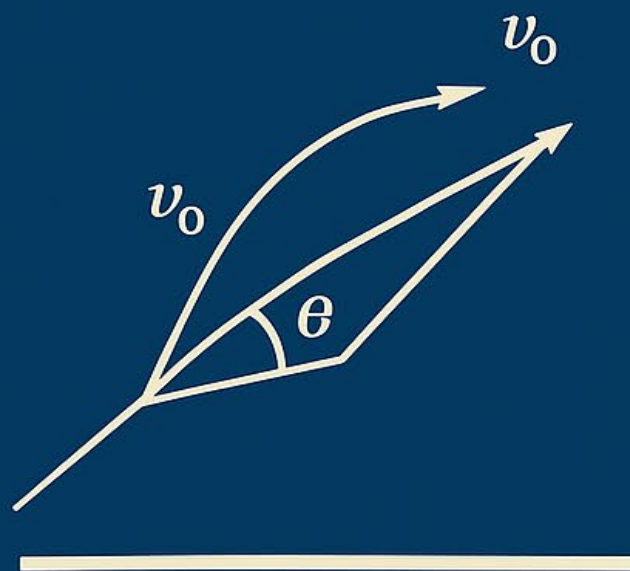
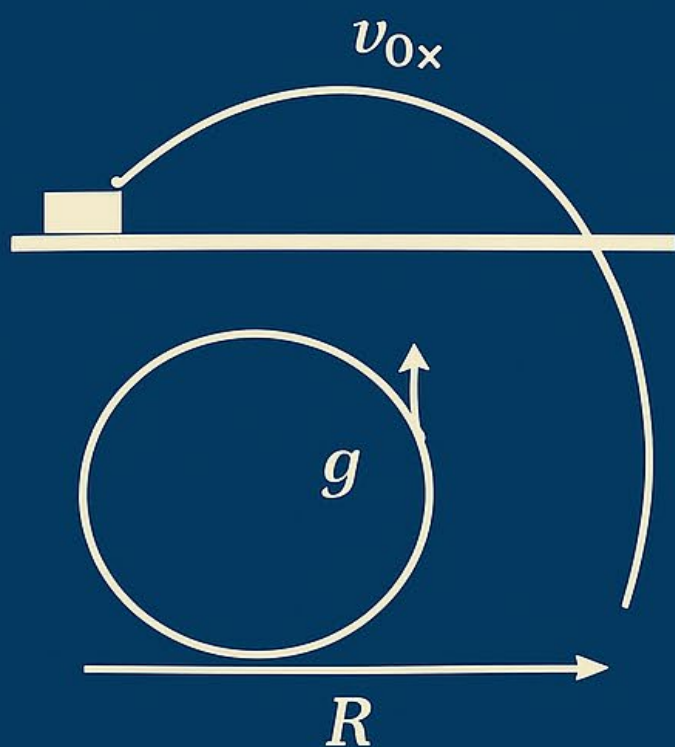


LANÇAMENTO HORIZONTAL E OBLÍQUO

Apostila de Física para ITA - IME



PROFESSOR LAERTE PEREIRA



LANÇAMENTO HORIZONTAL E OBLÍQUO

1. INTRODUÇÃO

O estudo do lançamento oblíquo nos permite prever trajetórias de objetos que são lançados formando ângulos em relação à horizontal. Conhecendo a aceleração da gravidade, a velocidade inicial e o ângulo de lançamento do objeto, é possível prever seu tempo de subida, sua altura máxima, seu tempo de descida e seu alcance. As extrapolações desse estudo permitem, por exemplo, a realização de manobras com segurança, evitando que esportistas sofram acidentes.

Para facilitar a exposição do conteúdo, separaremos o estudo de lançamentos em dois casos: lançamento horizontal e lançamento oblíquo.

2. LANÇAMENTO HORIZONTAL

Consideremos uma partícula lançada de um ponto O próximo da superfície da Terra, com velocidade $\vec{V}_0$ em uma direção horizontal. Desprezando os efeitos do ar, sua trajetória será curva, semelhante à trajetória desenhada na Figura 1. Para esse caso, adotemos um sistema cartesiano ortogonal Oxy, com o eixo Ox de mesmo sentido de $\vec{V}_0$ e o eixo Oy na direção vertical, orientado para baixo.

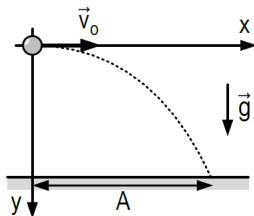


Figura 1

Seja P a posição da partícula num instante qualquer após o lançamento (mas antes de atingir o solo). Sendo $\vec{V}$ a velocidade da partícula nesse instante, façamos a decomposição de $\vec{V}$ nas direções de Ox e Oy, obtendo as velocidades componentes $\vec{V}_x$ e $\vec{V}_y$.

(Figura 2).

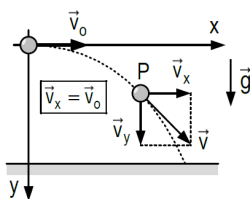


Figura 2

Como a aceleração da gravidade $\vec{g}$ tem direção vertical, apenas a componente $\vec{V}_y$ é variável; a componente $\vec{V}_x$ permanece constante e, portanto, $\vec{V}_x = \vec{V}_0$. A Figura 3 representa a partícula em duas posições P1 e P2, com velocidades $\vec{V}_1$ e $\vec{V}_2$; decompondo essas velocidades nas direções de Ox e Oy devemos ter

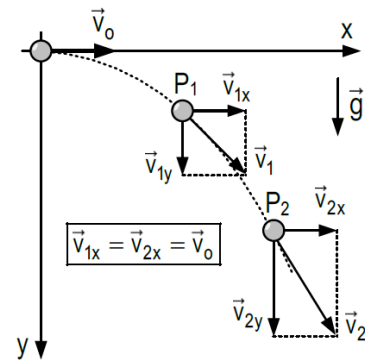
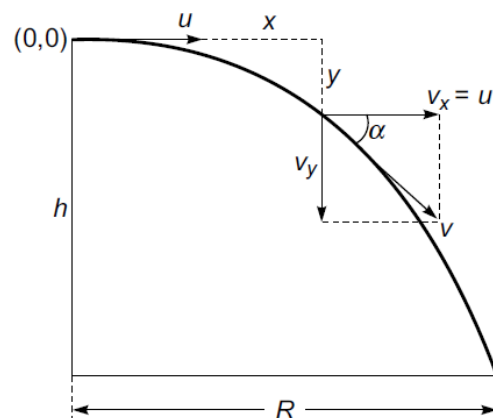


Figura 3

Seja uma partícula lançada horizontalmente com velocidade inicial u de uma altura h .



3. VELOCIDADE EM QUALQUER INSTANTE t

Temos

$$v_x = u$$

$$v_y = u_y + gt$$

$$v_y = 0 + gt$$

$\therefore$

$$\vec{v} = u\hat{i} - gt\hat{j}$$

$$v = \sqrt{u^2 + (gt)^2}$$

Também,

$$\tan \alpha = \frac{gt}{u}$$



4. POSIÇÃO EM QUALQUER INSTANTE t

Tomando o ponto de projeção como a origem, o vetor posição em qualquer instante t

onde $x = ut$ e $y = \frac{1}{2}gt^2$

$$\vec{r} = x\hat{i} - y\hat{j}$$

$$\vec{r} = ut\hat{i} - \frac{1}{2}gt^2\hat{j}$$

Deslocamento

$$s = r = \sqrt{(ut)^2 + \left(\frac{1}{2}gt^2\right)^2}$$

EQUAÇÃO DA TRAJETÓRIA

Temos

$$x = ut \text{ ou } t = \frac{x}{u}$$

$$y = -\frac{1}{2}gt^2$$

$$y = -\frac{1}{2}g\left(\frac{x}{u}\right)^2$$

ou

$$y = -\frac{1}{2}g\frac{x^2}{u^2}$$

5. TEMPO DE VOO (T)

Temos

$$h = u_y t + \frac{1}{2}a_y t^2$$

$$h = 0 + \frac{1}{2}gT^2$$

o que fornece

$$T = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

6. ALCANCE HORIZONTAL (A)

$$A = u_x \cdot T$$

$$A = u \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

Dica do Laerte:

A velocidade média em todo o tempo de movimento é

$$v_m = \frac{\text{Deslocamento}}{\text{Tempo}}$$

$$v_m = \frac{\sqrt{h^2 + R^2}}{T}$$

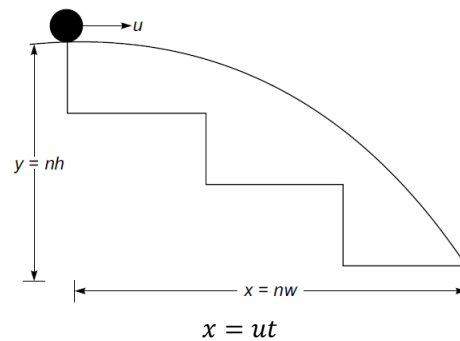
$$v_m = \frac{\sqrt{h^2 + \frac{2u^2h}{g}}}{\sqrt{\frac{2h}{g}}}$$

A aceleração média no tempo total de voo é g para baixo.

