (n^2 - 2n + 1)]$$

$$\Delta\varphi = \frac{a}{2} (2n - 1)$$

Caso o corpo tenha uma velocidade inicial ω_0 , então:

$$\varphi = \omega_0 t + \frac{at^2}{2}$$

Para $t_1 = n - 1$ e $t_2 = n$, temos:

$$\varphi_1 = \omega_0(n-1) + \frac{a(n-1)^2}{2}$$

$$\varphi_2 = \omega_0 n + \frac{an^2}{2}$$

Logo,

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$$

$$\therefore \Delta\varphi = \left(\omega_0 n + \frac{an^2}{2} \right) - \left(\omega_0(n-1) + \frac{a(n-1)^2}{2} \right)$$

$$\therefore \Delta\varphi = \omega_0(n - n + 1) - \frac{a}{2} [n^2 - (n-1)^2]$$

$$\therefore \Delta\varphi = \omega_0 - \frac{a}{2} [n^2 - (n^2 - 2n + 1)]$$

$$\therefore \Delta\varphi = \omega_0 - \frac{a}{2} (2n - 1)$$

$$\Delta\varphi = \omega_0 - \frac{a}{2} (2n - 1)$$

onde n é o n ésimo segundo do movimento e $\Delta\varphi$ é o ângulo percorrido em determinado segundo.

EXEMPLO 11: Uma partícula em movimento circular uniformemente variado tem sua velocidade angular alterada de 2π rad/s para 10π rad/s durante 20 s. Calcule o número de voltas que a partícula efetua nesse intervalo de tempo.

Resolução:

$$\omega = \omega_0 + \gamma t$$

$$10\pi = 2\pi + \gamma 20$$

Logo

$$\gamma = \frac{2\pi}{5} \text{ rad/s}^2$$

Função de Torricelli

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\gamma\Delta\theta$$

$$100\pi^2 = 4\pi^2 + 2 \frac{2\pi}{5} \Delta\theta$$

$$\Delta\phi = 120\pi \text{ rad}$$

regra de três

$$1 \text{ volta} \Rightarrow 2\pi \text{ rad}$$

$$n \text{ voltas} \Rightarrow 120\pi \text{ rad}$$

logo

$$n = 60$$

Exemplo 12: Uma partícula em movimento circular uniformemente variado tem sua velocidade angular alterada de 2π rad/s para 10π rad/s durante 20 s. Calcule o número de voltas que a partícula efetua nesse intervalo de tempo.

Resolução:

$$\omega = \omega_0 + \gamma t$$

$$10\pi = 2\pi + \gamma 20$$

Logo

$$\gamma = \frac{2\pi}{5} \text{ rad/s}^2$$

Função de Torricelli

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\gamma\Delta\theta$$

$$100\pi^2 = 4\pi^2 + 2 \frac{2\pi}{5} \Delta\theta$$

$$\Delta\phi = 120\pi \text{ rad}$$

regra de três

$$1 \text{ volta} \Rightarrow 2\pi \text{ rad}$$



$n \text{ voltas} \Rightarrow 120 \pi \text{ rad}$
 logo
 $n = 60$

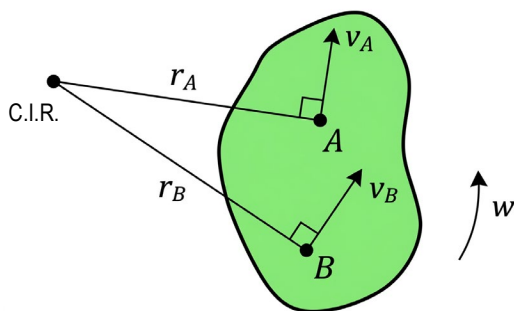
18. Aprofundamento ITA/IME - Centro instantâneo de Rotação (C.I.R.)

Para corpos rígidos que descreve um movimento genérico no plano (em duas dimensões), o conceito de centro instantâneo de rotação permite calcular convenientemente a velocidade angular desconhecida do corpo rígido ou velocidades lineares desconhecidas de pontos no corpo rígido. O centro instantâneo é um ponto imaginário, é como se fosse um "atalho" matemático que permite o cálculo dessas incógnitas.

O centro instantâneo também é chamado de centro instantâneo de velocidade zero (CI). Está em um eixo imaginário de velocidade zero, sobre o qual o corpo parece girar em um dado instante. Este eixo é sempre perpendicular ao plano de movimento.

Existem três casos básicos a serem considerados ao resolver problemas usando a abordagem do centro instantâneo.

Caso 1 - Considere um corpo rígido girando em um plano. Desejamos determinar a velocidade de um ponto A no corpo rígido, dada a velocidade conhecida de outro ponto B no corpo rígido. As direções das velocidades são conhecidas e não são paralelas. A figura ilustra a configuração do problema.



Onde:

v_A é a velocidade do ponto A no instante mostrado, v_B é a velocidade do ponto B, no instante mostrado, CI é a intersecção das linhas de r_A e r_B sendo r_A a distância a partir do CI para o ponto A, no instante mostrado. Essa distância é traçada de maneira que fique perpendicular ao vetor velocidade v_A , r_B é a distância do CI ao ponto B, no instante mostrado. Essa distância é traçada como perpendicular à velocidade v_B e ω é a velocidade angular do corpo rígido, no instante mostrado.

DICA IMPORTANTE: As distâncias r_A e r_B são geralmente determinadas a partir da geometria do corpo rígido e da trigonometria.

Observe que as linhas r_A e r_B são desenhadas na direção que resultará na convergência para um ponto (o centro instantâneo IC). Observe também que a direção das velocidades v_A e v_B corresponde à direção de rotação do corpo rígido. A velocidade do ponto A é dada por

$$v_A = \omega \cdot r_A \quad (1)$$

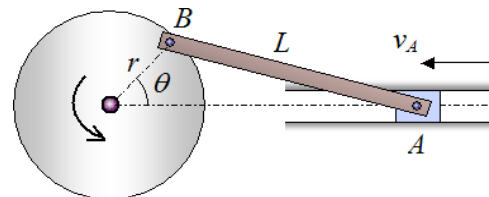
A velocidade do ponto B é dada por

$$v_B = \omega \cdot r_B \quad (2)$$

Combinando as equações (1) e (2) para eliminar a variável ω , e obtemos

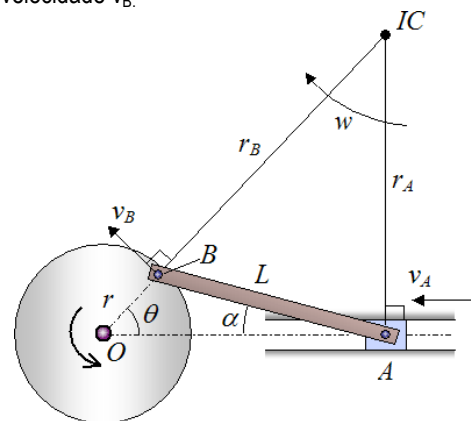
$$\frac{v_A}{v_B} = \frac{r_A}{r_B} \quad (3)$$

Exemplo 13: Encontre a velocidade do ponto B no mecanismo de manivela se a velocidade do ponto A for v_A , na direção mostrada. A informação é dada na figura.



Solução:

Configure a solução conforme descrito abaixo, com as novas variáveis apresentadas como mostrado. A linha r_A é desenhada de maneira que fique perpendicular à velocidade v_A . A linha r_B é desenhada como uma extensão da linha que passa através do ponto O e ponto B. O ponto B traça um círculo durante o movimento da cambota. Por geometria, a velocidade v_B é tangente a este círculo no ponto B. Também pela geometria, a linha r_B é perpendicular à velocidade v_B .





Pela geometria, a distância OA é dada por

$$OA = L \cos \alpha + \cos \theta \quad (4)$$

Também temos,

$$L \sin \alpha = r \sin \theta$$

$$\alpha = \sin^{-1} \left(\frac{r}{L} \sin \theta \right) \quad (5)$$

Substitua a equação (5) na equação (4) e obtemos

$$OA = L \cos \left(\sin^{-1} \left(\frac{r}{L} \sin \theta \right) \right) + \cos \theta$$

Os pontos O, A e CI formar um triângulo retângulo. Portanto, podemos usar a trigonometria para resolver r_A e r_B :

$$r_A = OA \cdot \tan \theta \quad (6)$$

$$r_B + r = \frac{OA}{\cos \theta}$$

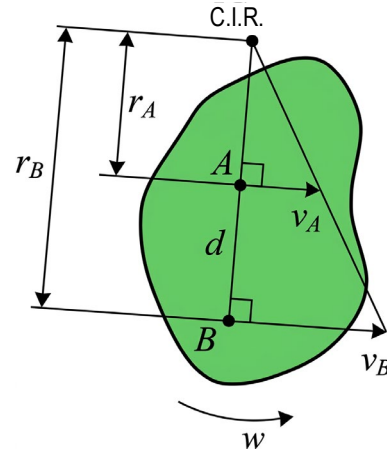
$$r_B = \frac{OA}{\cos \theta} - r \quad (7)$$

Com v_A conhecido, substitua as equações (6) e (7) pela equação (3), para resolver a velocidade do ponto B (v_B). Portanto,

$$v_B = v_A \cdot \frac{OA - r \cdot \cos \theta}{OA \cdot \sin \theta}$$

Para o Caso 1, existe um caso especial em que as velocidades nos pontos A e B estão apontando na mesma direção (paralela), e a linha que passa pelos pontos A e B não é perpendicular à direção dessas velocidades. Nesse caso, as linhas r_A e r_B são paralelas e não se cruzam. Isto significa que r_A e r_B são infinitamente longos, e o CI reside no infinito. Como resultado, $\omega = 0$ e todas as partículas no corpo rígido têm a mesma velocidade (ou seja, a magnitude das velocidades e a direção das velocidades de todas as partículas no corpo rígido são as mesmas).

Caso 2 - Considere um corpo rígido girando em um plano. Desejamos determinar a velocidade angular do corpo rígido, dadas as velocidades conhecidas dos pontos A e B no corpo rígido. Essas velocidades são paralelas e apontando na mesma direção. A linha que une os pontos A e B é perpendicular à direção das velocidades. A figura abaixo ilustra a configuração do problema.



Observe que CI é a interseção da linha que passa pelos pontos A e B, e a linha que une a ponta dos vetores v_A e v_B . A distância entre os pontos A e B é d. Por semelhança de triângulos:

$$\frac{v_B - v_A}{d} = \frac{v_B}{r_B} = \frac{v_A}{r_A} \quad (8)$$

A velocidade do ponto A é dada por:

$$v_A = \omega \cdot r_A \quad (9)$$

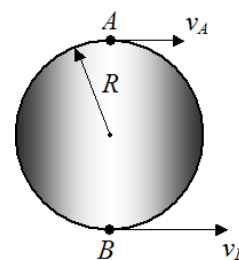
A velocidade do ponto B é dada por:

$$v_B = \omega \cdot r_B \quad (10)$$

Combinação das equações (8), (9) e (10), segue-se que a velocidade angular é

$$\omega = \frac{v_B - v_A}{d} \quad (11)$$

Exemplo 14: Uma roda de raio R tem velocidades como mostrado nos pontos A e B. Determine a velocidade angular da roda em torno do ponto B por exemplo.



Resolução:

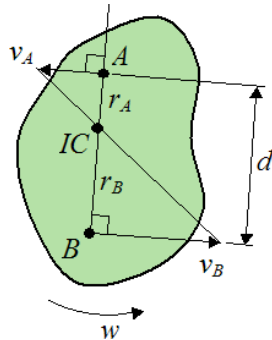
A distância entre os pontos A e B é 2R. Na equação (11), a velocidade angular é

$$\omega = \frac{v_B - v_A}{2R}$$

Caso 3 - Considere um corpo rígido girando em um plano. Desejamos determinar a velocidade angular do corpo rígido, dadas as velocidades dos pontos A e B no corpo rígido. Essas velocidades estão apontando em paralelo, mas em direções opostas. A



linha que une os pontos A e B é perpendicular à direção das velocidades. A figura abaixo ilustra a configuração do problema.



Observe que **CI** é a interseção da linha que passa pelos pontos A e B, e a linha que une a ponta de vetores de v_A e v_B . Ao contrário do caso anterior, o **CI** encontra-se entre os pontos A e B. A distância entre os pontos A e B é d . Por triângulos semelhantes:

$$\frac{v_B + v_A}{d} = \frac{v_B}{r_B} = \frac{v_A}{r_A} \quad (12)$$

A velocidade do ponto A é dada por

$$v_A = \omega \cdot r_A \quad (13)$$

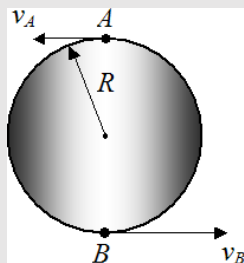
A velocidade do ponto B é dada pela equação

$$v_B = \omega \cdot r_B \quad (14)$$

Da combinação das equações (12) a (14), segue-se que a velocidade angular é

$$\omega = \frac{v_B + v_A}{d} \quad (15)$$

Exemplo 15: Uma roda de raio R tem velocidades como mostrado nos pontos A e B. Determine a velocidade angular da roda.



Solução:

A distância entre os pontos A e B é $2R$. Na equação (15), a velocidade angular é

$$\omega = \frac{v_B + v_A}{2R}$$

Observe que a localização espacial do centro instantâneo pode mudar com o tempo. Portanto, em geral, seu uso se aplica apenas no instante considerado, o que corresponde às informações fornecidas no problema, no instante considerado. Em geral, se as velocidades dos pontos A e B mudam, e / ou suas direções mudam, um novo centro instantâneo deve ser calculado para resolver as (novas) velocidades lineares desconhecidas ou velocidades angulares.

Em geral, a abordagem de centro instantâneo não deve ser usada para encontrar a aceleração de pontos em um corpo rígido. Isso ocorre porque o centro instantâneo (**CI**) geralmente não tem aceleração zero.

EXERCÍCIOS INICIAIS

1. (Unicamp) Uma sonda descreve, em torno da Lua, uma órbita circular de raio $r = 1,848 \times 10^6 \text{ m}$ e dá uma volta completa num período $T = 2,0 \text{ h}$. Nesse movimento circular uniforme, qual a velocidade escalar da sonda em relação ao centro da Lua? Se necessário, Use $\pi \approx 3,0$.

- a) 256,6 m/s.
- b) 1540 m/s.
- c) 3696 km/s.
- d) 5544 km/s.

2. (Uece) Uma partícula move-se em um plano horizontal, descrevendo um movimento circular uniforme com raio r e centro em um ponto C. Em um determinado instante, a partícula abandona essa trajetória circular, seguindo uma direção retilínea tangente à curva de raio r . Após permanecer por um intervalo de tempo Δt em movimento retilíneo, a partícula inicia um novo movimento circular uniforme, agora em uma trajetória de raio $R > r$, também de centro em C. Desprezando quaisquer efeitos resistivos, assinale a opção que representa corretamente o módulo da velocidade vetorial média da partícula ao longo do deslocamento retilíneo entre as duas trajetórias circulares concêntricas.

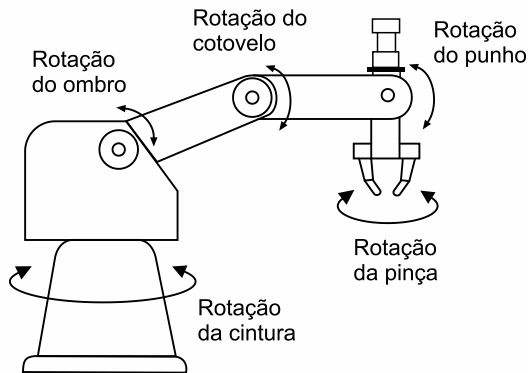
- a) $\frac{R^2 - r^2}{\Delta t}$.
- b) $\sqrt{\frac{R^2 - r^2}{\Delta t}}$.
- c) $\frac{\sqrt{R^2 - r^2}}{\Delta t}$.
- d) $\frac{R^2 + r^2}{\Delta t}$.



3. (Uerj) Admita que os feixes de elétrons, ao percorrerem o anel principal do Sirius, completam, com rapidez constante, 80.000 voltas em um segundo. Admita, ainda, que o raio do anel possui 500 m e $\pi = 3$.

Calcule, em segundos, o período do movimento circular dos elétrons e determine, em m/s, a rapidez alcançada por esses elétrons no acelerador Sirius.

4. (Famerp) A figura mostra as diversas possibilidades de rotação de um braço robótico.



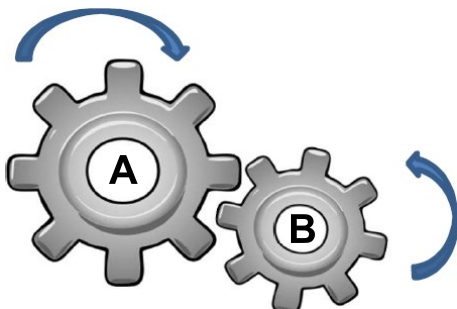
(<https://professor.ufop.br>)

Suponha que apenas a pinça desse braço girou e realizou uma rotação de 90° em um intervalo de tempo 0,50 s. A velocidade angular média dessa rotação foi de

- 2π rad/s.
- 4π rad/s.
- π rad/s.
- 6π rad/s.
- 8π rad/s.

5. (Integrado - Medicina) Vários dispositivos que utilizamos usa o esquema de rodas girando em movimento solidário, como por exemplo, o sistema de marchas de uma bicicleta, a máquina de um relógio analógico entre outras.

Considere um sistema que utiliza duas rodas dentadas de diâmetros diferentes, que giram solidariamente em movimento circular e uniforme. O diâmetro da roda A é 2 vezes maior que o diâmetro da roda B.



Podemos afirmar corretamente:

- A velocidade angular da roda A é igual da roda B.
- A frequência da roda B é duas vezes maior que a frequência da roda A.
- Os períodos das rodas são iguais.
- A roda A possui uma velocidade escalar maior que a roda B, pois seu diâmetro é maior.
- As frequências das rodas são iguais.

6. (Famerp) Uma equipe médica filma uma cirurgia ortopédica na qual foi utilizada uma serra óssea, com um disco que gira em torno de um eixo, como a da imagem.

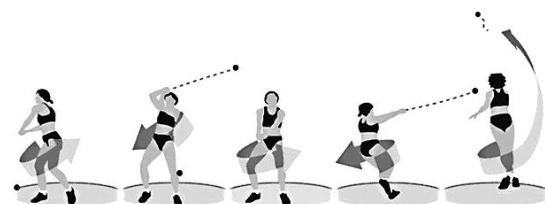


(www.medicaexpo.com. Adaptado.)

Posteriormente, ao assistir ao vídeo, um dos enfermeiros reparou que, na gravação, a logomarca S do disco da serra parecia parada, mesmo com o disco girando. Para que a logomarca do disco pareça parada, é necessário que o disco complete um número exato de voltas a cada imagem obtida pela filmadora. Sabendo que a taxa de quadros do vídeo é de 30 quadros por segundo, ou seja, 30 imagens são obtidas para formar cada segundo de vídeo, uma das possíveis velocidades de rotação do disco é

- 1.200 rpm.
- 1.800 rpm.
- 300 rpm.
- 600 rpm.
- 1.500 rpm.

7. (Fmp) O lançamento de martelo é uma modalidade olímpica de atletismo na qual o atleta gira uma esfera de metal presa por um cabo e a solta, visando a que a esfera atinja a maior distância possível após o lançamento, conforme mostra a figura abaixo.



Suponha que, no momento do lançamento, a esfera realizava um movimento circular de raio 1,20 m,

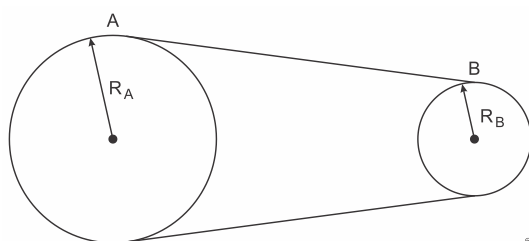


girando a uma velocidade angular de $25,0 \text{ rad/s}$.

A velocidade da esfera no momento do lançamento, em m/s , é de, aproximadamente,

- a) 30,0
- b) 26,2
- c) 36,0
- d) 25,0
- e) 20,8

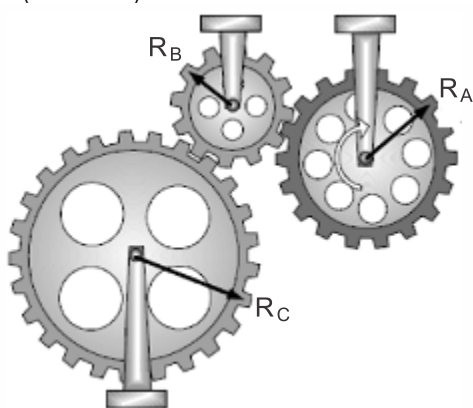
8. (Espcex (Aman)) Duas polias, A e B, ligadas por uma correia inextensível têm raios $R_A = 60 \text{ cm}$ e $R_B = 20 \text{ cm}$, conforme o desenho abaixo. Admitindo que não haja escorregamento da correia e sabendo que a frequência da polia A é $f_A = 30 \text{ rpm}$, então a frequência da polia B é



Desenho ilustrativo - fora de escala

- a) 10 rpm.
- b) 20 rpm.
- c) 80 rpm.
- d) 90 rpm.
- e) 120 rpm.

9. (Mackenzie)



As engrenagens A, B e C, de raios R_A , R_B e R_C , acima desenhadas, fazem parte de um conjunto que funciona com um motor acoplado à engrenagem de raio $R_A = 20 \text{ cm}$, fazendo-a girar com frequência constante de 120 rpm , no sentido horário. Conhecendo-se o raio $R_B = 10 \text{ cm}$ e

$R_C = 25 \text{ cm}$, pode-se afirmar que no SI (Sistema Internacional de Unidades) a aceleração de um ponto da periferia da engrenagem C, tem módulo igual a

(Considere $\pi^2 = 10$)

- a) 1,6
- b) 16,0
- c) 25,6
- d) 32,0
- e) 2560

10. (Unicamp) Anemômetros são instrumentos usados para medir a velocidade do vento. A sua construção mais conhecida é a proposta por Robinson em 1846, que consiste em um rotor com quatro conchas hemisféricas presas por hastes, conforme figura abaixo. Em um anemômetro de Robinson ideal, a velocidade do vento é dada pela velocidade linear das conchas. Um anemômetro em que a distância entre as conchas e o centro de rotação é $r = 25 \text{ cm}$, em um dia cuja velocidade do vento é $v = 18 \text{ km/h}$, teria uma frequência de rotação de



THE ROBINSON ANEMOMETER.

Se necessário, considere $\pi \approx 3$.

- a) 3 rpm.
- b) 200 rpm.
- c) 720 rpm.
- d) 1200 rpm.



Gabarito EXERCÍCIOS INICIAIS:

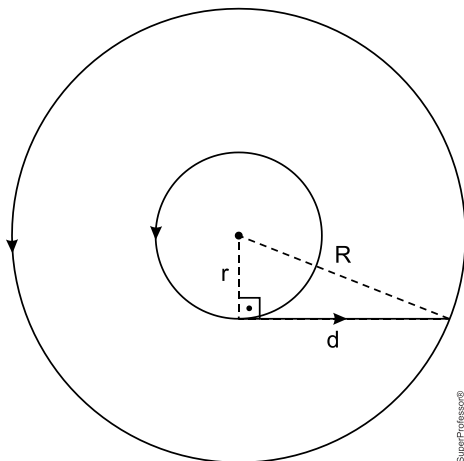
Resposta da questão 1: [B]

Aplicando a expressão da velocidade escalar para o movimento circular uniforme:

$$v = \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{2\pi r}{T} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 1,848 \times 10^6}{7.200} \therefore v = 1.540 \text{ m/s.}$$

Resposta da questão 2: [C]

Da figura abaixo, temos que:



$$R^2 = r^2 + d^2$$

$$d = \sqrt{R^2 - r^2}$$

Logo, a velocidade vetorial média da partícula foi de:

$$v = \frac{\sqrt{R^2 - r^2}}{\Delta t}$$

Resposta da questão 3:

Período do movimento circular:

$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{80000}$$

$$\therefore T = 1,25 \cdot 10^{-5} \text{ s}$$

Velocidade dos elétrons:

$$v = 2\pi f R = 2 \cdot 3 \cdot 80000 \cdot 500$$

$$\therefore v = 2,4 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

Resposta da questão 4: [C]

A velocidade angular média dessa rotação foi de:

$$\omega = \frac{\Delta \theta}{\Delta t} = \frac{\pi/2}{0,5}$$

$$\therefore \omega = \pi \text{ rad/s}$$

Resposta da questão 5: [B]

As engrenagens em movimento solidário possuem a mesma velocidade linear ou escalar dos pontos mais externos não importando que seus diâmetros sejam diferentes.

A partir desta característica, pode-se determinar a relação entre outras grandezas:

A velocidade angular, frequência e aceleração centrípeta da roda B são o dobro da roda A, em contrapartida o período de revolução da roda A é o dobro da roda B.

Resposta da questão 6: [B]

$$f = 30 \frac{\text{rot}}{\text{s}} \cdot \frac{60 \text{ s}}{1 \text{ min}} \Rightarrow f = 1.800 \text{ rpm}$$

Resposta da questão 7: [A]

A relação entre a velocidade angular, o raio da curva e a velocidade tangencial é dada pela equação:

$$v = \omega \cdot R$$

Substituindo os valores fornecidos, temos:

$$v = 25,0 \text{ rad/s} \cdot 1,20 \text{ m} \therefore v = 30,0 \text{ m/s}$$

Resposta da questão 8: [D]

Para a situação dada, temos que:

$$v_A = v_B$$

$$2\pi f_A R_A = 2\pi f_B R_B$$

$$30 \cdot 60 = f_B \cdot 20$$

$$\therefore f_B = 90 \text{ rpm}$$

Resposta da questão 9: [C]

O acoplamento das engrenagens é de tal modo que as velocidades tangenciais nos seus pontos de periferia são iguais.

$$v_A = v_B = v_C$$

Como a velocidade tangencial é dada por:

$$v = 2\pi R f, \text{ então:}$$

$$2\pi R_A f_A = 2\pi R_B f_B = 2\pi R_C f_C$$

$$R_A f_A = R_B f_B = R_C f_C$$

E, com isso, temos como calcular a frequência da engrenagem C:

$$R_A f_A = R_C f_C \Rightarrow f_C = \frac{R_A f_A}{R_C} \Rightarrow f_C = \frac{20 \text{ cm} \cdot 120 \text{ rpm}}{25 \text{ cm}} \therefore f_C = 96 \text{ rpm}$$

Passando essa frequência para hertz, temos:



$$f_C = 96 \text{ rpm} \cdot \frac{1 \text{ Hz}}{60 \text{ rpm}} \therefore f_C = 1,6 \text{ Hz}$$

Finalmente, a aceleração centrípeta da engrenagem C é dada por:

$$a_{c(C)} = \frac{v_C^2}{R_C} = \frac{(2\pi \cdot 0,25 \text{ m} \cdot 1,6 \text{ Hz})^2}{0,25 \text{ m}} = \frac{4 \pi^2 \cdot (0,25 \text{ m})^2 \cdot (1,6 \text{ s}^{-1})^2}{0,25 \text{ m}} \therefore a_{c(C)} = 25,6 \text{ m/s}^2$$

Resposta da questão 10: [B]

Dados:

$$v = 18 \text{ km/h} = 5 \text{ m/s}; r = 25 \text{ cm} = 0,25 \text{ m}; \pi = 3.$$

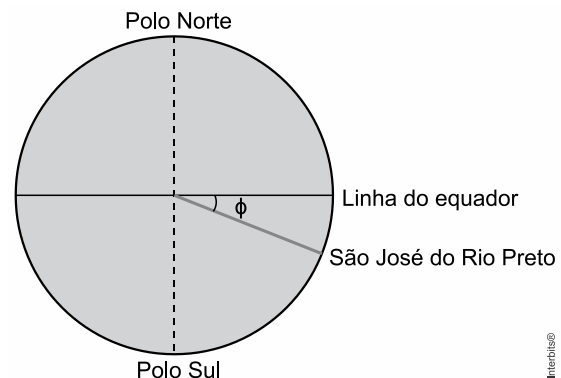
$$v = 2\pi r f \Rightarrow f = \frac{v}{2\pi r} = \frac{5}{2 \times 3 \times 0,25} = \frac{5}{1,5} \text{ Hz} = \frac{5}{1,5} \times 60 \text{ rpm} \Rightarrow \boxed{f = 200 \text{ rpm.}}$$

Exercícios de Aprofundamento

1. (Espcex (Aman) 2022) Em um parque de diversão, dois carrinhos, A e B, descrevem um movimento circular uniforme em pistas distintas, concêntricas, muito próximas e de raios R_A e R_B respectivamente. Quando se movem no mesmo sentido, os carrinhos encontram-se, lado a lado, a cada 40 s e, quando se movem em sentidos opostos, o encontro ocorre a cada 10 s. Os carrinhos possuem velocidades escalares diferentes, e os respectivos módulos das velocidades escalares são os mesmos nas duas situações descritas. Podemos afirmar que a razão entre o módulo da velocidade escalar do carrinho A e do carrinho B é de:

- $10R_A/3R_B$
- $2R_A/R_B$
- $5R_A/3R_B$
- $8R_A/5R_B$
- $R_A/4R_B$

2. Uma pessoa parada sobre a linha do equador terrestre apresenta uma velocidade tangencial, devido à rotação da Terra, de módulo próximo a 1.700 km/h.



Sabendo que $\sin 21^\circ = 0,36$ e $\cos 21^\circ = 0,93$, uma pessoa em repouso sobre o solo, em São José do Rio Preto, cuja latitude é aproximadamente $\phi = 21^\circ$ Sul, tem uma velocidade tangencial de módulo próximo a

- 1.830 km/h.
- 610 km/h.
- 1.700 km/h.
- 4.700 km/h.
- 1.580 km/h.

3. Em uma fábrica, um técnico deve medir a velocidade angular de uma polia girando. Ele apaga as luzes do ambiente e ilumina a peça somente com a luz de uma lâmpada estroboscópica, cuja frequência pode ser continuamente variada e precisamente conhecida. A polia tem uma mancha branca na lateral.



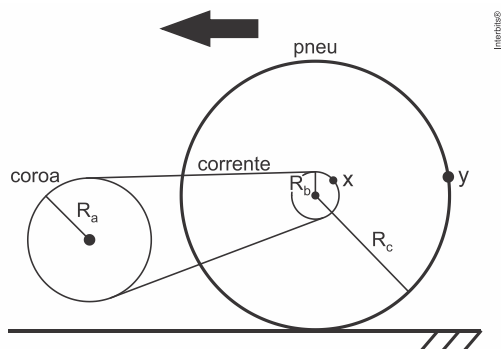
Ele observa que, quando a frequência de *flashes* é 9 Hz, a mancha na polia parece estar parada. Então aumenta vagarosamente a frequência do piscar da lâmpada e só quando esta atinge 12 Hz é que, novamente, a mancha na polia parece estar parada. Com base nessas observações, ele determina que a velocidade angular da polia, em rpm, é

- 2.160
- 1.260
- 309
- 180
- 36

4. Uma partícula de massa 12,5 g se move em movimento circular e uniforme com frequência igual a 120 rpm, numa trajetória de raio igual a 0,5 m. Considerando $g = 10,0 \text{ m/s}^2$ e $\pi = 3,14$, a respeito do movimento da partícula, é CORRETO afirmar que

- a força resultante sobre a partícula é nula, já que o movimento é uniforme.
- a partícula completa uma volta a cada 2 s.
- o vetor aceleração centrípeta é paralelo ao vetor velocidade durante todo o movimento.
- a força resultante que atua sobre a partícula possui módulo constante igual a $1,25 \cdot 10^{-1} \text{ N}$.
- o módulo da aceleração vetorial média para o deslocamento entre duas posições diametralmente opostas é igual a $50,24 \text{ m/s}^2$.

5. Assuma que as dimensões das engrenagens e do pneu de uma bicicleta sejam as indicadas abaixo.



Dados: $R_a = 18 \text{ cm}$; $R_b = 6 \text{ cm}$; $R_c = 20 \text{ cm}$ (figura fora de escala)

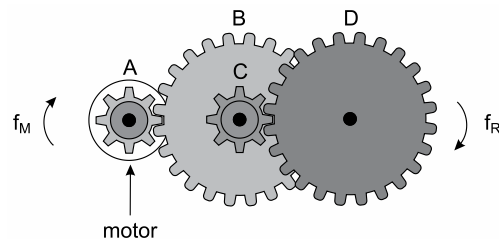
- Considerando-se os pontos x e y indicados na figura, qual deles terá menor velocidade linear? Explique sua resposta.
- Pedalando em uma bicicleta com as dimensões descritas, um ciclista foi instruído de que, para vencer uma corrida, deve se manter à velocidade constante de 65 km/h durante toda a prova. Qual o número de pedaladas por segundo que ele deve dar para manter a velocidade indicada?

6. Considere o movimento de rotação de dois objetos

presos à superfície da Terra, sendo um deles no equador e o outro em uma latitude norte, acima do equador. Considerando somente a rotação da Terra, para que a velocidade tangencial do objeto que está a norte seja a metade da velocidade do que está no equador, sua latitude deve ser

- 60° .
- 45° .
- 30° .
- $0,5^\circ$.

7. Um pequeno motor a pilha é utilizado para movimentar um carrinho de brinquedo. Um sistema de engrenagens transforma a velocidade de rotação desse motor na velocidade de rotação adequada às rodas do carrinho. Esse sistema é formado por quatro engrenagens, A, B, C e D, sendo que A está presa ao eixo do motor, B e C estão presas a um segundo eixo e D a um terceiro eixo, no qual também estão presas duas das quatro rodas do carrinho.



(www.mecatronicaatual.com.br. Adaptado.)

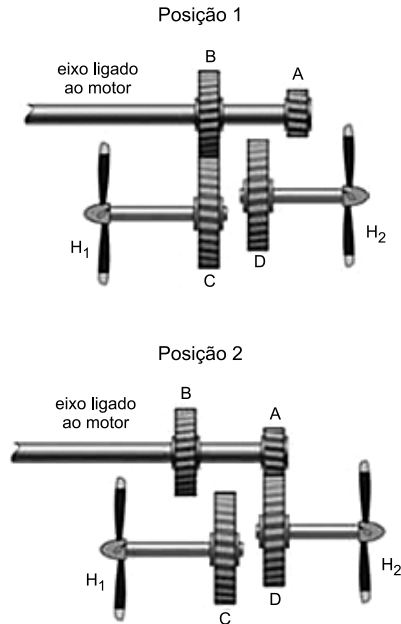
Nessas condições, quando o motor girar com frequência f_M , as duas rodas do carrinho girarão com frequência f_R . Sabendo que as engrenagens A e C possuem 8 dentes, que as engrenagens B e D possuem 24 dentes, que não há escorregamento entre elas e que $f_M = 13,5 \text{ Hz}$, é correto afirmar que f_R , em Hz, é igual a

- 1,5.
- 3,0.
- 2,0.
- 1,0.
- 2,5.

8. A figura representa, de forma simplificada, parte de um sistema de engrenagens que tem a função de fazer girar duas hélices, H_1 e H_2 . Um eixo ligado a um motor gira com velocidade angular constante e nele estão presas duas engrenagens, A e B. Esse eixo pode se movimentar horizontalmente assumindo a posição 1 ou 2. Na posição 1, a engrenagem B acopla-se à engrenagem C e, na posição 2, a engrenagem A acopla-se à engrenagem D. Com as



engrenagens B e C acopladas, a hélice H_1 gira com velocidade angular constante ω_1 e, com as engrenagens A e D acopladas, a hélice H_2 gira com velocidade angular constante ω_2 .



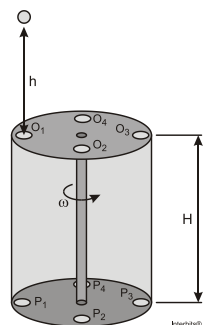
(<http://carros.hsw.uol.com.br>. Adaptado.)