EXEMPLO: Uma bola rola para fora do topo de uma escadaria com velocidade horizontal constante u . Se os degraus têm altura h metro e largura w metro, mostre que a bola tocará exatamente a borda do n -ésimo degrau se

$$n = \frac{2hu^2}{gw^2}.$$

RESOLUÇÃO:



$$nw = ut$$

$\therefore$

$$t = \frac{nw}{u}$$

e deslocamento vertical

$$y = 0 + \frac{1}{2}gt^2$$

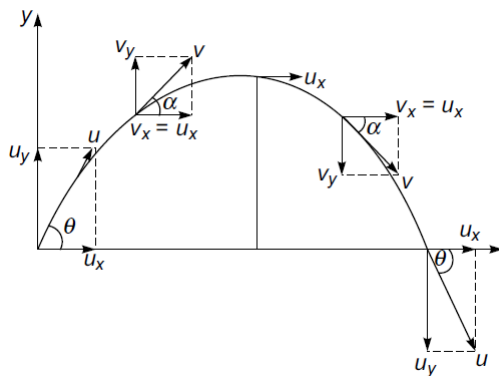
$$nh = \frac{1}{2}g\left(\frac{nw}{u}\right)^2$$

$$= \frac{1}{2}g\frac{n^2w^2}{u^2}$$

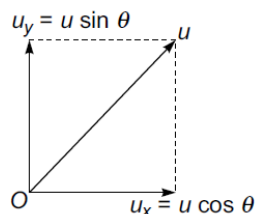
$$n = \frac{2hu^2}{gw^2}$$



LANÇAMENTO OBLÍQUO



Considere uma partícula que é lançada com velocidade inicial u sob um ângulo θ com a horizontal (chamado de ângulo de projeção). A velocidade u tem dois componentes retangulares:



- i) O componente horizontal $u \cos \theta$, que permanece constante durante todo o movimento da partícula.
- ii) O componente vertical $u \sin \theta$, que varia com o tempo devido ao efeito da gravidade. Assim, temos a velocidade inicial

$$\vec{u} = u_x \hat{i} + u_y \hat{j}$$

$$\vec{u} = u \cos \theta \hat{i} + u \sin \theta \hat{j}$$

1. VELOCIDADE EM QUALQUER INSTANTE t

Usando a primeira equação do movimento na direção vertical, temos

$$v_y = u_y - gt$$

$$v_y = u \sin \theta - gt$$

$\therefore$ velocidade em qualquer instante t ,

$$\vec{v} = v_x \hat{i} + v_y \hat{j}$$

$$\vec{v} = u \cos \theta \hat{i} + (u \sin \theta - gt) \hat{j}$$

2. VELOCIDADE EM QUALQUER ALTURA

Em qualquer altura h

$$v_x = u \cos \theta$$

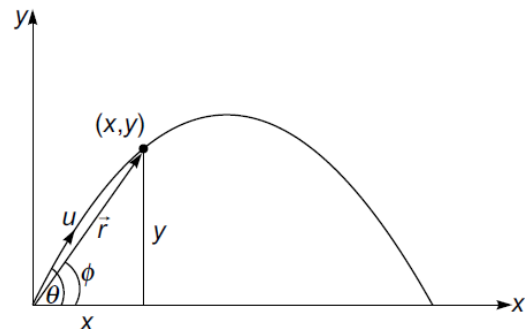
$$v_y^2 = u_y^2 - 2gh$$

$$v_y^2 = (u \sin \theta)^2 - 2gh$$

obtemos

$$v = \sqrt{u^2 - 2gh}$$

3. POSIÇÃO EM QUALQUER INSTANTE t



A posição de uma partícula em qualquer instante t é dada por

$$\vec{r} = x \hat{i} + y \hat{j}$$

$$x = u \cos \theta t$$

$$y = u \sin \theta t - \frac{1}{2} g t^2$$

$\therefore$

$$\vec{r} = u \cos \theta t \hat{i} + \left(u \sin \theta t - \frac{1}{2} g t^2 \right) \hat{j}$$

$$r = \sqrt{(u \cos \theta t)^2 + \left(u \sin \theta t - \frac{1}{2} g t^2 \right)^2}$$

$$r = ut \sqrt{1 + \left(\frac{gt}{2u} \right)^2 - \frac{gt \sin \theta}{u}}$$

e

$$\tan \phi = \frac{y}{x}$$



$$\phi = \tan^{-1} \left[\frac{u \cdot \sin \theta t - \frac{1}{2} g t^2}{u t \cdot \cos \theta} \right]$$

$$\phi = \tan^{-1} \left[\frac{2u \sin \theta - g t}{2u \cos \theta} \right]$$

O ângulo de elevação ϕ do ponto mais alto do projétil:

$$t = \frac{u \sin \theta}{g}$$

$$\tan \phi = \frac{2u \sin \theta - g \cdot \frac{u \sin \theta}{g}}{2u \cos \theta}$$

ou

$$\tan \phi = \frac{\tan \theta}{2}$$

4. EQUAÇÃO DA TRAJETÓRIA

Temos,

$$x = u \cos \theta t$$

$$t = \left(\frac{x}{u \cos \theta} \right)$$

$$y = u \sin \theta t - \frac{1}{2} g t^2$$

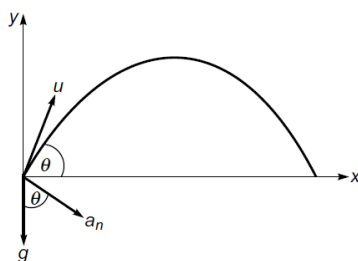
$$y = u \sin \theta \left(\frac{x}{u \cos \theta} \right) - \frac{1}{2} g \left(\frac{x}{u \cos \theta} \right)^2$$

$$y = x \tan \theta - \frac{g x^2}{2 u^2 \cos^2 \theta}$$

A equação acima representa uma parábola. Assim, a trajetória de um projétil é parabólica por natureza.

DICA DO LAERTE: COMO ENCONTRAR O RAIOS DE CURVATURA DO PROJÉTIL

a) No ponto de lançamento:



A partir da Figura, fica claro que $a_n = g \cos \theta$.

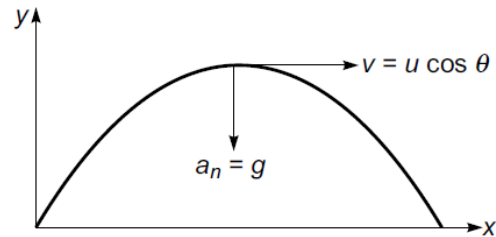
Como sabemos,

$$a_n = \frac{v^2}{R}$$

$\therefore$

$$R = \frac{v^2}{a_n} = \frac{u^2}{g \cos \theta}$$

b) No ponto mais alto do projétil:



$$v = u \cos \theta$$

$\therefore$

$$R = \frac{v^2}{a_n} = \frac{(u \cos \theta)^2}{g}$$

$$R = \frac{u^2 \cos^2 \theta}{g}$$

Importante:

1. A velocidade média em todo o tempo de movimento deste tipo de projeção é $u \cos \theta$.
2. A aceleração média no movimento de projétil é g para baixo.