Considere r_A , r_B , r_C , e r_D , os raios das engrenagens A, B, C e D, respectivamente. Sabendo que $r_B = 2 \cdot r_A$ e que $r_C = r_D$, é correto

afirmar que a relação $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ é igual a

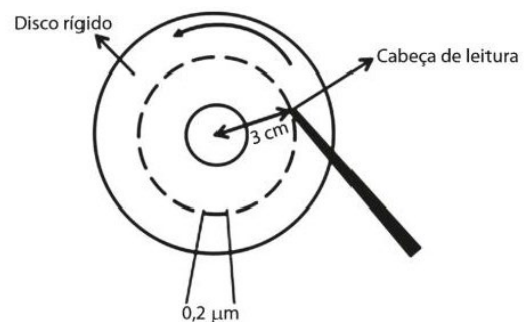
- a) 1,0.
- b) 0,2.
- c) 0,5.
- d) 2,0.
- e) 2,2.

9 O funcionamento de um dispositivo seletor de velocidade consiste em soltar uma esfera de uma altura h para passar por um dos orifícios superiores (O_1 , O_2 , O_3 , O_4) e, sucessivamente, por um dos orifícios inferiores (P_1 , P_2 , P_3 , P_4) conforme ilustrado a seguir.



Os orifícios superiores e inferiores mantêm-se alinhados, e o sistema gira com velocidade angular constante ω . Desprezando a resistência do ar e considerando que a esfera é liberada do repouso, calcule a altura máxima h para que a esfera atravesse o dispositivo.

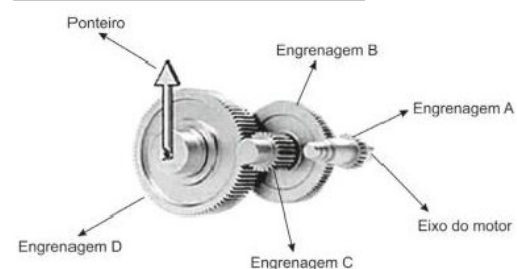
10 Considere um computador que armazena informações em um disco rígido que gira a uma frequência de 120 Hz. Cada unidade de informação ocupa um comprimento físico de 0,2 mm na direção do movimento de rotação do disco. Quantas informações magnéticas passam, por segundo, pela cabeça de leitura, se ela estiver posicionada a 3,0 cm do centro de seu eixo, como mostra o esquema simplificado apresentado abaixo? (Considere $\pi \approx 3$.)



- a) $1,62 \cdot 10^6$.
- b) $1,8 \cdot 10^6$.
- c) $64,8 \cdot 10^8$.
- d) $1,08 \cdot 10^8$.

11. (Enem) A invenção e o acoplamento entre engrenagens revolucionaram a ciência na época e propiciaram a invenção de várias tecnologias, como os relógios. Ao construir um pequeno cronômetro, um relojoeiro usa o sistema de engrenagens mostrado. De acordo com a figura, um motor é ligado ao eixo e movimenta as engrenagens fazendo o ponteiro girar. A frequência do motor é de 18 rpm, e o número de dentes das engrenagens está apresentado no quadro.

Engrenagem	Dentes
A	24
B	72
C	36
D	108

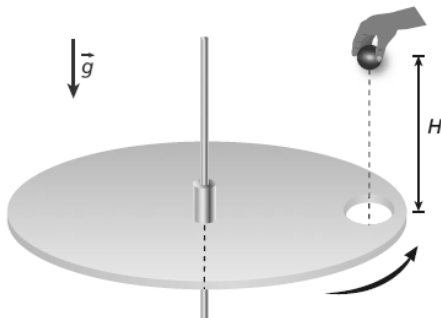


A frequência de giro do ponteiro, em rpm, é



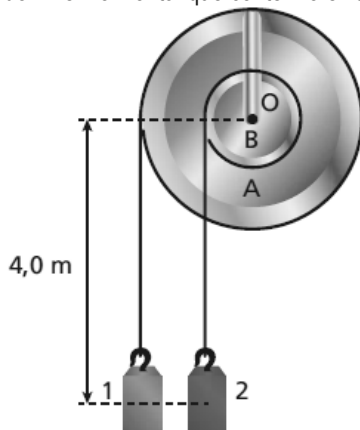
- a) 1
- b) 2
- c) 4
- d) 81
- e) 162

12. Um disco horizontal dotado de um furo circular gira horizontalmente em rotação uniforme com frequência f , conforme ilustra o esquema a seguir. Uma bola, cujo diâmetro é pouco menor que o desse furo, será abandonada do repouso de uma altura H em relação à superfície girante e deverá despencar verticalmente em queda livre de modo a trespassar o furo existente no disco enquanto este realiza um número N (inteiro) de voltas.



Sendo g a intensidade da aceleração da gravidade, determine o valor de N em função de H , g e f .

13. No esquema abaixo estão representadas, fora de escala, duas polias, **A** e **B**, rigidamente acopladas entre si e trespassadas pelo eixo de um motor em **O**. O raio de **A** é $R_A = 40$ cm e o de **B** é $R_B = 30$ cm. Em **A** e **B** estão enrolados fios ideais que prendem em suas extremidades livres dois blocos, 1 e 2, de dimensões desprezíveis, inicialmente distantes 4,0 m do nível horizontal que contém o eixo **O**.



Num determinado instante, o motor é ligado, impondo ao seu eixo uma aceleração escalar angular de módulo $0,2 \text{ rad/s}^2$, o que faz as polias girarem no sentido horário a partir do repouso e os blocos subirem.

- a) Qual dos blocos, 1 ou 2, atinge primeiro o nível horizontal que contém o eixo **O**?
- b) Depois de quanto tempo da situação inicial o bloco "vencedor" atinge esse nível?

14. Uma motocicleta encontra-se em movimento em uma estrada asfaltada. Cada uma de suas rodas tem raio $R = 25$ cm e gira com frequência $f = 10$ Hz. Sabendo que as rodas não deslizam no asfalto, calcule a velocidade da moto em km/h. (Use $\pi = 3,1$.)

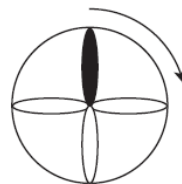
15. (Fuvest-SP) Qual a ordem de grandeza do número de voltas dadas pela roda de um automóvel ao percorrer uma estrada de 200 km?

- a) 10^2
- b) 10^3
- c) 10^5
- d) 10^7
- e) 10^9

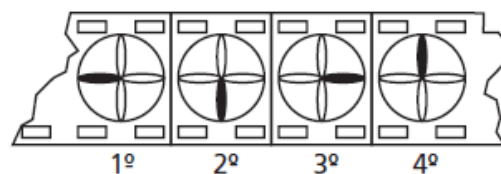
16. (UFRJ) O olho humano retém durante $1/24$ de segundo as imagens que se formam na retina. Essa memória visual permitiu a invenção do cinema. A filmadora bate 24 fotografias (fotogramas) por segundo.

Uma vez revelado, o filme é projetado à razão de 24 fotogramas por segundo. Assim, o fotograma seguinte é projetado no exato instante em que o fotograma anterior está desaparecendo de nossa memória visual, o que nos dá a sensação de continuidade.

Filma-se um ventilador cujas pás estão girando no sentido horário. O ventilador possui quatro pás simetricamente dispostas, uma das quais pintada de cor diferente, como ilustra a figura abaixo:



Ao projetarmos o filme, os fotogramas aparecem na tela na seguinte sequência:



que nos dá a sensação de que as pás estão girando no sentido anti-horário.

Calcule quantas rotações por segundo, no mínimo, as pás devem estar efetuando para que isso ocorra.

Nota:

• A ilusão de que as pás estão girando no sentido oposto ao real é devida ao fato de nosso cérebro interpretar que o movimento, de um fotograma para o outro, se dá no sentido do **menor** deslocamento angular.

17. A função horária do espaço angular de uma partícula que descreve uma circunferência de raio igual a 2 m é:

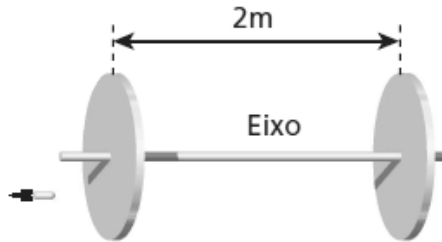
$$\varphi = \frac{3\pi}{2} + 2\pi t$$



com ϕ em radianos e t em segundos. Determine:

- a fase inicial;
- o período e a frequência;
- a velocidade escalar linear (admita-se π na resposta)

18. A figura representa dois discos de papelão fixados a um mesmo eixo, com rotação de frequência igual a 50 Hz. Os discos foram fixados em locais do eixo distantes 2 m um do outro.



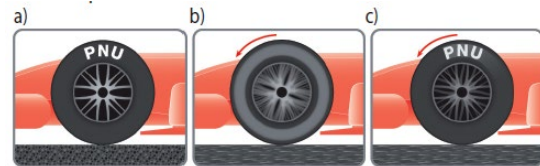
Um projétil é disparado paralelamente ao eixo, descolando-se em movimento suposto retilíneo e uniforme, per furando os dois discos. O ângulo entre o plano que contém o eixo e o furo no primeiro disco e o plano que contém o eixo e o furo no segundo disco é igual a 45° . Determine a velocidade do projétil, sabendo que, entre as duas perfurações, os discos giraram menos que meia volta.

19. (ITA-SP) Uma partícula move-se ao longo de uma circunferência circunscrita em um quadrado de lado L com velocidade angular constante. Na circunferência inscrita nesse mesmo quadrado, outra partícula move-se com a mesma velocidade angular. A razão entre os módulos das respectivas velocidades lineares dessas partículas é:

- $\sqrt{2}$
- $2\sqrt{2}$
- $\frac{\sqrt{2}}{2}$
- $\sqrt{\frac{3}{2}}$
- $\frac{\sqrt{3}}{2}$

20. Considere dois pilotos A e B que, ao disputarem uma prova de automobilismo, percorrem o circuito no mesmo sentido e com velocidades escalares constantes. O piloto A completa uma volta em 1 min 40 s, enquanto o piloto B faz o mesmo em 1 min 36 s. Supondo que, em determinado instante, B esteja ao lado de A, quanto tempo depois dessa situação a vantagem de B sobre A será de um quarto de volta?

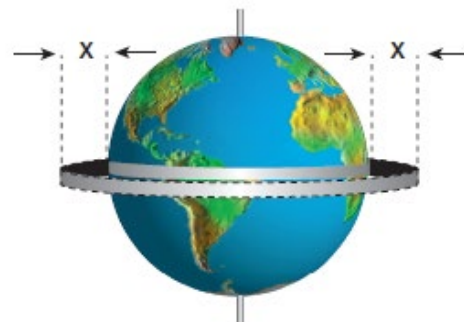
21. (Unicamp-SP) O quadro (a), abaixo, refere-se à imagem de televisão de um carro parado, em que podemos distinguir claramente a marca do pneu ("PNU").



Quando o carro está em movimento, a imagem da marca aparece como um borrão em volta de toda a roda, como ilustrado em (b). A marca do pneu volta a ser nítida, mesmo com o carro em movimento, quando esse atinge determinada velocidade. Essa ilusão de movimento na imagem gravada é devida à frequência de gravação de 30 quadros por segundo (30 Hz). Considerando que o diâmetro do pneu é igual a 0,6 m e $\pi = 3,0$, responda:

- Quantas voltas o pneu completa em um segundo quando a marca filmada pela câmera aparece parada na imagem, mesmo estando o carro em movimento?
- Qual a menor frequência angular ω do pneu em movimento quando a marca aparece parada?
- Qual a menor velocidade linear (em m/s) que o carro pode ter na figura (c)?

22. Considere a Terra perfeitamente esférica e suponha um aro nela ajustado, na linha do equador (que mede aproximadamente 40 000 km).



Se o comprimento desse aro for aumentado de 1 m, surgirá uma folga x entre ele e a Terra, como está indicado na figura. Dentre as alternativas seguintes, indique aquela que traz o maior animal capaz de passar por essa folga.

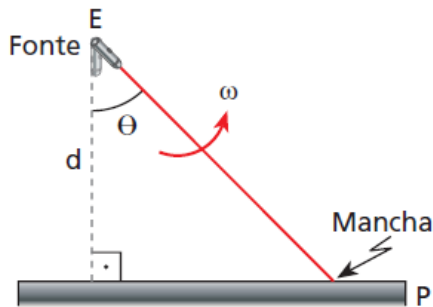
- pulga
- aranha
- rato
- gato
- elefante

23. (Olimpíada Brasileira de Física) Em Física, define-se a quantidade de movimento angular (momento angular), L , de um corpo que gira com velocidade angular constante ω em torno de um eixo como sendo $L = I \omega$, em que I é uma grandeza denominada momento de inércia, que depende da massa do corpo e de como ela está distribuída em torno do eixo de rotação. Para um disco de massa M e raio R , o momento de inércia em relação a um eixo perpendicular a ele, passando pelo seu centro, é dado por $I = \frac{MR^2}{2}$.



Considere um disco como esse, de raio 10 cm, girando com frequência de 0,5 Hz. Quantas voltas serão dadas em 15 segundos por um outro disco que possui a mesma massa do primeiro disco e metade do seu raio, tendo, porém, o mesmo momento angular?

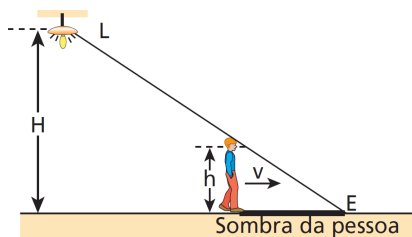
24. Uma pequena fonte de luz (laser), situada a uma distância d de um paredão P , gira em torno de um eixo E , com velocidade angular constante ω , emitindo horizontalmente um estreito feixe de luz que varre o paredão. A "mancha" dessa luz no paredão move-se em linha reta ao longo dele, com velocidade instantânea de módulo v . A figura representa o evento visto de cima:



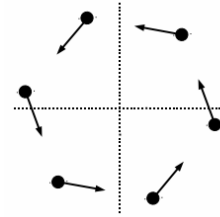
expresse v em função de ω , d e do ângulo θ indicado na figura.

25. À noite, numa quadra esportiva, uma pessoa de altura h caminha em movimento retilíneo e uniforme com velocidade escalar v . Apenas uma lâmpada L , que pode ser considerada uma fonte luminosa puntiforme e que se encontra a uma altura H do piso, está acesa. Determine, em função de H , h e v , a velocidade escalar média v_E da extremidade E da sombra da pessoa projetada no chão.

Obs.: Tente resolver este exercício usando o CIR.



26. (ITA) Um problema clássico de cinemática considera objetos que, a partir de certo instante, se movem conjuntamente com velocidade de módulo constante a partir dos vértices de um polígono regular, cada qual apontando à posição instantânea do objeto vizinho em movimento. A figura mostra a configuração desse movimento múltiplo no caso de um hexágono regular.

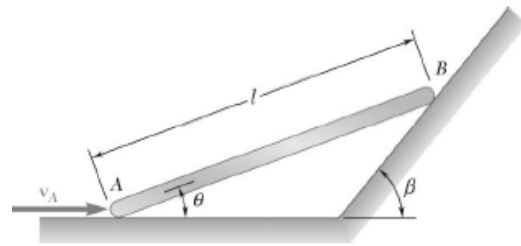


Considere que o hexágono tinha 10,0 m de lado no instante inicial e que os objetos de movimentam com velocidade de módulo constante de 2,00 m/s.

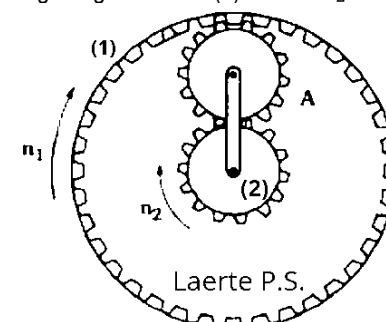
Após quanto tempo estes se encontrarão e qual deverá ser a distância percorrida por cada um dos seis objetos?

- a) 5,8s e 11,5m.
- b) 11,5s e 5,8m.
- c) 10,0s e 20,0m.
- d) 20,0s e 10,0m.
- e) 20,0s e 40,0m.

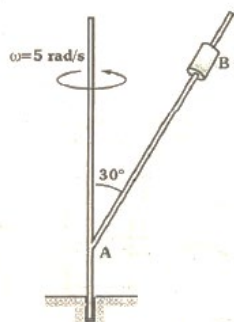
27. (Laerte Pereira) A haste AB pode deslizar livremente ao longo do piso plano e horizontal e do plano inclinado ambos lisos. Sabendo que a velocidade do ponto A no instante mostrado na figura é v_A , determine o módulo da velocidade da extremidade B .



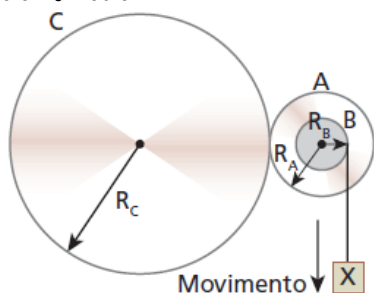
28. (Laerte Pereira) No sistema, qual o número de revoluções em torno de seu eixo que a engrenagem A fará se ao mesmo tempo a roda dentada maior (1) fizer n_1 revoluções e a engrenagem central (2), fizer n_2 revoluções? O raio interno da roda dentada é R e da engrenagem central (2) é r $n_1 > n_2$.



29. (Laerte Pereira) Determine o módulo da velocidade do colarinho quando ele está a 2 m do ponto A , sabendo que o colarinho desce com rapidez constante de 5 m/s em relação ao eixo AB .

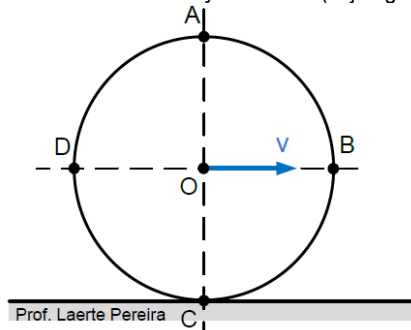


30. Na figura, temos duas polias coaxiais A e B de raios $R_A = 20$ cm e $R_B = 10$ cm e uma outra polia C de raio $R_C = 50$ cm:



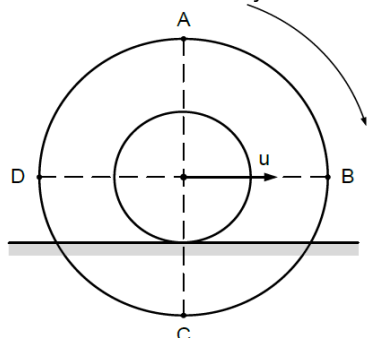
O bloco X, que parte do repouso em $t = 0$, desce com aceleração escalar constante e igual a 4 m/s^2 . Não há deslizamento entre as polias. Calcule a velocidade angular da polia C num instante genérico t .

31. Uma roda de raio R rola sem escorregar sobre um plano horizontal, com o seu centro se movendo a uma velocidade V em relação ao solo (veja figura).



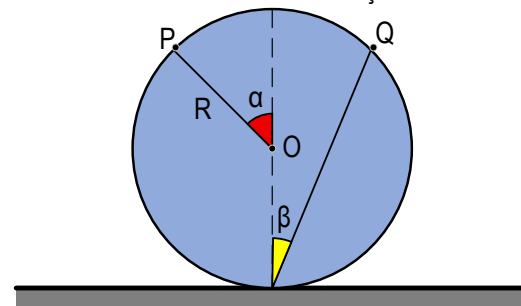
Determine a velocidade dos pontos A, B, C e D em relação ao solo.

32. Uma roda de raio R rola sem escorregar sobre um plano horizontal, com o seu centro O movendo-se a uma velocidade V em relação ao solo (veja figura).



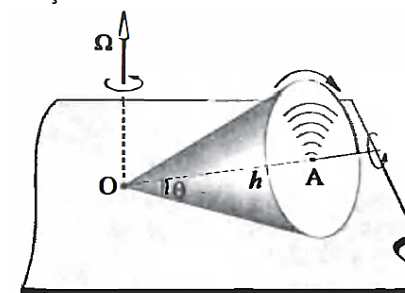
O contato com o solo é feito por meio de um volante de raio $r < R$. Determine a velocidade dos pontos A, B, C e D.

33. Uma roda de centro O e raio R rola sem escorregar sobre um plano horizontal estando seu centro O animado de velocidade $V \rightarrow$ em relação a Terra.

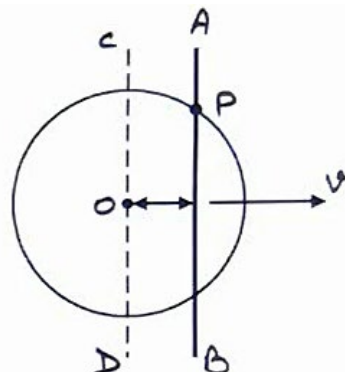


Determine as velocidades dos pontos P e Q indicados na figura em relação ao solo.

34. Um cone reto de altura h tem seu vértice O fixo no piso horizontal, e gira de modo que sua velocidade angular em relação a um eixo vertical que passa por O é Ω . Determine a velocidade angular do cone em relação a seu eixo OA.



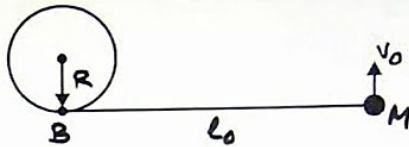
35. (Laerte Pereira) Uma haste AB está se movendo em um círculo fixo de raio R com uma velocidade constante v , como mostrado na figura. P é o ponto de interseção da haste e do círculo. Em um determinado instante, a haste está a uma distância $x = 3R/5$ do centro do círculo. A velocidade da haste é normal ao seu comprimento e a haste sempre permanece paralela ao diâmetro CD. Encontre a velocidade do ponto P neste instante.



36. (Laerte Pereira) Um cilindro vertical de raio R é colocado em uma superfície horizontal. Um pequeno



disco M está preso ao cilindro por um fio horizontal MB de comprimento l_0 e uma das extremidades está presa ao cilindro no ponto B, conforme mostrado.



O disco é lançado com uma velocidade inicial v_0 (constante em valor) de modo que o fio começa a se enrolar sobre a superfície do cilindro. Calcule quanto tempo após o qual o disco atingirá o cilindro.

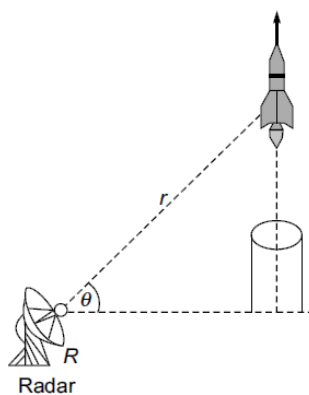
37. (Renato Brito) Um carro esportivo que usa rodas de magnésio com o aspecto mostrado na figura foi levado para fazer balanceamento.



Lá chegando, as rodas foram encaixadas numa máquina que produz um giro de 900 RPM no sentido horário. Durante esse processo, a sala fica escura e uma lâmpada estroboscópica pisca rapidamente com uma frequência de 24 flashes por segundo. Durante esse processo, pergunta-se:

- As rodas parecerão girar no sentido horário ou anti-horário?
- E vão girar com qual frequência aparente em RPM?

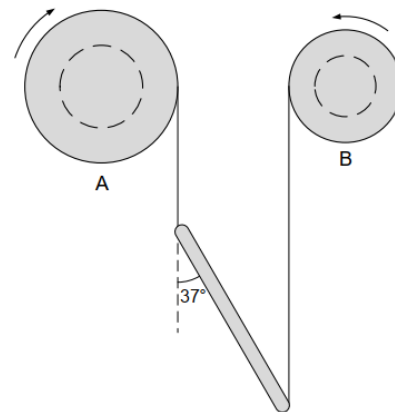
38. (Índia) Um míssil é disparado verticalmente e rastreado pelo radar R, conforme mostrado na figura abaixo. Em uma posição particular θ , os parâmetros medidos são r e $\frac{d\theta}{dt}$.



Mostre que a velocidade do foguete nesta posição é dada por:

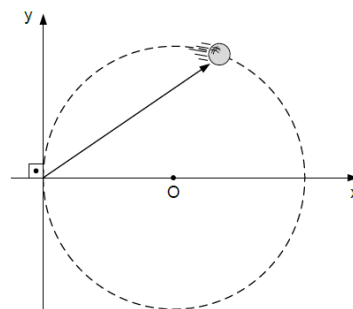
$$v = (r \cdot \cos \theta) \cdot \sec^2 \theta \cdot \left(\frac{d\theta}{dt} \right)$$

39. (Peru) A figura mostra uma barra de 0,75 m de comprimento unida, em suas extremidades, por cordas que estão enroladas nas polias A e B, de raios 6 cm e 4 cm, respectivamente. Se as polias rotacionam com velocidade angular constante de 0,2 rad/s, a partir do instante mostrado, qual é intervalo de tempo que transcorre até a barra se encontrar disposta horizontalmente?



- 100 s.
- 150 s.
- 200 s.
- 250 s.
- 300 s.

40. (Peru) A figura mostra uma partícula que se move sobre uma circunferência de raio R. Se seu vetor posição rotaciona uniformemente com uma rapidez angular ω_0 , determine o módulo da aceleração centrípeta da partícula.

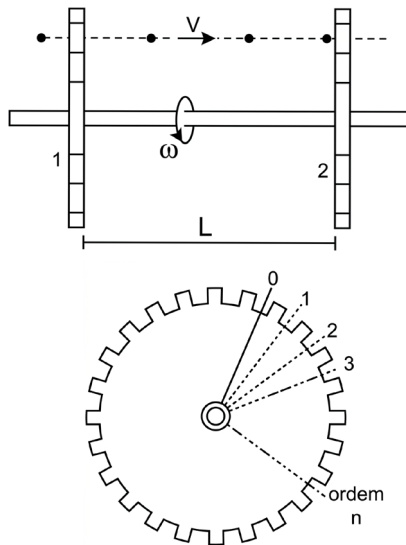


- $\frac{\omega_0^2 R}{2}$
- $\omega_0^2 R$
- $\frac{\omega_0^2 R}{4}$
- $4 \omega_0^2 R$
- $2 \omega_0^2 R$

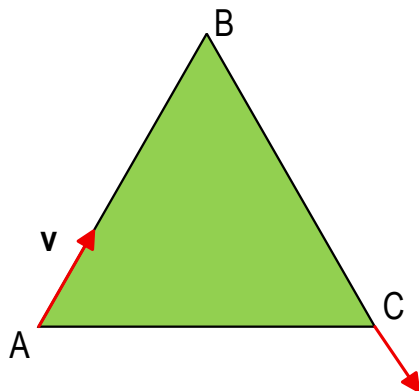
41. O esquema abaixo mostra um sistema constituído por dois discos idênticos solidários a um mesmo eixo horizontal que gira com velocidade angular constante



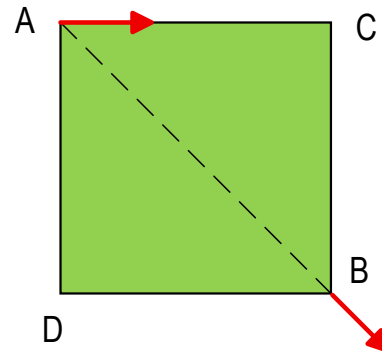
ω . A distância entre os discos vale L . Cada disco trata-se de uma roda dentada, constituída por dentes igualmente espaçados totalizando N dentes ao longo de toda a sua periferia. As rodas estão encaixadas de forma que os dentes da roda 1 e da roda 2 se correspondem segundo retas horizontais paralelas ao eixo do sistema. Uma partícula, movendo-se em movimento retilíneo e uniforme com velocidade v , passa pelo vão de ordem 0 (zero) na roda 1 e, em seguida, passa pelo vão de ordem n na roda 2. Determine a velocidade v da partícula em função de n , N , L e ω . Essa roda dentada foi usada na primeira determinação da velocidade da luz sem usar métodos astronômicos, pelo francês Hippolyte Fizeau em 1849.



42. A figura mostra um fragmento de casca de árvore com o formato de um triângulo equilátero ABC, que está sendo carregado por três formigas A, B e C, respectivamente, localizadas nos vértices desse triângulo. As formigas movem-se num plano horizontal. O prof. Laerte conta que, num certo instante, a velocidade V da formiga A aponta na direção AB, ao passo que a velocidade da formiga C aponta na direção BC, como mostra a figura. Determine as velocidades das formigas B e C, no referido instante, em função de V .

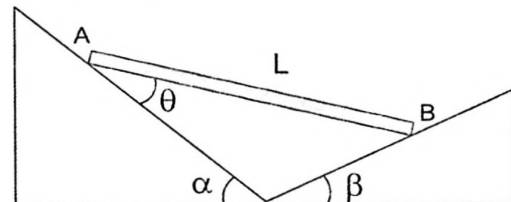


43. A figura mostra um fragmento de casca de árvore com o formato de um quadrado ABCD, que está sendo carregado por quatro formigas A, B, C e D, respectivamente, localizadas nos vértices desse quadrado. As formigas movem-se num plano horizontal. O prof. Laerte conta que, num certo instante, a velocidade V da formiga A aponta na direção AC, ao passo que a velocidade da formiga B aponta na direção AB, como mostra a figura. Determine as velocidades das formigas B, C e D, no referido instante, em função de V .

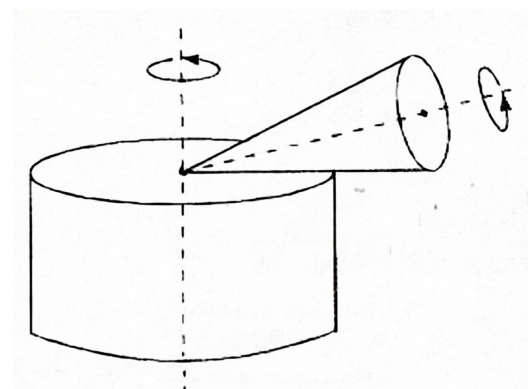


44. A figura mostra uma barra AB rígida de comprimento L apoiada sobre duas rampas de inclinações α e β com a horizontal. Num certo instante, a barra AB está formando um ângulo θ com a superfície da rampa esquerda e está escorregando ao longo dessa superfície com velocidade V . Nesse referido instante, determine:

- a velocidade de escorregamento da extremidade B da barra;
- a velocidade angular da barra.

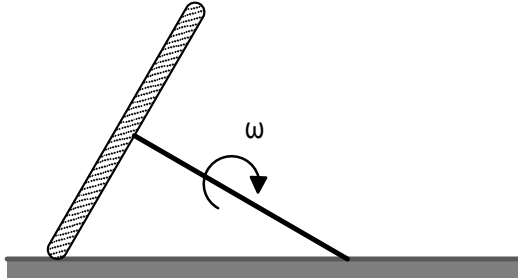


45. (Peru) Um cone rugoso, de altura H e base de raio R , mantém-se em contato com a base superior de um cilindro. Se o cone gira em torno de sua altura com velocidade angular constante ω , com que velocidade angular girará o cilindro?

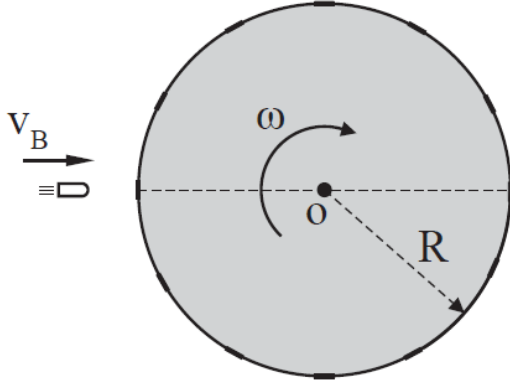




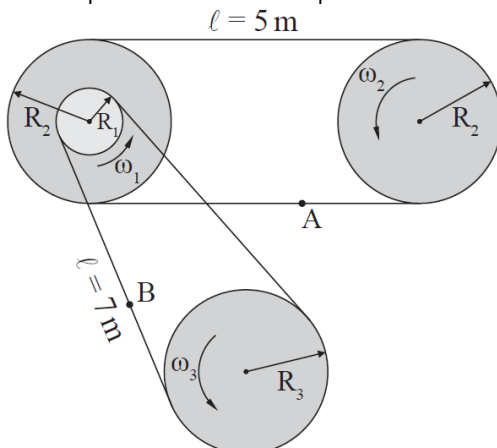
46. (Peru) Um disco fino, de raio R , soldado perpendicularmente a um fio de comprimento H , gira sobre um plano rugoso, sem deslizar, de modo que o fio gira com velocidade angular constante ω . A cada quanto tempo o disco descreve uma circunferência sobre o piso?



47. (Peru) Determinar a velocidade v_B de uma bala que, ao atravessar um cilindro de raio R , que gira com velocidade angular ω , passa pelo eixo de rotação. Observa-se que, ao sair, os orifícios produzidos formam um ângulo de 60° .

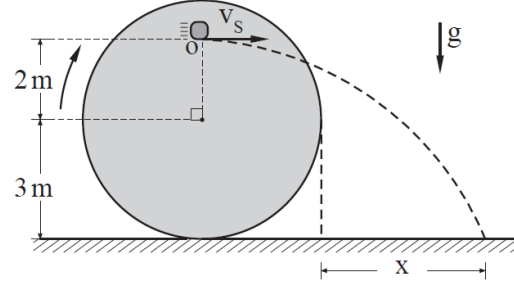


48. (Peru) Na figura, é mostrado um sistema de polias com raios $R_1 = 0,1 \text{ m}$ e $R_2 = 0,2 \text{ m}$. Se $\omega_2 = 5 \text{ rad/s}$, calcule os tempos t_A e t_B que os pontos A e B levam para dar uma volta completa.



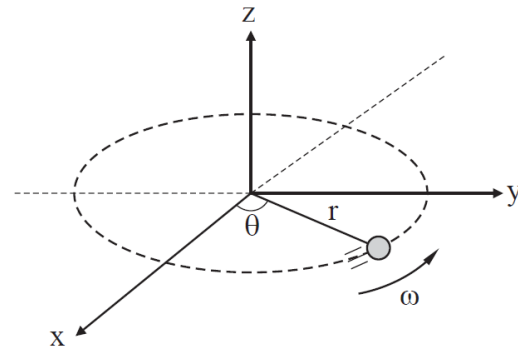
49. (Peru) Uma polia parte do repouso e realiza um movimento de rotação uniformemente acelerado, de modo que alcança uma velocidade angular de 120 rev/s . Se, durante o movimento, ela experimentou uma aceleração angular $\alpha = 6\pi \text{ rad/s}^2$, quantas revoluções conseguiu realizar nesse movimento?

50. (Peru) Um objeto irregular é preso à superfície de uma roda; em seguida, a roda gira, partindo do repouso, com aceleração angular constante de 2 rad/s^2 . Calcule " x ", sabendo que o objeto se desprende após 4 s , conforme mostrado na figura ($g = 10 \text{ m/s}^2$).



51. (Peru) Uma massa se move em uma trajetória circular ($r = 0,5 \text{ m}$) sobre um plano horizontal, com rapidez constante de $v = 1 \text{ m/s}$, conforme mostrado na figura. Se, no instante $t = 0 \text{ s}$, a massa se encontrava em $\theta = 0^\circ$:

- Calcule as coordenadas $(x_1; y_1)$ da massa no instante $t_1 = 0,5 \text{ s}$.
- Calcule o vetor aceleração da massa no instante $t_0 = 0 \text{ s}$.
- Calcule o vetor aceleração da massa quando $\theta = 90^\circ$.



52. (Peru) As coordenadas de um corpo em movimento são: $x = 2 \sin(\omega t)$, $y = 2 \cos(\omega t)$.

I) Determine a equação cartesiana da trajetória.

- $y = x$
- $y^2 = x$
- $y = 2x^2$
- $x^2 + y^2 = 2^2$
- $y = x^3$

II) Determine o valor da velocidade em qualquer instante.