5. TEMPO DE VOO (T)

O deslocamento na direção vertical (eixo y) torna-se zero em todo o tempo de movimento. Então, começamos com a equação do movimento vertical:

$$y(t) = u_y t - \frac{1}{2} a_y t^2$$

No ponto mais alto (ou quando o projétil volta ao nível inicial), a posição vertical é $y = 0$ no instante $t = T$. Então:

$$0 = u_y T - \frac{1}{2} g T^2$$

Resolvendo essa equação para o tempo total T :

$$T = \frac{2u_y}{g}$$



Como a componente vertical inicial é $u_y = u \sin \theta$, obtemos:

$$T = \frac{2u \sin \theta}{g}$$

6. ALTURA MÁXIMA ATINGIDA (H)

No ponto mais alto da trajetória, $v_y = 0$, então temos:

$$v_y^2 = u_y^2 - 2gh$$

$$0 = u_y^2 - 2gH$$

o que fornece

$$H = \frac{u_y^2}{2g} = \frac{u^2 \sin^2 \theta}{2g}$$

7. ALCANCE HORIZONTAL (R)

$$R = u_x \cdot T = u_x \cdot \frac{2u_y}{g}$$

$$R = \frac{2u_x u_y}{g}$$

$$R = \frac{2u \cos \theta u \sin \theta}{g}$$

$$R = \frac{u^2 \sin 2\theta}{g}$$

Para alcance máximo, $\sin 2\theta = 1$ ou $2\theta = 90^\circ$ ou $\theta = 45^\circ$.

Assim,

$$R_{\max} = \frac{u^2}{g}$$

Correspondente,

$$H = \frac{u^2 \sin^2 45^\circ}{2g} = \frac{u^2}{4g}$$

Existem dois ângulos de projeção para o mesmo alcance:

Substituindo θ por $(90^\circ - \theta)$ na fórmula do alcance, obtemos

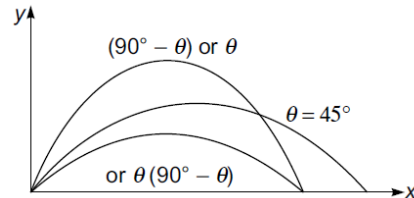
$$R' = \frac{u^2 \sin 2(90^\circ - \theta)}{g}$$

dica: $\sin(180^\circ - \theta) = \sin \theta$

$$R' = \frac{u^2 \sin 2(180^\circ - 2\theta)}{g}$$

$$R' = \frac{u^2 \sin 2\theta}{g} = R$$

Assim, para uma dada velocidade de lançamento, um projétil tem o mesmo alcance para ângulos de lançamento θ e $(90^\circ - \theta)$.



Tempo de voo para o ângulo de lançamento θ ,

$$T_1 = \frac{2u \sin \theta}{g}$$

e tempo de voo para o ângulo de lançamento $(90^\circ - \theta)$,

$$T_2 = \frac{2u \sin(90^\circ - \theta)}{g}$$

$$T_2 = \frac{2u \cos \theta}{g}$$

Multiplicando T_1 e T_2 , obtemos

$$T_1 T_2 = \frac{2u \sin \theta}{g} \cdot \frac{2u \cos \theta}{g}$$

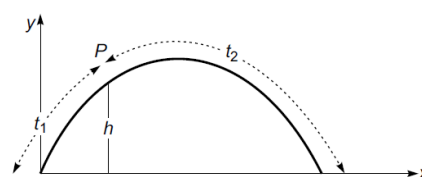
ou

$$T_1 T_2 = \frac{2}{g} \left(\frac{u^2 \sin 2\theta}{g} \right)$$

$$T_1 T_2 = \frac{2R}{g}$$

Pontos mais importantes sobre o movimento de projéteis

1. Se t_1 é o tempo gasto por um projétil para alcançar um ponto P a uma altura h e t_2 é o tempo gasto do ponto P até o nível do solo, então...



$$t_1 + t_2 = T = \frac{2u \sin \theta}{g}$$



ou

$$u \cdot \sin \theta = \frac{g(t_1 + t_2)}{2}$$

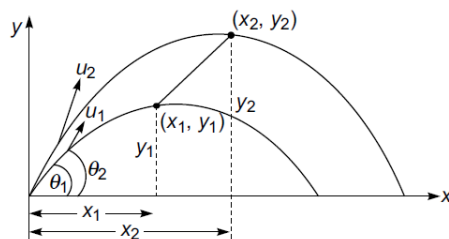
A altura do ponto P ,

$$h = u \sin \theta t_1 - \frac{1}{2} g t_1^2$$

$$h = \frac{g(t_1 + t_2)}{2} t_1 - \frac{1}{2} g t_1^2$$

$$h = \frac{1}{2} g t_1 t_2.$$

2. Trajetória de um projétil observada por outro projétil:



Suponha que duas partículas sejam lançadas simultaneamente do mesmo ponto com velocidades iniciais u_1 e u_2 sob ângulos θ_1 e θ_2 , respectivamente.

$$x_1 = u_1 \cos \theta_1 t$$

$$x_2 = u_2 \cos \theta_2 t$$

$\therefore$

$$x_2 - x_1 = (u_2 \cos \theta_2 - u_1 \cos \theta_1) t \quad eq1$$

$$y_1 = u_1 \sin \theta_1 t - \frac{1}{2} g t^2$$

$$y_2 = u_2 \sin \theta_2 t - \frac{1}{2} g t^2$$

$\therefore$

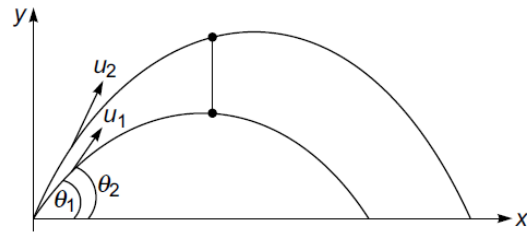
$$y_2 - y_1 = (u_2 \sin \theta_2 - u_1 \sin \theta_1) t \quad eq2$$

Dividindo a Eq. (2) pela Eq. (1), obtemos

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \left[\frac{u_2 \sin \theta_2 - u_1 \sin \theta_1}{u_2 \cos \theta_2 - u_1 \cos \theta_1} \right] = k \text{ (constant)}$$

$$(y_2 - y_1) = k (x_2 - x_1)$$

A expressão acima representa uma linha reta. Portanto, a trajetória de um projétil vista por outro projétil é uma linha reta.



Para $u_2 \cos \theta_2 = u_1 \cos \theta_1$, temos

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \infty$$

$$= \tan 90^\circ$$

Para a condição dada, observa-se uma linha reta vertical.

8. PARÁBOLA DE SEGURANÇA (P.S)

Dispositivo que ajuda a resolver problemas de máximos e mínimos, sem uso o de cálculo.

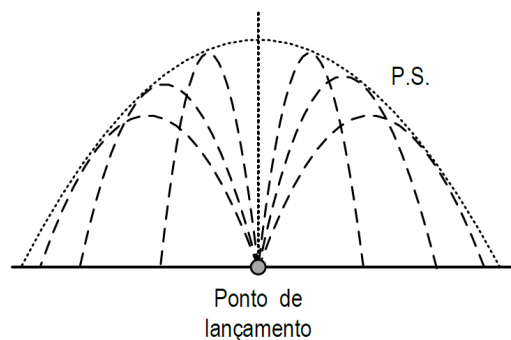
Perguntas que buscamos responder ao estudar a parábola de segurança:

Pergunta 1: Qual a menor velocidade de lançamento que permite o projétil atingir um ponto específico (pré-determinado).

Pergunta 2: Fixada a velocidade de lançamento, qual é a maior distância que o projétil consegue atingir?

Perceba que na primeira pergunta estamos fixando a distância e buscando minimizar a velocidade. Já na segunda pergunta, estamos fixando a velocidade e buscando maximizar a distância.