- $1\omega \text{ m/s}$
- $2\omega \text{ m/s}$
- $3\omega \text{ m/s}$
- $4\omega \text{ m/s}$
- $5\omega \text{ m/s}$



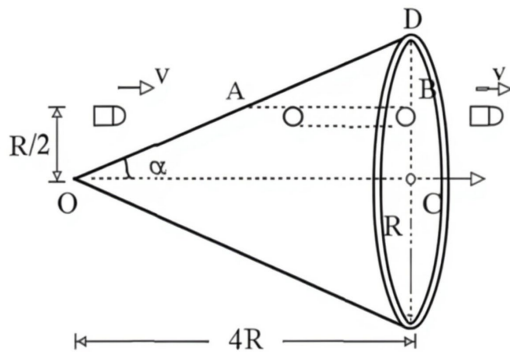
III) Determine as componentes tangencial e normal da aceleração em qualquer instante.

- a) $1\omega^2$; $2\omega^2$
- b) $0\omega^2$; $2\omega^2$
- c) $1\omega^2$; $0\omega^2$
- d) $2\omega^2$; $0\omega^2$
- e) $2\omega^2$; $2\omega^2$

IV) Identifique o tipo de movimento descrito pelas equações apresentadas.

- a) MRU
- b) MCU
- c) MRUV
- d) MCV
- e) Parabólico

53. (Peru) Na Figura, o cone oco gira em torno de seu eixo. Uma bala desloca-se com rapidez constante de $v = 4 \text{ m/s}$, paralelamente ao eixo, e perfura o cone em dois pontos, A e B. Determine a menor velocidade angular do cone para que AB seja paralelo ao eixo. ($R = \pi \text{ m}$)



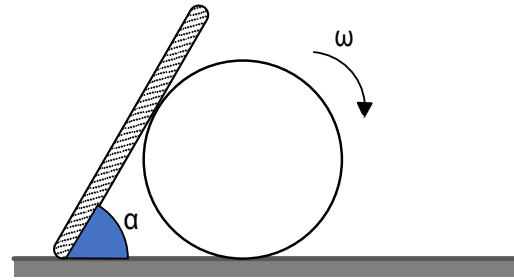
- a) 1 rad/s
- b) 2 rad/s
- c) 3 rad/s
- d) 4 rad/s
- e) 5 rad/s

54. (Peru) Uma roda realiza a 1ª volta com rapidez angular constante de 60 rad/s, a 2ª volta com rapidez angular de 150 rad/s e a 3ª volta com rapidez angular de 100 rad/s. Com que rapidez angular média realizará as 3 primeiras voltas?

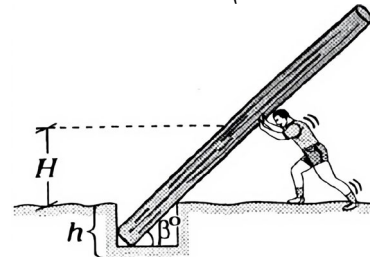
- a) 50 rad/s
- b) 60 rad/s
- c) 70 rad/s
- d) 80 rad/s
- e) 90 rad/s

55. (Peru) Na Figura, a haste gira com rapidez angular constante de $\omega = 4 \text{ rad/s}$. Não há deslizamento entre o cilindro e o plano horizontal. Determine a rapidez angular do cilindro no instante em que $\alpha = 60^\circ$.

- a) 1 rad/s
- b) 2 rad/s
- c) 4 rad/s
- d) 6 rad/s
- e) 8 rad/s



56. No instante mostrado abaixo, um jovem empurra horizontalmente com uma velocidade constante v o tronco de uma árvore. Determine a rapidez angular do tronco nesse mesmo instante. (Considere $h \ll H$.)

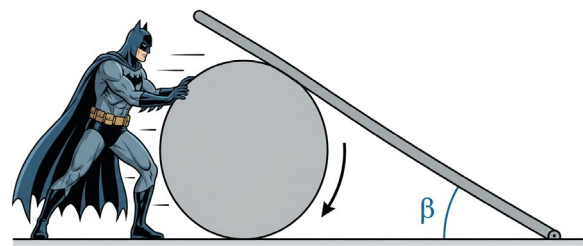


- a) $vH \cos \beta$
- b) $\frac{v}{H} \tan \beta$
- c) $\frac{H}{v} \operatorname{cosec} \beta$
- d) $\frac{v}{H} \sin^2 \beta$
- e) $\frac{H}{v} \cos^2 \beta$

57. Considere que uma pessoa empurra o cilindro abaixo, para a direita, de tal maneira que a barra lisa articulada se eleva com velocidade angular ω . Para o instante mostrado, determine a velocidade angular com que rotaciona o cilindro.

Observação: O cilindro não desliza sobre a superfície horizontal.

- a) $\omega \tan \beta$
- b) $\omega \sec^2 \left(\frac{\beta}{2} \right)$
- c) $\frac{\omega}{2 \sin^2 \left(\frac{\beta}{2} \right)}$
- d) $\omega \sin^2 \beta$
- e) $\omega \cos \beta$





Gabarito de aprofundamento.

1ª. C

Equações horárias dos ângulos percorridos pelos carrinhos (partindo do mesmo ângulo inicial):

$$\theta_A = \omega_A t = \frac{v_A}{R_A} t$$

$$\theta_B = \omega_B t = \frac{v_B}{R_B} t$$

Do enunciado, temos que:

$$\begin{cases} \theta_A - \theta_B = 2\pi \\ \theta_A' + \theta_B' = 2\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{v_A}{R_A} \cdot 40 - \frac{v_B}{R_B} \cdot 40 = 2\pi \\ \frac{v_A}{R_A} \cdot 10 + \frac{v_B}{R_B} \cdot 10 = 2\pi \end{cases} \Rightarrow$$

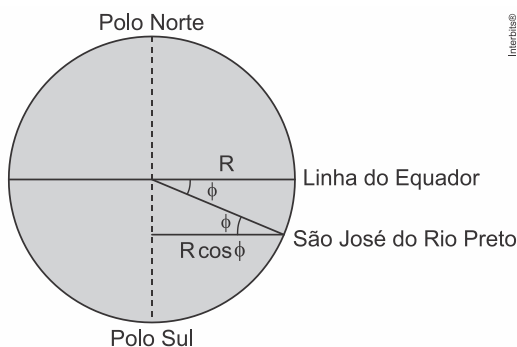
$$\Rightarrow \frac{4v_A}{R_A} - \frac{4v_B}{R_B} = \frac{v_A}{R_A} + \frac{v_B}{R_B} \Rightarrow \frac{3v_A}{R_A} = \frac{5v_B}{R_B}$$

$$\therefore \frac{v_A}{v_B} = \frac{5R_A}{3R_B}$$

2 Resposta:

[E]

A velocidade angular é a mesma para todos os pontos da Terra.



$$\omega_{eq} = \omega_{SJ} \Rightarrow \frac{v_{eq}}{R} = \frac{v_{SJ}}{R \cos \phi}$$

$$\Rightarrow v_{SJ} = v_{eq} \cos \phi = 1700 \times 0,93$$

$$\Rightarrow \boxed{v_{SJ} \cong 1.580 \frac{m}{s}}$$

3 Resposta:

[A]

Nota: há uma imprecisão no enunciado, pois **rpm** é unidade de frequência e não de velocidade angular, que, no SI, é **rad/s**.

1ª Solução: Usando conceitos matemáticos.

Como a mancha branca parece estar parada, a frequência de rotação da polia deve ser um número múltiplo das frequências de 9 Hz e 12 Hz. E o menor valor para o qual isto é possível deve ser o mínimo múltiplo comum entre eles:

$$\text{mmc}(9,12) = \text{mmc}(3^2, 3 \cdot 2^2) = 3^2 \cdot 2^2 = 36$$

Sendo assim, a sua frequência é de:

$$f = 36 \text{ Hz} = 36 \cdot 60 \text{ rpm}$$

$$\therefore f = 2160 \text{ rpm}$$

2ª Solução: Usando conceitos físicos.

Para que a mancha branca pareça parada, a cada período entre duas piscadas consecutivas da lâmpada, a polia deve efetuar um número inteiro de voltas. Quanto maior a frequência, menor o período: menos voltas inteiras a polia efetua.

Usando a relação período-frequência, os períodos correspondentes às frequências dadas são:

$$T = \frac{1}{f} \begin{cases} T_1 = \frac{1}{9} \text{ s} \\ T_2 = \frac{1}{12} \text{ s} \end{cases}$$

O fenômeno de a mancha parecer parada à medida que a frequência aumenta, repete-se cada vez que a polia dá 1 volta a menos. Assim, se para o período de

$\frac{1}{9} \text{ s}$, a polia efetua n voltas, para o de $\frac{1}{12} \text{ s}$, serão

$(n-1)$ voltas. Sendo T o período da polia, têm-se:

$$\begin{cases} T_1 = nT \Rightarrow \frac{1}{9} = nT \\ T_2 = (n-1)T \Rightarrow \frac{1}{12} = (n-1)T \end{cases} \Rightarrow \frac{\frac{1}{9}}{\frac{1}{12}} = \frac{nT}{(n-1)T} \Rightarrow 12(n-1) = 9n$$

$$4(n-1) = 3n \Rightarrow \boxed{n = 4 \text{ voltas}}$$

Retomando a primeira expressão:

$$T_1 = nT \Rightarrow \frac{1}{9} = 4T$$

$$\Rightarrow T = \frac{1}{36} \text{ s}$$

$$\Rightarrow f = 36 \text{ Hz} = 36(60) \text{ rpm}$$

$$\Rightarrow \boxed{f = 2.160 \text{ rpm}}$$

4 Resposta:

[E]

Dados: $f = 120 \text{ rpm} = 2 \text{ Hz}$; $m = 12,5 \text{ g} = 12,5 \times 10^{-3} \text{ kg}$; $R = 0,5$; $g = 10 \text{ m/s}^2$; $\pi = 3,14$.

O período do movimento (T) é o inverso da frequência.

$$T = \frac{1}{f} \Rightarrow \boxed{T = \frac{1}{2} \text{ s}}$$

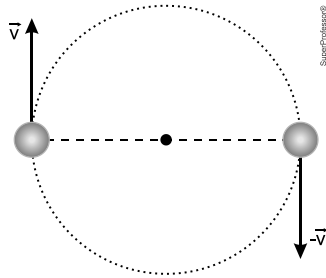
Se o movimento da partícula é uniforme, a velocidade linear é constante. Calculando para 1 volta:

$$v = \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{2\pi R}{T} \Rightarrow \boxed{v = 2\pi R f}$$

O intervalo de tempo entre duas passagens consecutivas por dois pontos diametralmente opostos, como mostrado na figura, é igual à metade do período.



$$\Delta t = \frac{T}{2} \Rightarrow \Delta t = \frac{1/2}{2} \Rightarrow \Delta t = 0,25 \text{ s}$$



Calculando o módulo da aceleração vetorial média:

$$\begin{aligned} |\vec{a}_m| &= \frac{|\Delta \vec{v}|}{\Delta t} = \frac{|-\vec{v} - \vec{v}|}{\Delta t} \\ &\Rightarrow |\vec{a}_m| = \frac{|-2\vec{v}|}{\Delta t} = \\ &= \frac{2(2\pi R f)}{\Delta t} = \frac{2(2 \cdot 3,14 \cdot 0,5 \cdot 2)}{0,25} \\ \boxed{|\vec{a}_m| = 50,24 \frac{m}{s^2}} \end{aligned}$$

5

Resposta:

Os pontos x e y encontram-se sobre discos que giram com a mesma velocidade angular por terem o mesmo eixo de rotação. Sendo assim:

$$\omega_b = \omega_c \Rightarrow \frac{v_b}{R_b} = \frac{v_c}{R_c}$$

Como $R_c > R_b \Rightarrow v_c > v_b$. Portanto, o ponto y terá maior velocidade linear.

b) Da relação anterior, vem:

$$\frac{v_b}{R_b} = \frac{v_c}{R_c} \Rightarrow \frac{v_b}{6} = \frac{65/3,6}{20}$$

$$v_b = v_a \cong 5,42 \text{ m/s}$$

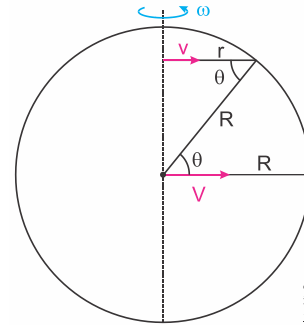
$$v_a = 2\pi f_a R_a \Rightarrow 5,42 = 2 \cdot 3,14 \cdot f_a \cdot 0,18$$

$$\therefore f_a \cong 4,8 \text{ Hz}$$

6 Resposta:

[A]

A figura ilustra a situação, considerando a Terra esférica.



Todos os pontos da Terra têm a mesma velocidade angular. Assim, para $V = 2v$, tem-se:

$$\frac{v}{r} = \frac{V}{R} \Rightarrow \frac{v}{r} = \frac{2v}{R} \Rightarrow r = \frac{R}{2}$$

Mas:

$$\cos \theta = \frac{r}{R} = \frac{R/2}{R} \Rightarrow \cos \theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = 60^\circ$$

7 Resposta:

[A]

Os raios das engrenagens $@$ e os números de dentes (n) são diretamente proporcionais. Assim:

$$\frac{R_A}{R_B} = \frac{R_C}{R_D} = \frac{n_A}{n_B} = \frac{8}{24} = \frac{1}{3}$$

- A e B estão acopladas tangencialmente:

$$v_A = v_B \Rightarrow 2\pi f_A R_A = 2\pi f_B R_B \Rightarrow f_A R_A = f_B R_B$$

$$\text{Mas: } f_A = f_M \Rightarrow f_M R_A = f_B R_B \Rightarrow f_B = f_M \frac{R_A}{R_B} = f_M \frac{1}{3} \Rightarrow f_B = \frac{f_M}{3}$$

- B e C estão acopladas coaxialmente:

$$f_C = f_B = \frac{f_M}{3}$$

- C e D estão acopladas tangencialmente:

$$v_C = v_D \Rightarrow 2\pi f_C R_C = 2\pi f_D R_D \Rightarrow f_C R_C = f_D R_D$$

$$\text{Mas: } f_D = f_R \Rightarrow f_C R_C = f_R R_D \Rightarrow f_R = f_C \frac{R_C}{R_D} \Rightarrow f_R = \frac{f_M}{3} \frac{1}{3} \Rightarrow f_R = \frac{f_M}{9}$$

$$f_R = \frac{13,5}{9} \Rightarrow \boxed{f_R = 1,5 \text{ Hz}}$$

8 Resposta:

[D]

Na posição 1:

$$\begin{cases} \square r_B = 2 r_A \\ \square \omega_B = \omega_A \Rightarrow \frac{v_B}{r_B} = \omega_A \Rightarrow \frac{v_B}{2 r_A} = \omega_A \Rightarrow v_B = 2 \omega_A r_A \\ \square v_C = v_B \Rightarrow \omega_C r_C = 2 \omega_A r_A \\ \square \omega_C = \omega_1 \Rightarrow \omega_1 r_C = 2 \omega_A r_A \quad (I) \end{cases}$$

Na posição 2:

$$\begin{cases} \square v_D = v_A \Rightarrow \omega_D r_D = \omega_A r_A \\ \square \omega_2 = \omega_D \\ \square r_C = r_D \end{cases} \Rightarrow \omega_2 r_C = \omega_A r_A \quad (II)$$

Dividindo membro a membro (I) por (II):



$$\frac{\omega_1 r_C}{\omega_2 r_C} = \frac{2 \omega_A r_A}{\omega_A r_A} \Rightarrow \boxed{\frac{\omega_1}{\omega_2} = 2.}$$

9 Resposta:

Seja v a velocidade da esfera ao atingir um orifício superior. Aplicando Torricelli:

$$v^2 = v_0^2 + 2 g h.$$

Como a velocidade inicial é nula:

$$v^2 = 2 g h \quad (I)$$

A altura máxima h é aquela que faz com que a esfera atravesse o dispositivo percorrendo a altura

H no menor intervalo de tempo, correspondente ao tempo para o cilindro dar $\frac{1}{4}$ de volta, ou seja, o tempo é $\frac{1}{4}$ do período de rotação do dispositivo. Assim:

$$\Delta t = \frac{T}{4}.$$

$$\text{Mas: } T = \frac{2\pi}{\omega}.$$

$$\text{Então: } \Delta t = \frac{2\pi}{4\omega} \Rightarrow \Delta t = \frac{\pi}{2\omega}.$$

Aplicando a equação do espaço para o percurso H , temos:

$$H = v \Delta t + \frac{g}{2} (\Delta t)^2 \Rightarrow H = v \left(\frac{\pi}{2\omega} \right) + \frac{g}{2} \left(\frac{\pi}{2\omega} \right)^2$$

$\Rightarrow$

$$v \left(\frac{\pi}{2\omega} \right) = H - \frac{g \pi^2}{2 4\omega^2} \quad \Rightarrow$$

$$v = \frac{2\omega}{\pi} H - \frac{g \pi^2}{2 4\omega^2} \quad \Rightarrow$$

$$v^2 = \left(\frac{2\omega}{\pi} H - \frac{\pi}{4\omega} g \right)^2 \quad (II).$$

Igualando (I) e (II), vem:

$$2 g h = \left(\frac{2\omega}{\pi} H - \frac{\pi}{4\omega} g \right)^2 \Rightarrow$$

$$h = \frac{1}{2 g} \left(\frac{2\omega}{\pi} H - \frac{\pi}{4\omega} g \right)^2$$

10 Resolução:

Cálculo do comprimento da trilha de informação, Δs , que passa sob o cabeçote leitor durante $\Delta t = 1,0$ s:

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = 2\pi R f$$

$$\Delta s = 21,6 \text{ m}$$

Sendo N o número de unidades de informação magnética procurado, tem-se:

$$N = \frac{\Delta s}{\Delta t} = 1,08 \cdot 10^8 \text{ unidades}$$

11 Resposta: b

12 O tempo de queda

$$t_{\text{queda}} = \sqrt{\frac{2H}{g}}$$

O intervalo de tempo t_{queda} corresponde a N períodos T de rotação do disco, isto é:

$$t_{\text{queda}} = N \cdot T$$

Recordando-se que o período é o inverso da frequência, vem:

$$N = f \cdot \sqrt{\frac{2H}{g}}$$

13 Resolução do prof. Laerte Pereira:

a) Chega primeiro no nível horizontal que contém o eixo O , o bloco 1, içado pela polia A de maior raio, que imprime a esse bloco uma velocidade escalar linear de maior intensidade que a do bloco 2.

$$b) \Delta s_1 = \Delta \omega_A R_A \Rightarrow 4,0 = \Delta \omega_A \cdot 0,40$$

$$\Rightarrow \Delta \omega_A = 10 \text{ rad}$$

$$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{\gamma t^2}{2}$$

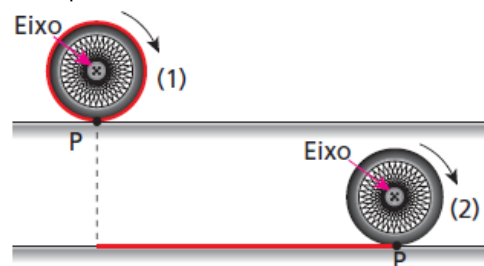
$$10 = \frac{0,2 t^2}{2}$$

Logo

$$T = 10 \text{ s}$$

14 Resolução:

Na figura a seguir, representamos uma roda da moto em duas posições (1) e (2). Da posição (1) até a posição (2), a roda completa uma volta. O ponto P está na periferia da roda.