A Parábola de segurança é uma curva que delimita a região que um projétil consegue atingir em um determinado plano. Para entender essa afirmação, considere um projétil sendo lançado com velocidade v_0 em diferentes direções (diferentes ângulos de lançamento), neste caso, teríamos a situação ilustrada na figura abaixo.



Pontos situados externamente a região delimitada pela parábola de segurança não pode ser atingidos pelo projétil.

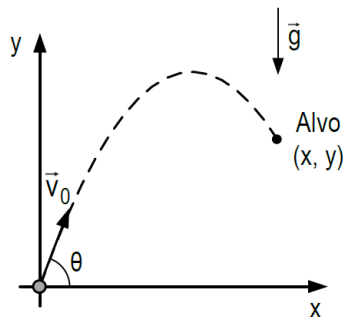


Para determinarmos a equação da P.S. vamos estudar o problema fundamental da balística.

8.1 – PROBLEMA FUDAMENTAL DA BALÍSTICA EXTERIOR

Observação: Sempre iremos considerar que os projéteis serão lançados da origem do sistema cartesiano.

Esse problema consiste no seguinte: dado a velocidade de lançamento (v_0), a aceleração da gravidade (g) e a posição do alvo (x, y), qual é o ângulo de lançamento θ que fará nosso projétil atingir o alvo?



Observe que para o alvo ser atingido as suas coordenadas (x, y) devem pertencer à trajetória do projétil. Desse modo, para que o alvo possa ser alvejado, basta que as coordenadas do alvo satisfaçam a equação da trajetória:

$$y = x \tan \theta - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \theta} \quad \text{Eq. (1)}$$

Como nesse problema o ângulo θ é a variável do problema, vamos destacá-lo na expressão acima. Para isso, lembre-se que

$$\frac{1}{\cos^2 \theta} = \tan^2 \theta + 1$$

desse modo,

$$y = x \tan \theta - \frac{gx^2}{2v_0^2} (\tan^2 \theta + 1)$$

$$\left[\frac{gx^2}{2v_0^2} \right] \tan^2 \theta - x \tan \theta + \left[y + \frac{gx^2}{2v_0^2} \right] = 0 \quad \text{Eq. (2)}$$

A expressão acima, que se trata de uma releitura da equação da trajetória, é uma equação quadrática na variável $\tan \theta$.

A solução da Eq. (2), fornece a tangente do ângulo de lançamento que permitirá o projétil atingir o alvo. Contudo, temos três possibilidades

Se $\begin{cases} \Delta > 0 \therefore \exists \theta_1 \text{ e } \theta_2 \text{ que satisfazem o problema;} \\ \Delta = 0 \therefore \exists \theta (\theta_1 = \theta_2) \text{ que satisfaz o problema;} \\ \Delta < 0 \therefore \nexists \theta \text{ que satisfaça o problema.} \end{cases}$

Nos casos $\Delta > 0$ e $\Delta = 0$ o alvo pode ser alvejado. Contudo, se $\Delta < 0$, significa que o alvo é inatingível (com a velocidade de lançamento pré-determinada).

Calculando o discriminante:

$$\Delta = (-x)^2 - 4 \left(\frac{gx^2}{2v_0^2} \right) \left(y + \frac{gx^2}{2v_0^2} \right)$$

$$\Delta = x^2 - \frac{2gx^2y}{v_0^2} - \frac{g^2x^4}{v_0^4}$$

$$\Delta = x^2 \left[1 - \frac{2gy}{v_0^2} - \frac{g^2x^2}{v_0^4} \right]$$

Conforme mencionado anteriormente, para que o alvo possa ser atingível devemos impor $\Delta \geq 0$, desse modo, como x^2 é quantidade sempre positiva, temos que:

$$\Delta \geq 0 \Rightarrow 1 - \frac{2gy}{v_0^2} - \frac{g^2x^2}{v_0^4} \geq 0$$

$$\therefore \frac{v_0^2}{2g} - y - \frac{gx^2}{2v_0^2} \geq 0$$

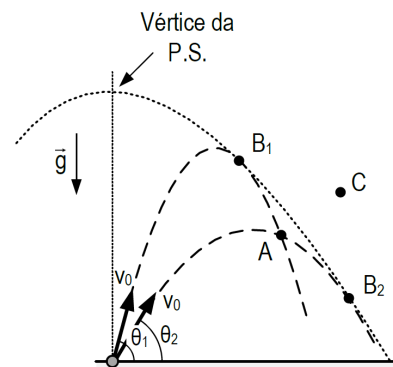
$$\therefore y \leq \frac{v_0^2}{2g} - \frac{gx^2}{2v_0^2} \quad \text{Eq. (3)}$$

A Eq. (3) representa a condição que as coordenadas (x, y) do alvo devem obedecer para que o alvo possa ser atingido pelo projétil. Logo, a equação da parábola de segurança será:

$$y = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{gx^2}{2v_0^2} \quad \text{Eq. (4)}$$

(Equação da parábola de segurança)

Para entender melhor a P.S. veja a figura abaixo.

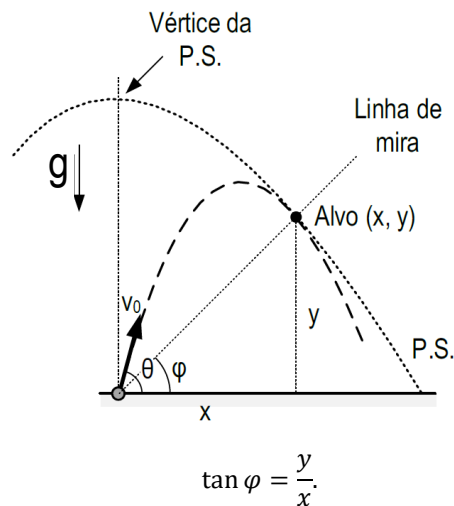




Perceba que A é um ponto localizado abaixo da P.S., este é o caso em que $\Delta < 0$ e, por esse motivo, existem dois ângulos, θ_1 e θ_2 que permitem que o projétil atinja o alvo. Já os pontos B1 e B2 estão localizados na P.S. (pontos que pertencem a P.S.), este é o caso em que temos $\Delta = 0$, o que implica que existe apenas um único ângulo que faz com que o alvo seja alvejado. Já C é um ponto fora da região delimitada pela parábola de segurança ($\Delta < 0$) e, desse modo, não importa o ângulo de lançamento, este alvo nunca será atingido.

8.2 – COMO ATINGIR UM ALVO SOBRE A P.S.

Dado um alvo nas coordenadas (x, y) , localizado sobre a parábola de segurança (como os pontos B1 e B2 mencionados na figura anterior), qual ângulo permite o projétil alvejar o alvo?



Observação:

O ângulo θ em questão é obtido através da obtenção das raízes da Eq. (3)

$$\underbrace{\left[\frac{gx^2}{2v_0^2} \right]}_{=A} \tan^2 \theta - \underbrace{x \tan \theta}_{=B} + \underbrace{\left[y + \frac{g}{2v_0^2} \right]}_{=C} = 0$$

$$\tan \theta = \frac{-B \pm \sqrt{\Delta}}{2A}$$

Aplicando a fórmula de Bhaskara, vem: Contudo, como alvo em questão pertence a parábola, temos que $\Delta = 0$ e, desse modo,

$$\tan \theta = \frac{-B}{2A}$$

Substituindo os parâmetros acima, vem:

Contudo, como alvo em questão pertence a parábola, temos que $\Delta = 0$ e, desse modo,

$$\tan \theta = \frac{-B}{2A}$$

Substituindo os parâmetros acima, vem:

$$\tan \theta = \frac{-(-x)}{2 \left(\frac{gx^2}{2v_0^2} \right)} \Rightarrow \tan \theta = \frac{v_0^2}{gx} \quad \text{Eq. (5)}$$

ou seja, o alvo só será atingido se o ângulo θ de lançamento for o mostrado acima.

Dica: É possível relacionar θ (ângulo de lançamento) e φ (ângulo de visagem). Para isso observe que:

$$\tan \theta = \frac{v_0^2}{gx} \text{ e } \tan \varphi = \frac{y}{x}$$

Da equação da P.S., temos:

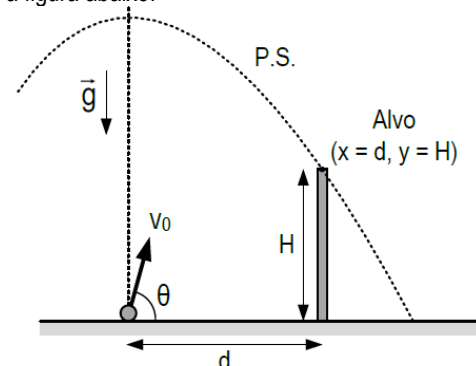
$$y = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{gx^2}{2v_0^2} \left(\frac{2}{x} \right)$$

$$\therefore 2 \left(\frac{y}{x} \right) = \frac{v_0^2}{gx} - \frac{gx}{v_0^2}$$

$$\therefore 2 \tan \varphi = \tan \theta - \frac{1}{\tan \theta}$$

$$\Rightarrow \boxed{\theta = 45^\circ + \frac{\varphi}{2}}$$

Exemplo de aplicação 1: Determinando a menor velocidade para atingir um alvo. Considere que devemos lançar um projétil do solo de modo que ele deve atravessar uma parede vertical de altura h que se encontra a uma distância d . Vamos determinar a menor velocidade com que o projétil deve ser lançado a fim de que ele consiga o feito de atravessar a parede. Para a determinação da menor velocidade precisamos impor que o topo da parede (ponto cuja coordenadas são $x = d$ e $y = h$) pertencem a parábola de segurança, conforme a figura abaixo.



Logo, como o ponto (d, h) onde o alvo se encontra deve pertencer à P.S. podemos escrever:



$$y = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{gx^2}{2v_0^2}$$

$$\{x = d \ y = h \Rightarrow h = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{gd^2}{2v_0^2}$$

$$\therefore 2v_0^2 gh = v_0^4 - g^2 d^2$$

$$\therefore v_0^4 - 2ghv_0^2 - g^2 d^2 = 0$$

Discriminante:

$$\Delta = -(2gh)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-g^2 d^2)$$

$$\Delta = 4g^2(h^2 + d^2)$$

Logo,

$$v_0^2 = \frac{-(-2gh) \pm 2g\sqrt{h^2 + d^2}}{2 \cdot 1}$$

$$\therefore v_0^2 = g[h + \sqrt{h^2 + d^2}]$$

$$\therefore v_0 = \sqrt{g[h + \sqrt{h^2 + d^2}]}$$

(Menor velocidade necessária para atingir o projétil)

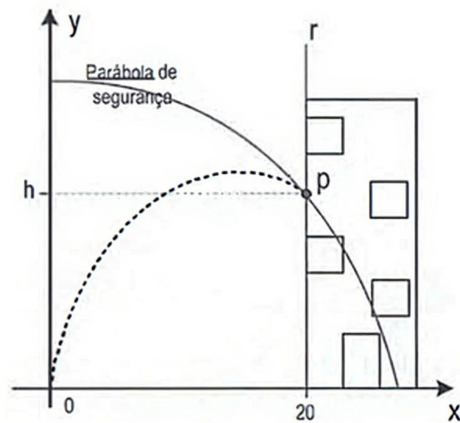
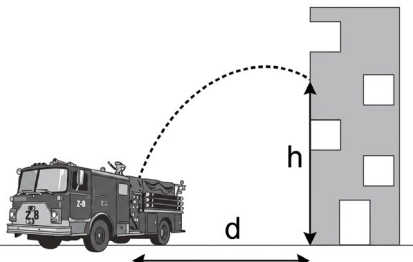
Observação: É importante lembrar que para atingir o alvo o ângulo deve ser ajustado adequadamente. Como esse alvo pertence à P.S. existe apenas um ângulo de lançamento que permite esse projétil atingir esse alvo com essa velocidade mínima.

Se nosso alvo se encontra sobre a P.S. o ângulo que permite ele acertar o alvo será

$$\tan \theta = \frac{v_0^2}{gx} = \frac{g[h + \sqrt{h^2 + d^2}]}{gd} \Rightarrow$$

$$\tan \theta = \frac{h + \sqrt{h^2 + d^2}}{d}$$

Exemplo Resolvido 2: Um prédio de 25 andares está em chamas e, dadas as grandes proporções do incêndio, o caminhão do corpo de bombeiros só consegue chegar a uma proximidade $d = 20$ m da base do prédio. Se a água desse esguicho é lançada com uma velocidade inicial $v_0 = 20$ m/s, o prof. Laerte pede que você determine a altura h da janela mais alta, que poderá ser atingida pelo jato d'água. Despreze a altura inicial do jato d'água, admitindo que ele parte do solo e use $g = 10$ m/s².



Equação da parábola de segurança:

$$Y = \frac{V_0^2}{2 \cdot g} - \frac{g}{2 \cdot V_0^2} X^2.$$

Para $g = 10$ m/s² e $V_0 = 20$ m/s, vem:

$$Y = \frac{(20)^2}{2 \cdot (10)} - \frac{10}{2 \cdot (20)^2} X^2 \Rightarrow$$

$$y = 20 - \frac{x^2}{80}$$

Equação da reta r :

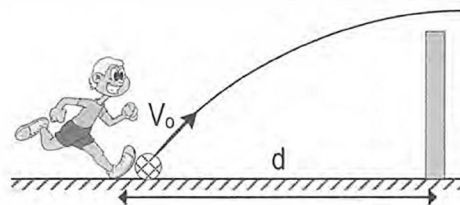
$$x = 20$$

Resolvendo o sistema de equações, vem:

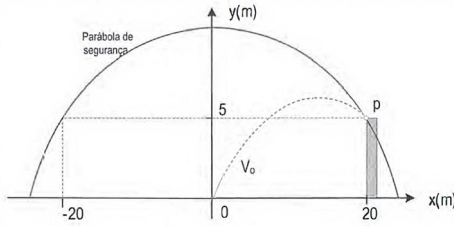
$$y = 20 - \frac{x^2}{80} = 20 - \frac{20^2}{80} = 20 - 5 = 15 \text{ m}$$

Portanto, o ponto P procurado tem coordenadas $(x, y) = (20, 15)$ e, portanto, está a uma altura $h = y = 15$ m.

Exemplo Resolvido 3: Pedrinho quer chutar uma bola de futebol por cima de um muro de altura $h = 5$ m, distante $d = 20$ m do local onde se encontra a bola. Sendo $g = 10$ m/s², o prof. Laerte pede que você determine a menor velocidade V_0 com que deve chutar a bola para atingir o seu objetivo.



Resolução: Determinaremos a velocidade mínima V_0 com que Pedrinho deverá chutar a bola para que ela parta do ponto de coordenadas $(0, 0)$ e passe pelo ponto mais alto do muro, de coordenadas $(20, 5)$ no sistema de coordenadas XY centrado na posição inicial a partir de onde a bola é chutada.

a velocidade V_0 mínima com que a bola deve ser chutada para atingir o ponto P, de coordenadas (20, 5), é a velocidade V_0 , associada à envoltória (ps), que passa exatamente sobre o ponto P pretendido. Assim, devemos impor a condição de que uma parábola de segurança passe pelo ponto desejado (20, 5) e determinar a velocidade V_0 associada a essa parábola de segurança.