Imagine que a periferia da roda, na posição (1), esteja pintada com uma estreita faixa de tinta vermelha fresca. O comprimento dessa faixa é $2\pi R$ (perímetro da circunferência). De (1) para (2), a roda deixa no asfalto uma marca vermelha de mesmo comprimento, pois a roda não desliza na pista. Note, então, que, num mesmo intervalo de tempo, o ponto P percorre $2\pi R$ em relação ao eixo da roda e este também percorre $2\pi R$ em relação à estrada. Portanto, a velocidade v_P , do ponto P em relação ao eixo, é igual à velocidade v_E , do eixo em relação à estrada:

$$v_P = v_E$$



Como a velocidade do eixo em relação à estrada é igual à velocidade v_M da moto, temos:

$$v_P = v_M$$

Portanto, a velocidade da moto tem o mesmo valor da velocidade do ponto P em seu movimento circular em torno do eixo:

$$v_P = \omega_P R = 2\pi f R$$

$$v_M = 2 \cdot 3,1 \cdot 10 \cdot 0,25$$

$$\Rightarrow v_M = 15,5 \text{ m/s} = 56 \text{ km/h}$$

15. Estimando o raio da roda em 30 cm, calculemos seu perímetro, que é a distância percorrida por ela em cada volta:

$$\text{perímetro} = 2\pi R = 2 \cdot \pi \cdot 30 \text{ cm} \cong 1,9 \text{ m}$$

$$\text{número de voltas} = \frac{\text{distância total}}{\text{Perímetro}}$$

$$\text{número de voltas} = \frac{200\,000 \text{ m}}{1,9 \text{ m}}$$

Ordem de grandeza = 10^5 voltas

16 Resolução do prof. Laerte Pereira:

Entre dois fotogramas consecutivos, a pá destacada efetua, no mínimo, $\frac{3}{4}$ de volta, em um intervalo de tempo $\Delta t = \frac{1}{24} \text{ s}$. Então, a frequência mínima de rotação das pás é dada por:

$$f = \frac{n}{\Delta t} = \frac{\frac{3}{4} \text{ volta}}{\frac{1}{24} \text{ s}} = 18 \text{ voltas/s}$$

17 Basta comparar com

$$\theta = \theta_0 + \omega t$$

a) $\frac{3\pi}{2}$ rad; b) 1 s e 1 Hz; c) 4π m/s

18 Resolução do prof. Laerte Pereira:

Enquanto o projétil desloca-se de um disco a outro, percorrendo $\Delta s = 2 \text{ m}$ com velocidade v , o sistema sofre um deslocamento angular

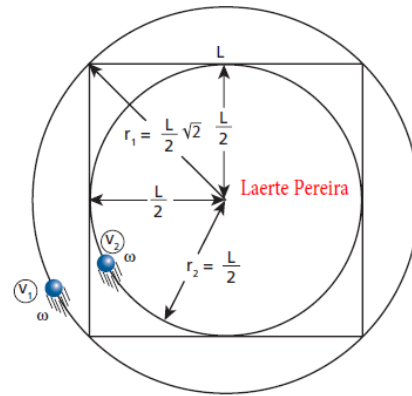
$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} \rightarrow \Delta t = \frac{\Delta s}{v}$$

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} \rightarrow \Delta t = \frac{\Delta \varphi}{\omega} \\ \frac{\Delta s}{v} &= \frac{\Delta \varphi}{\omega} \\ v &= \frac{\omega \Delta s}{\Delta \varphi} \end{aligned}$$

Como $\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 50 = 100\pi \text{ rad/s}$, temos:

$$v = 800 \text{ m/s}$$

19 Resolução do prof. Laerte Pereira:



$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{r_1}{r_2} = \frac{\frac{L\sqrt{2}}{2}}{\frac{L}{2}}$$

Logo

$$\frac{v_1}{v_2} = \sqrt{2}$$

20. Resolução do Prof. Laerte Pereira:

Seja n o número inteiro de voltas completadas por A e B a partir do instante em que estavam emparelhados. Então, como o tempo que passou para A (Δt_A) é igual ao que passou para B (Δt_B), temos:

$$\Delta t_A = \Delta t_B$$

$$(n)(1 \text{ min } 40 \text{ s}) = \left(n + \frac{1}{4}\right)(1 \text{ min } 36 \text{ s})$$

Resolvendo

10 min

21 Resolução do Prof. Laerte Pereira:

37) A marca parece parada quando é filmada na frequência de 30 Hz.

Isso significa que, a cada $\frac{1}{30} \text{ s}$ (período de filmagem), a marca encontra-se na mesma posição em relação ao eixo da roda.

Nesse período de $\frac{1}{30} \text{ s}$, a roda pode ter completado 1 volta, 2 voltas, 3 voltas, enfim, um número inteiro n de voltas. Portanto, a frequência f de rotação da roda (número de voltas completadas por segundo) é dada por:

$$f = \frac{n}{\left(\frac{1}{30}\right)} = n \cdot 30 \text{ Hz}$$

A roda completa $30n$ voltas em 1 s, sendo $n = 1, 2, 3, \dots$

$$\text{b) } \omega_{\min} = 2\pi f_{\min}$$

$$\begin{aligned} f_{\min} &\text{ é o caso de } n = 1 \\ \omega_{\min} &= 180 \text{ rad/s} \end{aligned}$$

$$\text{c) } v_{\min} = \omega_{\min} r = 180 \cdot 0,3 = 54 \text{ m/s}$$

22 Resolução do prof. Laerte Pereira:

O comprimento do aro aumentado é:



$$C + 1 = 2\pi (R + x)$$

temos:

$$2\pi R + 1 = 2\pi R + 2\pi x$$

$$x = 16 \text{ cm}$$

O gato é o maior animal capaz de passar pela folga x.

23 Resolução do Prof. Laerte Pereira:

$$\left. \begin{aligned} \text{Disco de raio 10 cm e frequência } f = 0,5 \text{ Hz: } L = l \cdot 2\pi f = \frac{MR^2}{2} \cdot 2\pi f \\ \text{O outro disco: } L = l' \cdot 2\pi f' = \frac{M\left(\frac{R}{2}\right)^2}{2} \cdot 2\pi f' \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\frac{M \cdot R^2}{2} \cdot 2\pi f = \frac{M \cdot R^2}{2} \cdot 2\pi f'$$

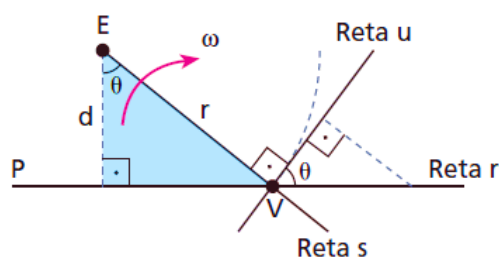
$$f' = 4f$$

$$f' = 2 \text{ Hz}$$

$$f' = \frac{n}{\Delta t}$$

$$n = 30 \text{ voltas}$$

24 Resolução do Prof. Laerte Pereira:



$$\begin{aligned} v \cdot \cos \theta &= \omega r \\ v &= \frac{\omega r}{\cos \theta} \end{aligned}$$

Mas

$$\cos \theta = \frac{d}{r}$$

Então

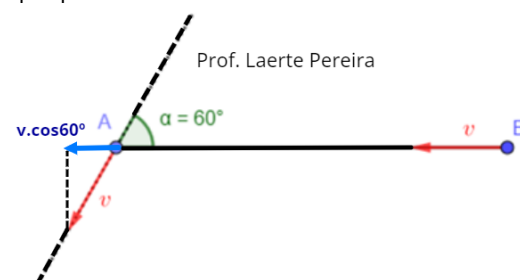
$$v = \frac{\omega \cdot d}{(\cos \theta)^2}$$

25 Resolução do Prof. Laerte Pereira:



26 Resolução do Prof. Laerte Pereira:

A figura abaixo mostra a configuração do movimento entre dois vértices do hexágono em um instante qualquer:



Note que a velocidade relativa entre dois vértices se mantém a mesma:

$$\begin{aligned} v_{rel} &= v - v \cdot \cos 60^\circ = \frac{v}{2} \\ v_{rel} &= \frac{\Delta d_{rel}}{\Delta t} \\ \frac{v}{2} &= \frac{\Delta t}{\Delta t} \\ \Delta t &= \frac{2L}{v} \\ \Delta t &= 10 \text{ s} \end{aligned}$$

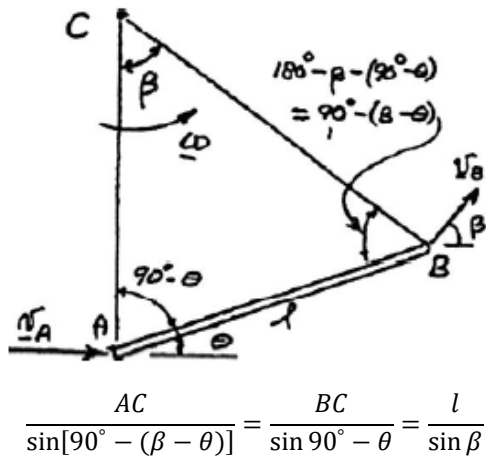
Sabemos que as partículas possuíam velocidades de módulo constante, como se movimentaram durante 10 s, podemos afirmar:

$$d = v \cdot \Delta t$$

A trajetória das partículas é uma espiral, mas isso não é relevante, tudo que precisamos saber é que a velocidade tangencial da partícula é constante e, portanto, a expressão de movimento uniforme se aplica. Substituindo os valores do enunciado na expressão acima, obtemos:

$$d = 20 \text{ m}$$

27 Resolução do Professor Laerte Pereira:



Temos que

$$\sin[90^\circ - (\beta - \theta)] = \cos(\beta - \theta) \text{ e } \sin(90^\circ - \theta) = \cos(\theta)$$

$$\begin{aligned} R_A &= AC \\ R_B &= BC \end{aligned}$$

Então

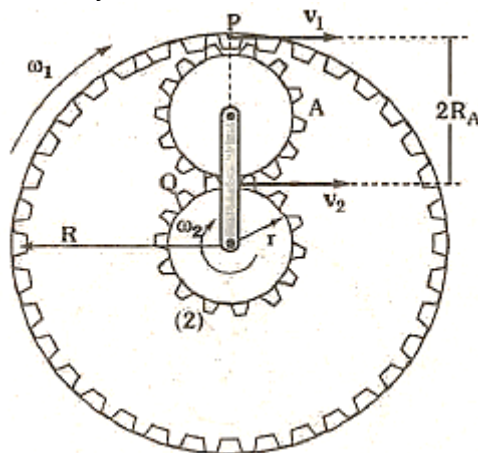
$$R_A = \frac{l \cdot \cos(\beta - \theta)}{\sin \beta}$$

$$R_B = \frac{l \cdot \cos(\theta)}{\sin \beta}$$

$$\omega = \frac{v_A}{R_A} = \frac{v_B}{R_B}$$

$$v_B = \frac{v_A}{\cos(\beta - \theta)}$$

28 Resolução do Prof. Laerte Pereira:



Pedem-nos o número de rotações da engrenagem A, se é sabido que a engrenagem (1) executa n_1 rotações, enquanto (2) realiza n_2 rotações no mesmo tempo t , com esses dados podemos determinar a velocidade angular de cada engrenagem, onde:

$$\omega = \frac{2\pi \cdot n}{t}$$

Determinando o raio R_A

$$2 \cdot R_A = R - r$$

$$R_A = \frac{R - r}{2}$$

então a velocidade tangencial com que a engrenagem

A gira é:

$$v_A = v_1 - v_2$$

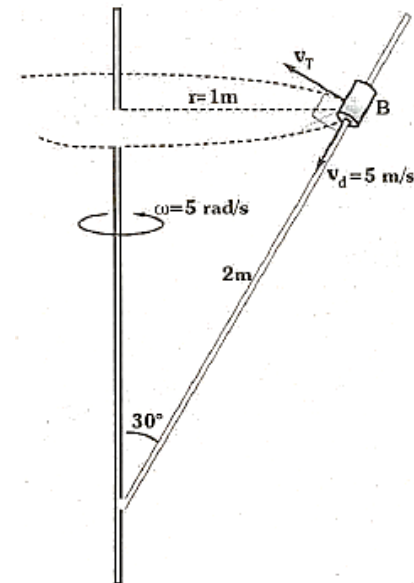
$$\omega_A R_A = \omega_1 R - \omega_2 R$$

$$\frac{n_A (R - r)}{t} = \frac{n_1}{t} R - \frac{n_2}{t} r$$

$$n_A = \frac{2 \cdot (n_1 R - n_2 r)}{(R - r)}$$

29

Resolução do Professor Laerte Pereira:



Devido a rotação

$$v_T = \omega \cdot r = 5 \text{ m/s}$$

Velocidade de deslizamento

$$v_d = 5 \text{ m/s}$$

A velocidade total

$$v_B = 5 \cdot \sqrt{2} \text{ m/s}$$

30. Resolução do Prof. Laerte Pereira:

$$\gamma_B = \gamma_A = \frac{a_B}{R_B} = 40 \text{ rad/s}^2$$

$$a_A = \gamma_A R_A = 8 \text{ m/s}^2$$

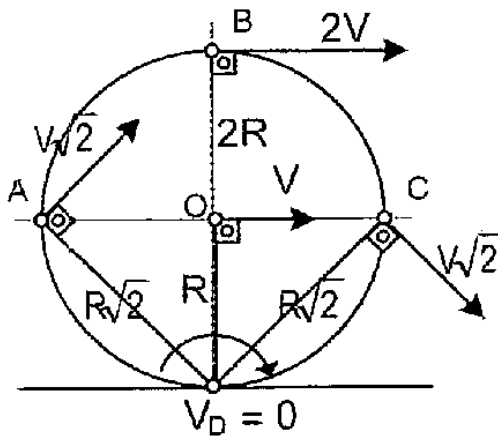
$$a_A = a_c$$

$$\gamma_c = \frac{a_c}{R_c} = 16 \text{ rad/s}^2$$

$$\omega_c = \omega_{0c} + \gamma_c t$$

$$\omega_c = 16t$$

31.



32.

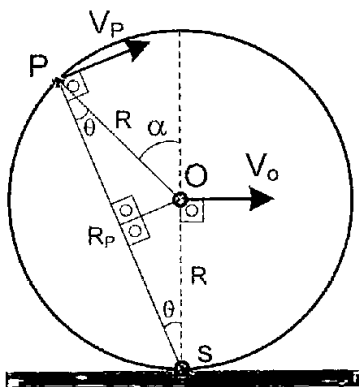
$$v_A = \frac{v(R+r)}{r}$$

$$v_B = \frac{v\sqrt{R^2+r^2}}{r}$$

$$v_C = \frac{v \cdot (R-r)}{r}$$

$$v_D = \frac{v\sqrt{R^2+r^2}}{r}$$

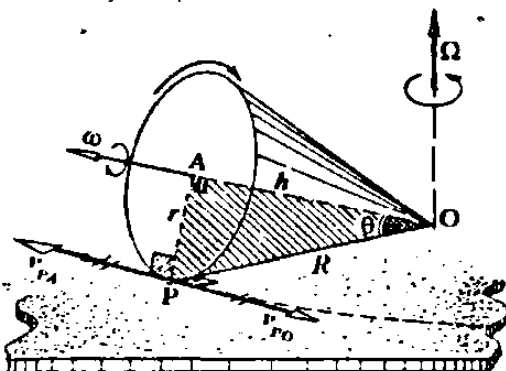
33.



$$v_P = 2v \cdot \cos \frac{\alpha}{2}$$

$$v_Q = 2v \cdot \cos \beta$$

34. Resolução do prof. Laerte Pereira:



Este problema nos sugere vincular dois movimentos rotacionais. Para isso, escolheremos convenientemente um ponto que seja comum a ambos os movimentos e que também relacione as características destes movimentos. Colocando-nos no eixo vertical, veríamos que a geratriz OP está em repouso em relação ao chão, e se moveria com movimento rotacional em relação ao ele, sendo a velocidade linear do ponto P em relação ao O:

$$v_{PO} = \Omega h \cdot \sec \theta$$

Mas, se nos colocarmos no centro da base do cone (A), veríamos que o ponto P teria velocidade linear

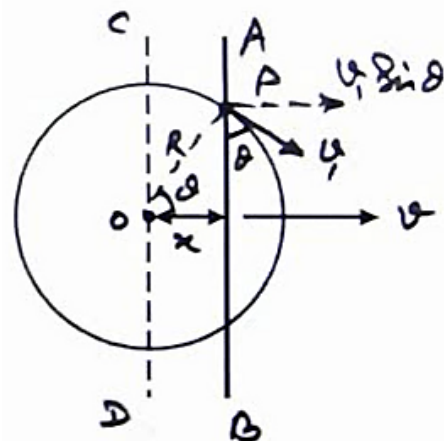
$$v_{PA} = \omega h \cdot \tan \theta$$

Mas, como já dissemos, o ponto P está em repouso em relação ao piso. Então: $v_P = 0$, o que nos leva concluir que:

$$\omega h \cdot \tan \theta = \Omega h \cdot \sec \theta$$

$$\omega = \Omega \cdot \csc \theta$$

35.

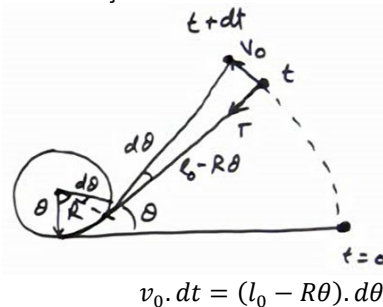


$$x = \frac{3R}{5} \rightarrow \cos \theta = \frac{3}{5} \rightarrow \theta = 53^\circ$$

$$v_1 \cdot \sin \theta = v$$

$$v_1 = \frac{v}{\sin \theta} = \frac{5v}{4}$$

36. Resolução do Prof. Laerte Pereira:



$$v_o \cdot dt = (l_0 - R\theta) \cdot d\theta$$



$$\int_0^t v_0 \cdot dt = \int_0^{\frac{l_0}{R}} (l_0 - R\theta) \cdot d\theta$$

$$v_0 \cdot t = \left[l_0 \theta - \frac{R \cdot \theta^2}{2} \right]_0^{\frac{l_0}{R}} = \frac{l_0^2}{2R}$$

$$t = \frac{l_0^2}{2Rv_0}$$

37. Resolução:

a)

$$900 \text{ rpm} = \frac{900}{60} = 15 \text{ voltas/s}$$

Fazendo a regra de 3:

1 volta --- 360°

15 voltas --- x

$$x = 5400^\circ$$

15 volt. ---- 1s ---- 24 flash ---- 5400°
1 flash ---- x

$$x = \frac{5400^\circ}{24 \text{ flash}} = 225^\circ / 1 \text{ flash}$$

embora a roda gire 225 graus horários a cada flash, cérebro humano não perceberá todo esse giro a cada flash.

Para entender, note que o ângulo 225 graus pode ser escrito de duas formas:

$$225 = 180 + 45 \text{ ou } 225 = 240 - 15$$

O cérebro humano prefere enxergar sempre o menor giro. Sendo $15^\circ < 45^\circ$, o cérebro interpretará que essa roda está girando 15° anti-horários a cada flash.

b) Mas girar 15° anti-horários a cada flash significa girar com que frequência aparente?

Ora, lembrando que a lâmpada pisca num ritmo de 24 flashes/seg, temos:

$$1 \text{ volta} \text{ ---- } 24 \text{ flash} \text{ ---- } 360^\circ$$

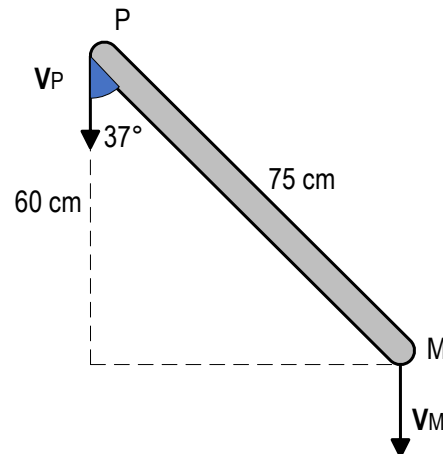
$$f_{\text{APA}} \text{ ---- } 15^\circ$$

$$\text{logo a } f_{\text{APA}} = 60 \text{ rpm}$$

39.

$$v_P = \omega_A r_A = (0,2) \cdot 6 = 1,2 \text{ cm/s}$$

$$v_{A1} = \omega_B r_B = (0,2) \cdot 4 = 0,8 \text{ cm/s}$$



A barra estará na posição horizontal quando, na direção vertical, **P alcançar M**.

$$t = \frac{d}{v_P - v_M}$$

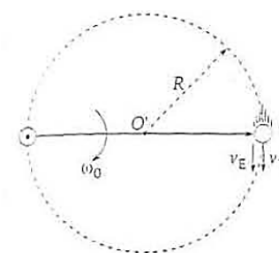
$$\Rightarrow t = \frac{60}{1,2 - 0,8} = \frac{60}{0,4}$$

$$\therefore t = 150 \text{ s}$$

40. Resolução

Consideramos uma posição conveniente.

$$a_{cp} = \frac{v_T^2}{R}$$



No instante mostrado, as velocidades lineares da extremidade do vetor raio e da partícula são iguais.

$$v_T = v_E$$

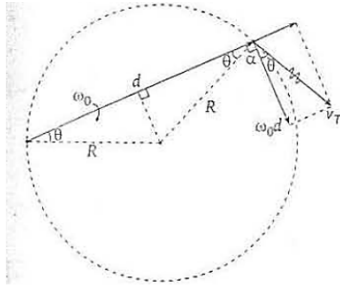
$$\Rightarrow v_T = \omega_0 (2R)$$

$$a_{cp} = \frac{[\omega_0 (2R)]^2}{R}$$



$$\Rightarrow a_{cp} = 4\omega_0^2 R$$

$$a_{cp} = \frac{v_T^2}{R}$$



Da imagem

$$d = 2R \cos \theta$$

$$\vec{v}_T [\cos \theta] = \omega_0 d$$

$$v_T \cos \theta = \omega_0 (2R \cos \theta)$$

$$\therefore v_T = \omega_0 (2R)$$

Em (I)

$$\vec{a}_{cp} = \frac{\omega_0^2 (4R^2)}{R}$$

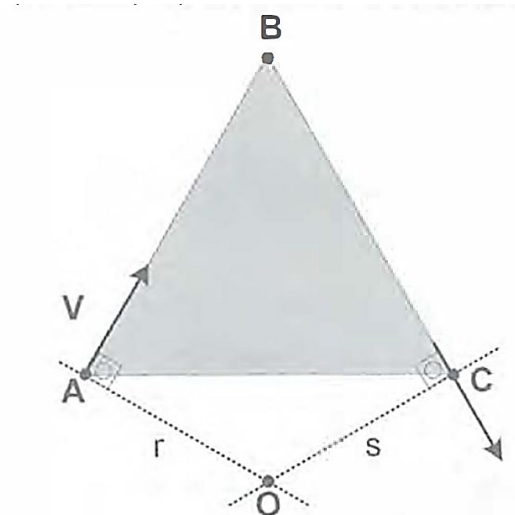
$$\therefore \vec{a}_{cp} = 4\omega_0^2 R$$

Gabarito: D

$$41. v = \frac{\omega L N}{2\pi n},$$

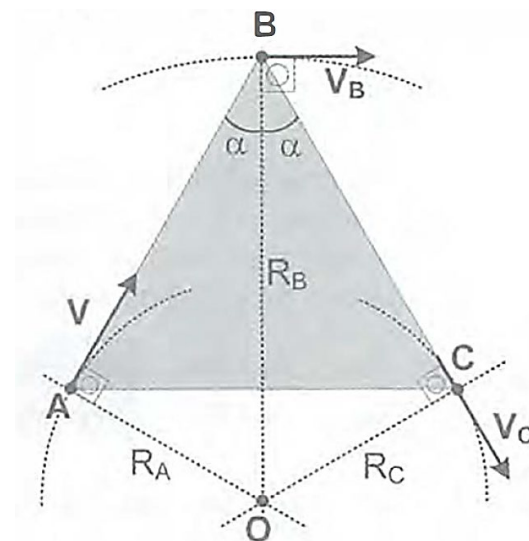
dica: regra de 3, se durante o período $T = 2\pi/\omega$ a roda gira um total de N dentes (1 volta completa), quanto tempo Δt ela levará para girar apenas n dentes? O tempo L/v que a bala leva para ir de um disco ao outro é igual ao tempo que os discos levam para girar n dentes (indo do vão de ordem zero no 1º disco ao vão de ordem n no 2º disco).

42. Inicialmente, precisamos determinar a posição do centro de rotação instantânea do corpo de formato triangular. Para isso, traçamos uma reta r passando pelo ponto A perpendicular à velocidade V desse ponto.



Em seguida, traçamos uma reta s passando pelo ponto C perpendicular à velocidade desse ponto. O ponto de cruzamento das retas r e s é o centro de rotação instantânea do corpo naquele instante, no caso, o ponto O .

Para determinar a orientação da velocidade V_B do terceiro vértice, ligamos o centro O ao ponto B .



A velocidade V_B desse ponto deve ser perpendicular ao eixo OB e com um sentido compatível com as demais velocidades do corpo, no caso, para a direita. Assim, podemos escrever:

$$\omega = \frac{V_A}{R_A} = \frac{V_B}{R_B} = \frac{V_C}{R_C}$$

com

$$R_C = R_A = R_B \cdot \sin \alpha, \alpha = 30^\circ.$$

Ou seja,

$$R_A = R_B \left(\frac{1}{2} \right) = \frac{R_B}{2}$$

e

$$R_C = \frac{R_B}{2}.$$



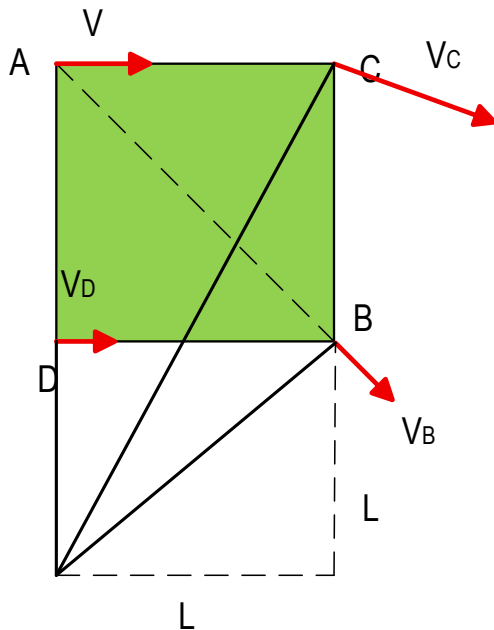
Portanto,

$$\omega = \frac{V}{R_B/2} = \frac{V_B}{R_B} = \frac{V_C}{R_B/2}$$

$$\Rightarrow V_B = 2V,$$

$$V_C = V.$$

43. O movimento dessa casca quadrada pode ser interpretado como uma rotação instantânea em torno de um centro de rotação P localizado fora da figura. Mas como encontrá-lo?



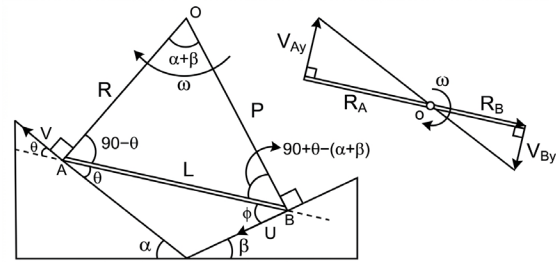
Ora, traçando-se uma reta r perpendicular a V passando pelo ponto A, e uma reta s perpendicular a V_B passando por B (diagonal do quadrado inferior), r e s se cruzarão no vértice P do quadrado de baixo tal que $AD = DP = L$. O ponto P será o centro de rotação instantâneo com raios de giração $R_A = PA = 2L$, $R_B = PB = L\sqrt{2}$, $R_C = PC = L\sqrt{5}$, $R_D = PD = L$.

Assim, vem:

$$\omega = \frac{V}{2L} = \frac{V_B}{L\sqrt{2}} = \frac{V_C}{L\sqrt{5}} = \frac{V_D}{L}$$

$$\therefore V_B = \frac{V\sqrt{2}}{2}, V_C = \frac{V\sqrt{5}}{2}, V_D = \frac{V}{2}.$$

44. a) Observe a figura abaixo. Vamos decompor o movimento da barra na superposição de uma translação + rotação.



As extremidades A e B da barra têm velocidades de translação idênticas visto que a barra não estica, o que nos permite escrever:

$$V \cdot \cos \theta = U \cdot \cos \phi, \text{ com } \phi = \alpha + \beta - \theta \text{ (eq1)}$$

$$\Rightarrow V \cdot \cos \theta = U \cdot \cos(\alpha + \beta - \theta)$$

$$U = \frac{V \cdot \cos \theta}{\cos(\alpha + \beta - \theta)} \text{ (eq2)}$$

b) podemos escrever:

$$\omega = \frac{V_{Ay}}{R_A} = \frac{V_{By}}{R_B} = \frac{V_{Ay} + V_{By}}{R_A + R_B} = \frac{V \cdot \sin \theta + U \cdot \sin \phi}{L},$$

usando eq1 e eq2, vem:

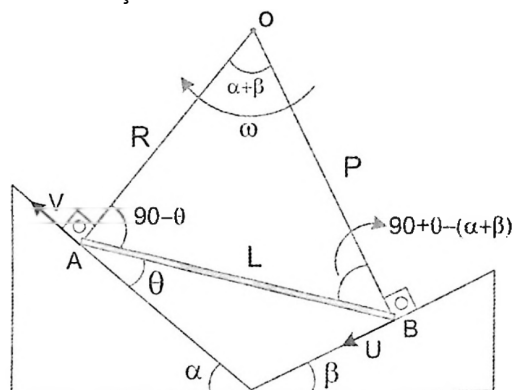
$$\omega = \frac{V \cdot \sin \theta + \frac{V \cdot \cos \theta}{\cos(\alpha + \beta - \theta)} \cdot \sin(\alpha + \beta - \theta)}{L}$$

$$\omega = \frac{V}{L \cdot \cos(\alpha + \beta - \theta)} [\sin \theta \cdot \cos(\alpha + \beta - \theta) + \sin(\alpha + \beta - \theta) \cdot \cos \theta]$$

$$\omega = \frac{V}{L \cdot \cos(\alpha + \beta - \theta)} \cdot \sin(\alpha + \beta)$$

$$\omega = \frac{V}{L} \cdot \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta - \theta)}$$

2ª RESOLUÇÃO



Pela Lei dos senos, podemos escrever:

$$\frac{R}{\sin[90 + \theta - (\alpha + \beta)]} = \frac{P}{\sin(90 - \theta)}$$

$$\Rightarrow \frac{R}{\cos(\alpha + \beta - \theta)} = \frac{P}{\cos \theta}$$

$$\frac{P}{R} = \frac{\cos \theta}{\cos(\alpha + \beta - \theta)} \text{ (eq1)}$$



Como A e B têm velocidades angulares instantâneas iguais em relação ao centro O, podemos escrever:

$$\omega = \frac{V}{R} = \frac{U}{P} \Rightarrow U = V \cdot \frac{P}{R} \stackrel{\text{eq1}}{=} \frac{V \cdot \cos \theta}{\cos(\alpha + \beta - \theta)}$$

$$\Rightarrow U = \frac{V \cdot \cos \theta}{\cos(\alpha + \beta - \theta)}$$

b) Pela Lei dos senos, podemos escrever:

$$\frac{L}{\sin(\alpha + \beta)} = \frac{R}{\sin[90 + \theta - (\alpha + \beta)]}$$

$$\Rightarrow \frac{L}{\sin(\alpha + \beta)} = \frac{R}{\cos(\alpha + \beta - \theta)}$$

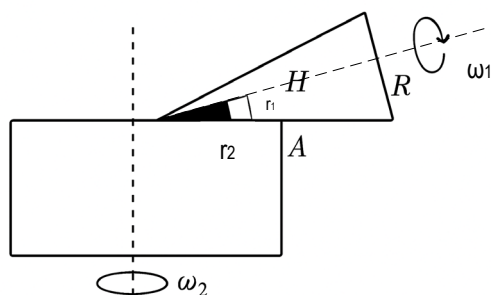
$$R = \frac{L \cdot \cos(\alpha + \beta - \theta)}{\sin(\alpha + \beta)} \text{ (eq2)}$$

Assim, da definição de velocidade angular ω , vem:

$$\omega = \frac{V}{R} \text{ (usando eq2, vem)}$$

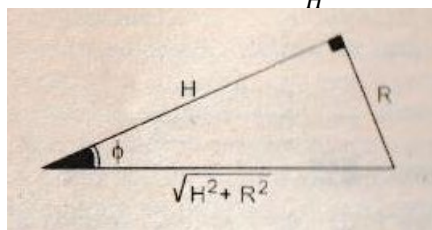
$$\Rightarrow \omega = \frac{V}{L} \cdot \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta - \theta)}$$

45.



Previamente:

$$\tan \varphi = \frac{R}{H}$$



De onde:

$$\sin \varphi = \frac{R}{\sqrt{H^2 + R^2}} \quad (1)$$

Além disso:

$$r_1 = r_2 \sin \varphi$$

Substituindo:

$$r_1 = r_2 \frac{R}{\sqrt{H^2 + R^2}} \quad (2)$$

Aplicação da propriedade 2 no ponto A:

$$\omega_2 r_2 = \omega_1 r_1$$

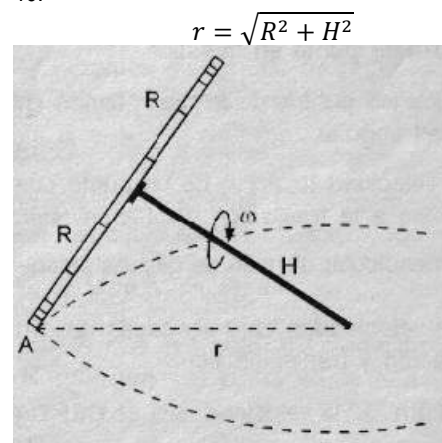
Substituindo:

$$\omega_2 r_2 = \omega \left[\frac{r_2 R}{\sqrt{H^2 + R^2}} \right]$$

Portanto:

$$\omega_2 = \frac{\omega R}{\sqrt{H^2 + R^2}}$$

46.