Equação da parábola de segurança (envoltória):

$$Y = \frac{V_0^2}{2 \cdot g} - \frac{g}{2 \cdot V_0^2} \cdot X^2, \text{ com } g = 10 \text{ m/s}^2;$$

Condição a ser satisfeita:

$$x = 20 \text{ m} \Rightarrow y = 5 \text{ m}.$$

Substituindo, vem:

$$5 = \frac{V_0^2}{20} - \frac{10}{2 \cdot V_0^2} \cdot 20^2 \Rightarrow$$

$$5 = \frac{V_0^2}{20} - \frac{2000}{V_0^2}$$

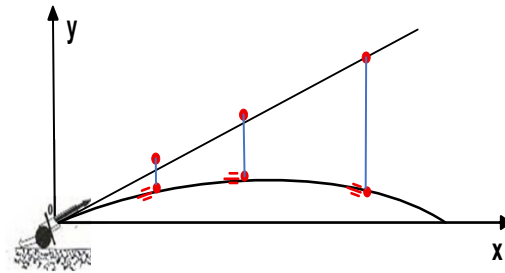
$$100 \cdot V_0^2 = V_0^4 - 40.000 \Rightarrow$$

$$V_0^4 - 100 \cdot V_0^2 - 40.000 = 0$$

$$V_0^2 = \frac{100 + \sqrt{(100)^2 + 4 \cdot 40.000}}{2} = 256,15 \Rightarrow$$

$$V_0 \cong 16 \text{ m/s}$$

Portanto, a menor velocidade V_0 com que Pedrinho deverá chutar a bola para que ela caia do outro lado do muro vale, aproximadamente, 16 m/s.

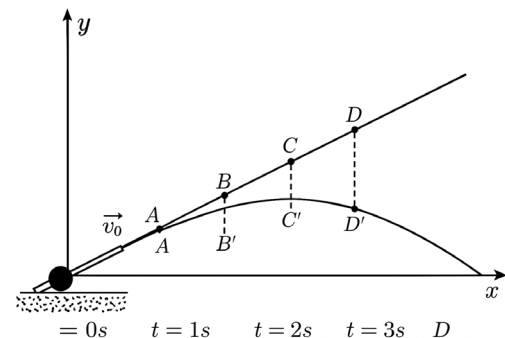


Conclusão: O lançamento oblíquo de um projétil, nas proximidades da Terra, livre das influências do ar, é a combinação de um movimento retilíneo uniforme com uma queda livre.

Lembrando que na queda livre, a partir do repouso, os deslocamentos escalares são obtidos através da expressão $\Delta S = \frac{1}{2} g t^2$, poderemos analisar a combinação de movimentos referentes ao lançamento oblíquo de um projétil.

Na figura abaixo, no primeiro segundo de movimento, enquanto o projétil se desloca de uma distância d, sofre, simultaneamente, uma queda igual a ΔS , onde, para $g = 10 \text{ m/s}^2$, teremos:

$$\Delta S = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 1^2 \Rightarrow \Delta S = 5 \text{ m}$$



9. DICA DE OURO: TRATAMENTO GEOMÉTRICO

Quando um canhão dispara um projétil obliquamente, num local onde a influência do ar é desprezível, se não houvesse a ação da gravidade seu movimento seria retilíneo e uniforme segundo a direção do vetor-velocidade $\vec{V}_0$.

No entanto, devido à atração exercida pela Terra, o projétil vai caindo à medida que se translada, de forma que, decorridos diversos intervalos de tempo, ao invés de se encontrar nas posições A, B, C, D o projétil encontrar-se-á, respectivamente, nas posições A', B', C', D'.

Instante t(s)	Deslocamento Retilíneo	Queda Vertical (ΔS)
0	0	0
1	d	5 m
2	2d	20 m
3	3d	45 m
4	4d	80 m



Analogamente, poderemos calcular os diversos valores de ΔS para os instantes $t = 2$ s, $t = 3$ s, $t = 4$ s, etc., construindo a tabela abaixo.

O movimento resultante é curvilíneo e sua análise é bastante complexa. Para estudar esse movimento é necessário decompô-lo em dois eixos ortogonais.

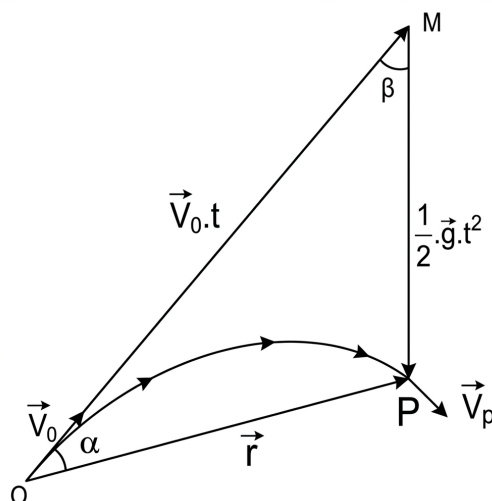
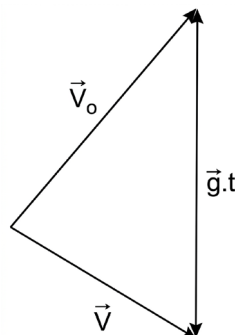
O movimento geral de um projétil, num campo gravitacional uniforme, é regido pelas seguintes equações:

$$\vec{a} = \vec{g} = \text{constante} \quad (\text{eq1})$$

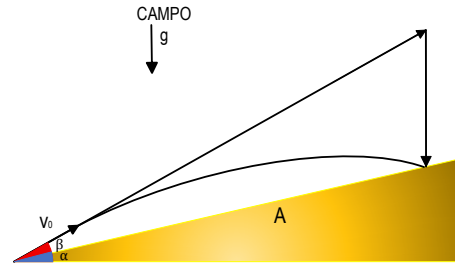
$$\vec{V} = \vec{V}_0 + \vec{g}t \quad (\text{eq2})$$

$$\vec{r} = \vec{V}_0 t + \frac{\vec{g}}{2} t^2 \quad (\text{eq3})$$

Uma interessante interpretação da equação eq3 é mostrada no diagrama de vetores da Figura, na qual o movimento parabólico é interpretado como a composição de dois movimentos independentes: um MRU na direção de $\vec{V}_0$; uma queda livre, a partir do repouso, na direção da gravidade $\vec{g}$. Assim, em cada instante t , a superposição (soma vetorial) desses dois movimentos independentes fornece o vetor posição $\vec{r}$ do móvel.



EXEMPLO 4: Determine o tempo de voo e o alcance horizontal.

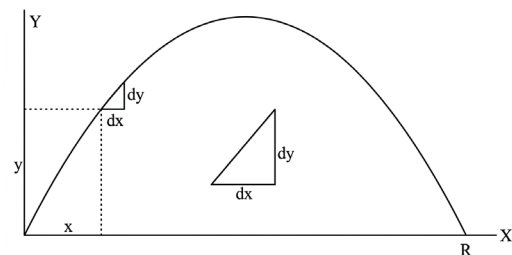


Resolução:

$$\frac{A}{\cos(\alpha + \beta)} = \frac{v_0 \cdot t}{\cos \alpha} = \frac{\frac{g \cdot t^2}{2}}{\sin \beta}$$

APROFUNDAMENTOS

A) Comprimento da trajetória



O comprimento do elemento diferencial da trajetória (em vermelho na figura) é a hipotenusa de um triângulo retângulo cujos catetos têm comprimentos dx e dy , respectivamente.

$$\sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$$

O comprimento total do caminho percorrido pelo projétil é

$$L(\theta) = \int_0^R \sqrt{dx^2 + dy^2} = \int_0^R \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$$

$$L(\theta) = \int_0^R \sqrt{1 + \left(-\frac{g}{v_0^2 \cos^2 \theta} x + \tan \theta\right)^2} dx$$

Essa integral é da forma

$$\int \sqrt{1 + u^2} du = \frac{u}{2} \sqrt{u^2 + 1} + \frac{1}{2} \ln|u + \sqrt{u^2 + 1}|$$



O arco seno hiperbólico se define

$$\operatorname{asinh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

A longitude do caminho é

$$L(\theta) = -\frac{v_0^2 \cos^2 \theta}{g} \int_{u_0}^{u_1} \sqrt{1 + u^2} du$$

$$u = \frac{-g}{v_0^2 \cos^2 \theta} x + \tan \theta$$

Ao mudar a variável de x para u , mudam os limites da integral.

- O limite inferior se obtém para $x = 0$, isto é, para $u_0 = \tan \theta$
- O limite superior se obtém para $x = R$, isto é, para $u_1 = -\tan \theta$

$$L(\theta) = \frac{v_0^2 \cos^2 \theta}{g} \int_{u_0}^{u_1} \sqrt{1 + u^2} du =$$

$$\frac{v_0^2 \cos^2 \theta}{g} \left\{ \left(\frac{-\tan \theta}{2} \sqrt{1 + \tan^2 \theta} + \frac{1}{2} \ln | -\tan \theta + \sqrt{1 + \tan^2 \theta} | \right) - \left(\frac{\tan \theta}{2} \sqrt{1 + \tan^2 \theta} + \frac{1}{2} \ln | \tan \theta + \sqrt{1 + \tan^2 \theta} | \right) \right\}$$

Tendo em conta que $1 + \tan^2 \theta = \sec^2 \theta$

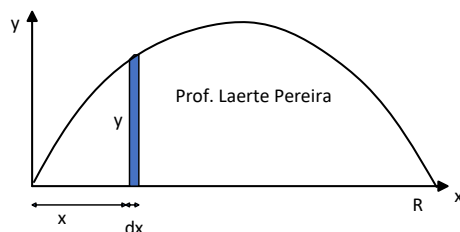
$$L(\theta) = \frac{v_0^2 \cos^2 \theta}{g} \left\{ \frac{\sin \theta}{\cos^2 \theta} + \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 - \sin \theta}{\cos \theta} \right) - \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 + \sin \theta}{\cos \theta} \right) \right\}$$

$$L(\theta) = \frac{v_0^2 \cos^2 \theta}{g} \left\{ \frac{\sin \theta}{\cos^2 \theta} + \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 - \sin \theta}{1 + \sin \theta} \right) \right\}$$

$$L(\theta) = \frac{v_0^2 \cos^2 \theta}{g} \frac{\sin \theta}{\cos^2 \theta} - \frac{v_0^2 \sin \theta}{g} + \frac{1}{2} \frac{v_0^2 \cos^2 \theta}{g} 2 \ln \left(\frac{1 + \sin \theta}{\cos \theta} \right)$$

$$L(\theta) = \frac{v_0^2 \cos^2 \theta}{g} \ln \left(\frac{1 + \sin \theta}{\cos \theta} \right)$$

B) ÁREA ENCERRADA PELA TRAJETÓRIA E O EIXO HORIZONTAL X



Na figura, mostra-se a área diferencial $y \cdot dx$. A área total encerrada entre a trajetória e o eixo X é calculada mediante a integral definida.

$$A(\theta) = \int_0^R y \cdot dx = \int_0^R \left(x \tan \theta - \frac{1}{2} \frac{g}{v_0^2 \cos^2 \theta} x^2 \right) dx$$

$$A(\theta) = \frac{1}{2} x^2 \tan \theta - \frac{1}{2} \frac{g}{v_0^2 \cos^2 \theta} \frac{x^3}{3} \Big|_0^R$$

$$A(\theta) = \frac{1}{2} R^2 \tan \theta - \frac{1}{2} \frac{g}{v_0^2 \cos^2 \theta} \frac{R^3}{3}$$

$$A(\theta) = \frac{2}{3} \frac{v_0^4}{g^2} \sin^3 \theta \cos \theta$$

C) A ELIPSE QUE UNE AS POSIÇÕES DE ALTURA MÁXIMA

A altura máxima é alcançada quando $v_y = 0$, no instante $t = v_0 \sin \theta / g$. A posição (x_m, y_m) do projétil nesse instante é

$$x_m = \frac{v_0^2}{2g} \sin(2\theta) \quad y_m = \frac{v_0^2}{2g} \sin^2 \theta$$

Tendo em conta a relação trigonométrica

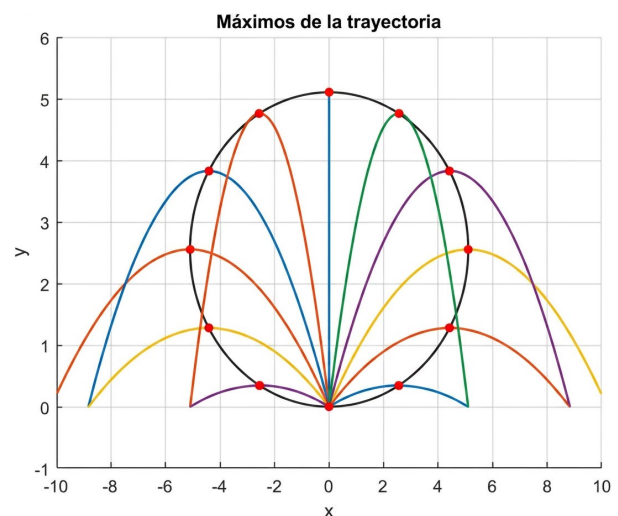
$$1 - \cos(2\theta) = 2 \sin^2 \theta,$$

$$x_m = \frac{v_0^2}{2g} \sin(2\theta) \quad y_m = \frac{v_0^2}{4g} (1 - \cos(2\theta))$$

Isolando $\sin(2\theta)$ na primeira equação, $\cos(2\theta)$ na segunda, elevando ao quadrado e somando, eliminamos o ângulo 2θ .

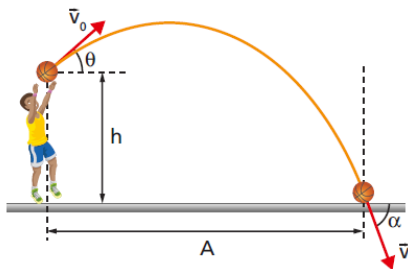
$$\frac{x_m^2}{4b^2} + \frac{(y_m - b)^2}{b^2} = 1 \quad b = \frac{v_0^2}{4g}$$

Esta equação representa uma elipse centrada no ponto $(0, b)$ cujos semieixos são $2b$ e b .





D) Alcance máximo em geral



Para uma situação como a da figura iremos demonstrar adiante que o alcance máximo é dado por:

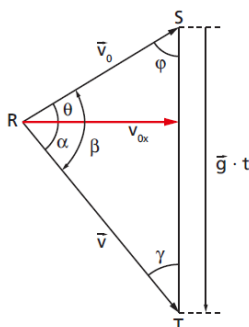
$$A_m = \frac{v_0 \cdot v}{g}$$

e ocorre quando θ for tal que:

$$\tan \theta = \frac{v_0}{v}$$

Como $v_0 < v$, temos $\frac{v_0}{v} < 1$ e da equação (2) tiramos $\tan \theta < 1$, o que acarreta $\theta < 45^\circ$.

Demonstração:



Na figura representamos os vetores $\vec{v}_0$ e $\vec{v}$ a partir da mesma origem R. Como

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{g} \cdot t$$

o segmento $\overline{ST}$ tem módulo igual a $g \cdot t$, em que t é o tempo gasto entre a posição inicial e a posição final. Apliquemos a Lei dos Senos ao triângulo RST:

$$\frac{gt}{\sin \beta} = \frac{v}{\sin \varphi}$$

Mas os ângulos φ e θ são complementares e, portanto, $\sin \varphi = \cos \theta$.

Substituindo na equação (3):

$$\frac{gt}{\sin \beta} = \frac{v}{\cos \theta}$$

donde:

$$(\cos \theta)t = \frac{v \sin \beta}{g}$$

Multiplicando os dois membros dessa equação por v_0 , obtemos:

$$\underbrace{(v_0 \cos \theta)t}_{v_{0x}} = \frac{v_0 v \sin \beta}{g}$$

$$v_{0x} = v_0 \cos \theta$$

logo:

$$v_{0x} \cdot t = \frac{v_0 \cdot v \cdot \sin \beta}{g}$$

Mas $v_{0x} \cdot t$ é o alcance A; portanto:

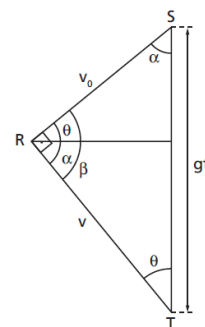
$$A = \frac{v_0 \cdot v \cdot \sin \beta}{g}$$