Propriedade 2: (no ponto "A")

$$\omega R = \omega_1 r$$

$$\omega R = \omega_1 \sqrt{R^2 + H^2}$$

$$\omega_1 = \frac{\omega R}{\sqrt{R^2 + H^2}} \quad (1)$$

Porém,

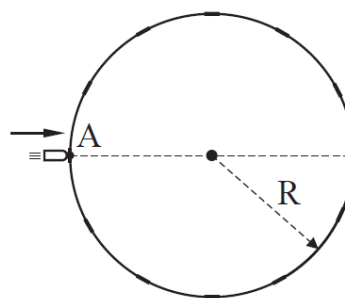
$$\omega_1 = \frac{2\pi}{T} \quad (2)$$

Substituindo (2) em (1):

$$T = \frac{2\pi \sqrt{R^2 + H^2}}{\omega R}$$

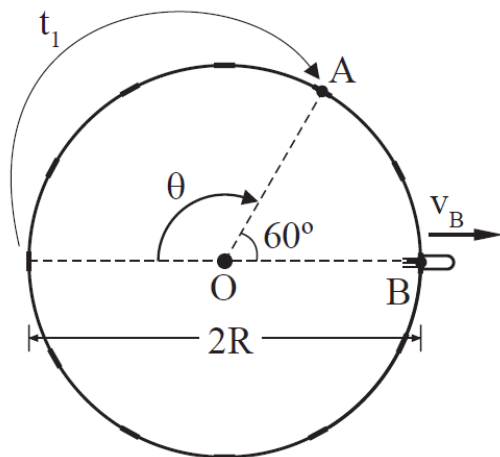
47. Solução:

No primeiro impacto, seja "A" o primeiro furo:





No segundo impacto, após t_1 segundos, é feito o segundo furo "B".



Para o ângulo θ girado pelo ponto A:

$$\theta = \omega t_1$$

$$\Rightarrow t_1 = \frac{\theta}{\omega} \quad (i)$$

Para a bala:

$$v_B = \frac{2R}{t_1} \Rightarrow t_1 = \frac{2R}{v_B} \quad (ii)$$

Igualando (i) e (ii):

$$\frac{\theta}{\omega} = \frac{2R}{v_B}$$

$$\Rightarrow v_B = 2R \left(\frac{\omega}{\theta} \right) \quad (iii)$$

Por dado:

$$\theta = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ = \frac{2\pi}{3}$$

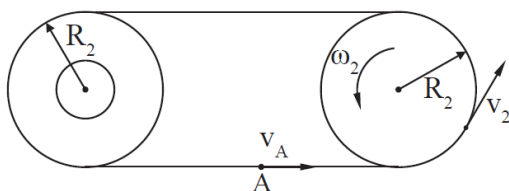
Logo, substituindo em (iii):

$$\Rightarrow v_B = \frac{2R\omega}{2\pi/3}$$

Portanto:

$$v_B = \frac{3\omega R}{\pi}$$

48. Para o ponto A:



Relacionando a velocidade do ponto "A" com a velocidade tangencial da polia R_2 :

Verifica-se que:

$$v_A = v_2$$

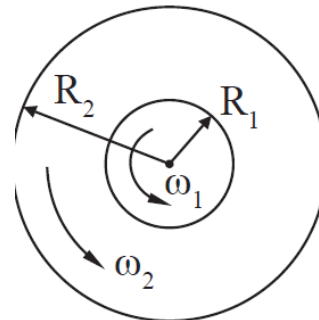
$$\Rightarrow v_A = (\omega_2 R_2) = (5)(0,2) = 1 \text{ m/s}$$

Agora, para dar uma volta completa, deve percorrer $\ell = 5 \text{ m}$, e o tempo que levará será:

$$t_A = \frac{\ell}{v_A} = \frac{5 \text{ m}}{1 \text{ m/s}}$$

$$\therefore t_A = 5 \text{ s}$$

Para o ponto B:



$$\omega_1 = \omega_2$$

Sua velocidade v_B relaciona-se com a polia R_1 , assim:

$$v_B = \omega_1 R_1$$

Além disso, para as polias que giram em torno de um mesmo centro, verifica-se que:

$$v_B = \omega_2 R_1 = (5)(0,1)$$

$$\Rightarrow v_B = 0,5 \text{ m/s}$$

Em seguida, para dar uma volta completa, deverá percorrer $\ell = 7 \text{ m}$, e o tempo gasto será:

$$t_B = \frac{\ell}{v_B} = \frac{7 \text{ m}}{0,5 \text{ m/s}}$$

$$\therefore t_B = 14 \text{ s}$$

49. SOLUÇÃO:

A partir dos dados:

$$\omega_0 = 0,$$

$$\omega_f = 120 \text{ rev/s} \quad \text{e}$$

$$\alpha = 6\pi \text{ rad/s}^2 = 3 \text{ rev/s}^2$$

Em seguida, utilizando a equação do M.C.U.V.:

$$\omega_f^2 = \omega_0^2 + 2\alpha\theta$$

$$\Rightarrow (120)^2 = (0)^2 + 2(3)\theta$$

$$\therefore \theta = 2400 \text{ rev}$$

50. SOLUÇÃO:

Para a roda, depois de 4 segundos, sua velocidade angular final será dada por:

$$\omega_f = \omega_0 + \alpha t$$

$$\Rightarrow \omega_f = 0 + (2)(4)$$

$$\Rightarrow \omega_f = 8 \text{ rad/s}$$

A velocidade de saída, v_s — horizontal — do objeto em "O" será:



$$v_s = \omega_f \cdot 2 = (8)(2) = 16 \text{ m/s}$$

Para a componente horizontal do movimento do objeto:

$$e = v_s t_v$$

$$\Rightarrow (3 + x) = 16t_v \quad (i)$$

E, para a componente vertical:

$$h = v_{0y} t_v + \frac{1}{2} g t_v^2$$

$$\Rightarrow 5 = (0)t_v + \frac{1}{2} (10)t_v^2$$

$$\Rightarrow 5 = 5t_v^2$$

$$\Rightarrow t_v = 1 \text{ s} \quad (ii)$$

Substituindo (ii) em (i):

$$3 + x = 16(1)$$

$$\therefore \boxed{x = 13 \text{ m}}$$

51. SOLUÇÃO

Utilizando a relação:

$$v = \omega r$$

$$\Rightarrow \omega = \frac{v}{r} = \frac{1}{0,5} = 2 \text{ rad/s}$$

Em seguida:

$$\theta = \theta_0 + \omega(t - t_0) = \omega t$$

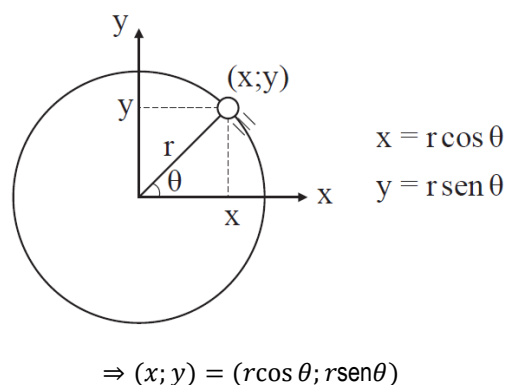
$$\Rightarrow \theta = 2t$$

Substituindo $t = 0,5 \text{ s}$:

$$\Rightarrow \theta_{(t=0,5)} = 2(0,5)$$

$$\Rightarrow \theta_{(t=0,5)} = 1 \text{ rad} \equiv \frac{180^\circ}{\pi} \quad (i)$$

Para as coordenadas $(x; y)$:

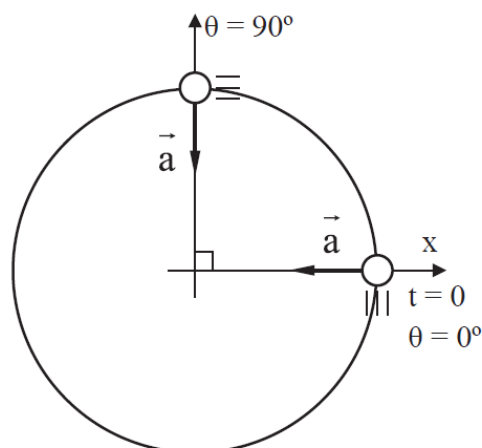


Em $t = 0,5 \text{ s}$:

$$\therefore (x_1; y_1) = \left(0,5 \cos \left(\frac{180^\circ}{\pi} \right); 0,5 \sin \left(\frac{180^\circ}{\pi} \right) \right)$$

Como $v = 1 \text{ m/s}$, então, no M.C.U., temos:

$$\begin{cases} a_T = 0 \text{ e} \\ a_C = a = \frac{v^2}{r} = \frac{1}{0,5} = 2 \text{ m/s}^2 \end{cases}$$



Em $t = 0 \text{ s} \Rightarrow \theta = 0^\circ$. Portanto:

$$\vec{a} = -2\hat{i} \text{ m/s}^2$$

Em $\theta = 90^\circ$:

$$\vec{a} = -2\hat{j} \text{ m/s}^2$$

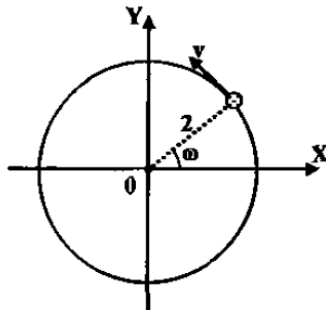
52. I) A equação da trajetória é:

$$x^2 + y^2 = 4\text{sen}^2(\omega t) + 4\text{cos}^2(\omega t)$$

$$x^2 + y^2 = 2^2$$



Uma circunferência de raio “2”, com centro na origem das coordenadas.



II) As componentes da velocidade nas direções X e Y são:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(2\sin(\omega t)) = 2\omega \cos(\omega t)$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}(2\cos(\omega t)) = -2\omega \sin(\omega t)$$

Assim, o módulo da velocidade é:

$$v = [(2\omega \cos(\omega t))^2 + (-2\omega \sin(\omega t))^2]^{1/2}$$

$$v = 2\omega \text{ m/s}$$

III) As componentes tangencial e normal da aceleração são:

$$a_T = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(2\omega) = 0$$

$$a_N = \frac{v^2}{R} = \frac{4\omega^2}{2} = 2\omega^2$$

IV) Como o módulo da velocidade é constante, a aceleração tangencial é nula e existe aceleração centrípeta. Portanto, trata-se de um **M.C.U.** — **Movimento Circular Uniforme.**

53. Seja t o tempo que a bala leva para chegar de A a B. Então, para que AB seja paralelo ao eixo do cone, é necessário que, nesse intervalo de tempo, o orifício A gire um ângulo igual a 2π rad. Logo, sua velocidade angular será:

$$\omega = \frac{\theta}{t} = \frac{2\pi}{t}$$

Por outro lado, o tempo que a bala leva para chegar de A a B é:

$$t = \frac{AB}{v}$$

Dos triângulos $\triangle ODC$ e $\triangle ADB$, temos:

$$\cot \alpha = \frac{4R}{R} = \frac{AB}{R/2}$$

$$AB = 2R$$

Substituindo as equações (2) e (3) na equação (1), obtemos:

$$\omega = \frac{2\pi}{2R/v} = \frac{2\pi}{(2)(\pi/4)}$$

Portanto:

$$\boxed{\omega = 4 \text{ rad/s}} \quad (\text{D})$$

54.

Sejam t_1 , t_2 e t_3 os tempos que a roda leva para realizar a 1ª, 2ª e 3ª voltas, respectivamente. Então, a rapidez angular média é:

$$\omega_m = \frac{\theta_1 + \theta_2 + \theta_3}{t_1 + t_2 + t_3}$$

$$\omega_m = \frac{2\pi + 2\pi + 2\pi}{\frac{2\pi}{60} + \frac{2\pi}{150} + \frac{2\pi}{100}}$$

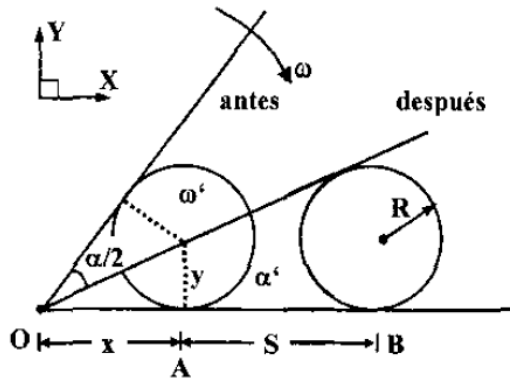
$$\omega_m = \frac{30}{\frac{5}{3} + \frac{2}{3} + \frac{3}{3}}$$

$$\boxed{\omega_m = 90 \text{ rad/s}}$$

Alternativa E.

55. 1ª forma

Seja ω' a rapidez angular do cilindro; então, depois de transcorrido um intervalo de tempo Δt :



O deslocamento linear do cilindro é:

$$S = \omega' R \Delta t$$

O deslocamento angular da barra é:

$$\theta = \omega \Delta t$$

O ângulo formado pela barra é:

$$\alpha' = \alpha - \theta = \alpha - \omega \Delta t$$

Por outro lado, na figura, observa-se que:

$$OB = OA + AB$$

$$R \operatorname{ctg} \left(\frac{\alpha'}{2} \right) = R \operatorname{ctg} \left(\frac{\alpha}{2} \right) + S$$

De (1) e (3), em (4), obtemos:

$$\operatorname{ctg} \left(\frac{\alpha - \omega \Delta t}{2} \right) = \operatorname{ctg} \left(\frac{\alpha}{2} \right) + \omega' \Delta t$$

$$\omega' = \frac{1}{\Delta t} \left[\operatorname{ctg} \left(\frac{\alpha - \omega \Delta t}{2} \right) - \operatorname{ctg} \left(\frac{\alpha}{2} \right) \right]$$

$$\omega' = \frac{1}{\Delta t} \frac{\operatorname{sen} \left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha}{2} + \frac{\omega \Delta t}{2} \right)}{\operatorname{sen} \left(\frac{\alpha}{2} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\omega \Delta t}{2} \right)}$$

$$\omega' = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{\omega}{2} \right) \left[\frac{\operatorname{sen} \left(\frac{\omega \Delta t}{2} \right)}{\frac{\omega \Delta t}{2}} \right]}{\operatorname{sen} \left(\frac{\alpha}{2} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\omega \Delta t}{2} \right)}$$

$$\omega' = \frac{\left(\frac{\omega}{2} \right) (1)}{\operatorname{sen} \left(\frac{\alpha}{2} \right) \left[\operatorname{sen} \left(\frac{\alpha}{2} \right) (1) - \cos \left(\frac{\alpha}{2} \right) (0) \right]}$$

$$\boxed{\omega' = \frac{\omega}{2 \operatorname{sen}^2 \left(\frac{\alpha}{2} \right)}}$$

2ª forma

As coordenadas retangulares do centro do cilindro são:

$$x = R \operatorname{ctg} \left(\frac{\alpha}{2} \right) \quad y = R$$

As componentes da velocidade do centro do cilindro são:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = -\frac{1}{2} R \operatorname{csc}^2 \left(\frac{\alpha}{2} \right) \left(\frac{d\alpha}{dt} \right)$$

$$v_x = \frac{1}{2} R \omega \operatorname{csc}^2 \left(\frac{\alpha}{2} \right)$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{dR}{dt} = 0$$

O módulo da velocidade do centro do cilindro é:

$$v = (v_x^2 + v_y^2)^{1/2}$$

$$v = \frac{R \omega}{2 \operatorname{sen}^2 \left(\frac{\alpha}{2} \right)}$$

Logo, a rapidez angular com que o cilindro gira é:

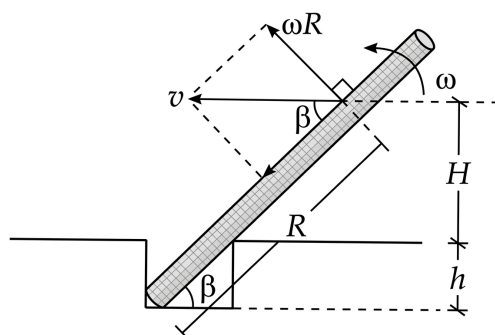
$$\omega' = \frac{v}{R} = \frac{\omega}{2 \operatorname{sen}^2 \left(\frac{\alpha}{2} \right)}$$

$$\omega' = \frac{4}{(2) \left(\frac{1}{2} \right)^2}$$

$$\boxed{\omega' = 8 \frac{\text{rad}}{\text{s}}} \quad (E)$$



56.



$$R = \frac{H + h}{\sin \beta}$$

Mas, como:

$$H \gg h$$

então:

$$H + h \approx H$$

Então:

$$R = \frac{H}{\sin \beta}$$

Observa-se que:

$$\omega R = v \cdot \sin \beta$$

Substituindo (I):

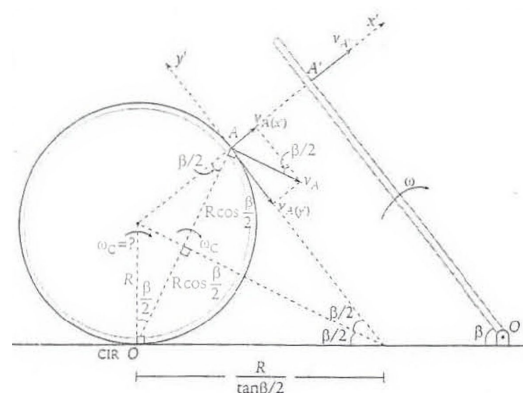
$$\omega \left(\frac{H}{\sin \beta} \right) = v \cdot \sin \beta$$

Portanto:

$$\omega = \frac{v}{H} \cdot \sin^2 \beta$$

Gabarito: D

57.



Da imagem

$$v_{A(x)} = v_{A'}$$

Como

$$v_A = \omega_C d_{OA} = \omega_C \left[2R \cos \left(\frac{\beta}{2} \right) \right]$$

Também

$$v_{A(x)} = v_A \sin \left(\frac{\beta}{2} \right)$$

Substituímos (II):

$$v_{A(x)} = \left[\omega_C 2R \sin \left(\frac{\beta}{2} \right) \cos \left(\frac{\beta}{2} \right) \right]$$

$$\rightarrow v_{A(x)} = \omega_C R \sin \beta$$

Para o ponto A'

$$v_{A'} = \omega d_{OA'} = \omega \left[\frac{R}{\tan \left(\frac{\beta}{2} \right)} \right]$$

(III) e (IV) em (I)

$$\omega_C R \sin \beta = \frac{\omega R}{\tan \left(\frac{\beta}{2} \right)}$$

$$\therefore \omega_C = \frac{\omega}{\sin \beta \tan \left(\frac{\beta}{2} \right)} = \frac{\omega}{2 \sin^2 \left(\frac{\beta}{2} \right)}$$

Gabarito: C