Para um dado h o valor de v está determinado. Assim, como v_0 , v e g são fixos, o alcance será máximo quando $\sin \beta$ for máximo, isto é:

$$\sin \beta = 1 \text{ e } \beta = 90^\circ$$

Portanto, o alcance máximo é dado por:

$$A = \frac{v_0 v}{g}$$



Mas, se $\beta = 90^\circ$, $\theta + \alpha = 90^\circ$, donde concluímos que $\varphi = \alpha$ e $\gamma = \theta$. Assim, do triângulo retângulo RST tiramos:

$$\tan \theta = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}} = \frac{v_0}{v}$$

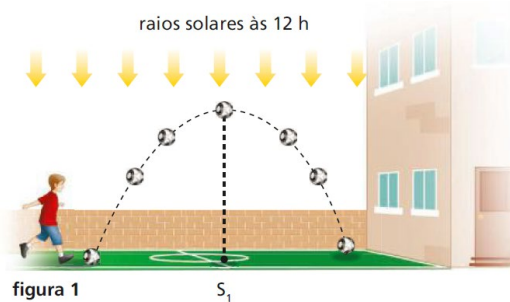
Para o caso de alcance máximo, o tempo de voo pode ser obtido aplicando-se o Teorema de Pitágoras ao triângulo retângulo RST da figura:

$$(gt)^2 = v_0^2 + v^2$$

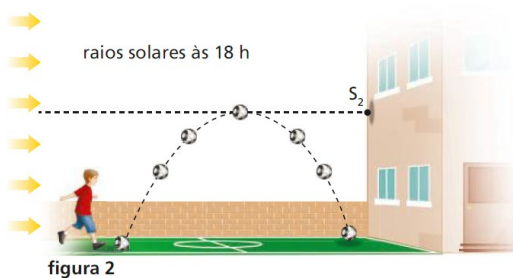


EXERCÍCIOS

1. Gael é um jovem que domina bem os fundamentos do futebol. Chutando sua bola às 12 h, como representa a figura 1, ele observa a sombra da “pelota” projetada pelos raios do sol a pino, S_1 , percorrer em linha reta o solo plano e horizontal.



Chutando a bola às 18 h, como representa a figura 2, ele observa a sombra da “pelota” projetada pelos raios do sol poente, S_2 , percorrer em linha reta a parede lateral de um prédio vertical.

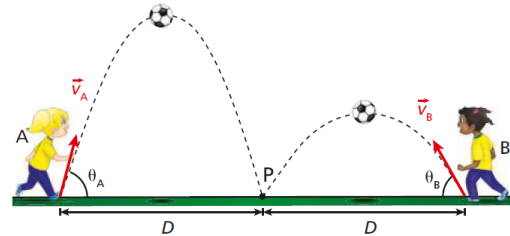


Desprezando-se a resistência do ar no movimento da bola, é correto afirmar que Gael vê de sua posição:

- S_1 se afastar em movimento uniforme e S_2 subir e descer também em movimento uniforme.
- S_1 se afastar em movimento uniformemente acelerado e S_2 subir em movimento uniforme e descer em movimento uniformemente acelerado.
- S_1 se afastar em movimento uniforme e S_2 subir em movimento uniformemente retardado e descer em movimento uniformemente acelerado.
- S_1 se afastar em movimento uniformemente acelerado e S_2 subir em movimento uniformemente retardado e descer em movimento uniformemente acelerado.
- S_1 se afastar em movimento uniforme e S_2 subir em movimento uniformemente acelerado e descer em movimento uniformemente retardado.

2. No esquema abaixo, duas garotas **A** e **B** posicionadas nos locais indicados conseguem atingir, chutando duas bolas, uma pequena lata posicionada em um ponto **P**, equidistante das duas jovens.

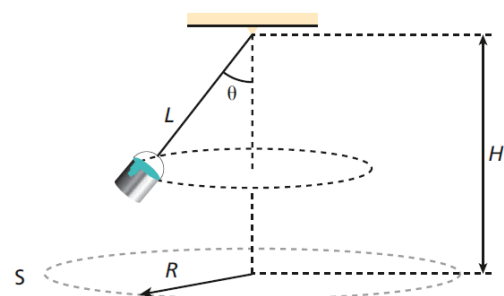
As velocidades com que as bolas são disparadas, $\vec{v}_A$ e $\vec{v}_B$, têm intensidades iguais, mas são direcionadas segundo ângulos de tiro diferentes, respectivamente θ_A e θ_B , de modo que a bola de **A** vai mais alto que a de **B**.



Nesse contexto, o campo gravitacional é uniforme e a resistência do ar pode ser ignorada. Sendo assim, é necessariamente correto que:

- $\theta_A = \theta_B = 45^\circ$
- $\theta_A = 60^\circ$ e $\theta_B = 30^\circ$
- $\theta_A = 53^\circ$ e $\theta_B = 37^\circ$
- $\theta_A + \theta_B = 60^\circ$
- $\theta_A + \theta_B = 90^\circ$

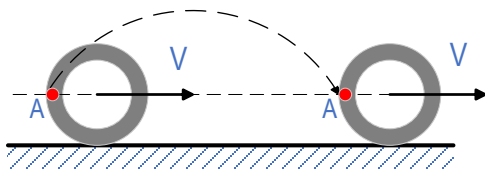
3. (EsPCEx-SP) Um pequeno balde contendo água é preso a um leve e inextensível fio de comprimento L , tal que $L = 0,50$ m, sendo afixado a uma altura (H) de 1,0 m do solo (S), como mostra a figura. À medida que o balde gira numa circunferência horizontal com velocidade constante, gotas de água que dele vazam atingem o solo formando um círculo de raio R . Considerando 10 m/s^2 o módulo da aceleração devida à gravidade e $\theta = 60^\circ$, o valor de R será, em metros:



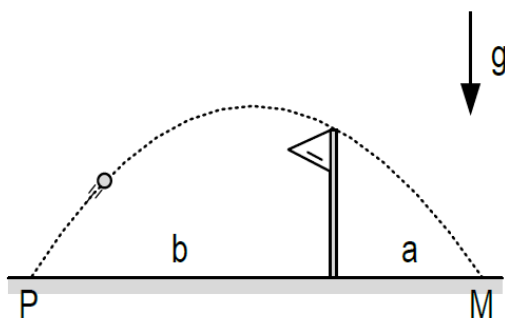
- $\frac{\sqrt{17}}{5}$
- $\frac{\sqrt{11}}{4}$
- $\frac{\sqrt{18}}{4}$
- $\frac{\sqrt{21}}{4}$
- $\frac{4}{5}$



4. Uma roda de raio R gira uniformemente por uma superfície horizontal, sem que haja deslizamento (veja figura). Do ponto A da roda se desprende uma gota de barro. Com que velocidade se move a roda, se a gota, após se deslocar no ar, volta a cair no mesmo ponto A da roda, após esta ter dado n voltas? Despreze a resistência do ar.



5. (PERU) A figura mostra a trajetória descrita por uma bola de golfe que foi lançada obliquamente do ponto P . Sabendo que a bola passa praticamente tocando o topo da bandeira de altura h e, em seguida, acerta o ponto M , qual a máxima altura que a bola alcança durante o movimento?



As distâncias horizontais são: de P até a bandeira, b ; da bandeira até M , a .

Opções:

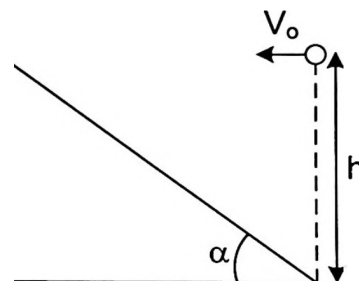
- a) $\frac{(b+2a)^2}{2ab} h$
- b) $\frac{(b+a)^2}{4ab} h$
- c) $\frac{(2b+a)^2}{4ab} h$
- d) $\frac{(b-a)^2}{2ab} h$
- e) $\frac{(2b-a)^2}{2ab} h$

6. Um projétil é disparado obliquamente, formando um ângulo α com a horizontal, passando por uma altura máxima de 20 m e atingindo um alcance A . Duplicando-se o ângulo de disparo, sem mudar a

velocidade inicial de lançamento, o projétil atinge o mesmo alcance A . Determinar a altura máxima atingida pelo projétil, nesse último disparo.

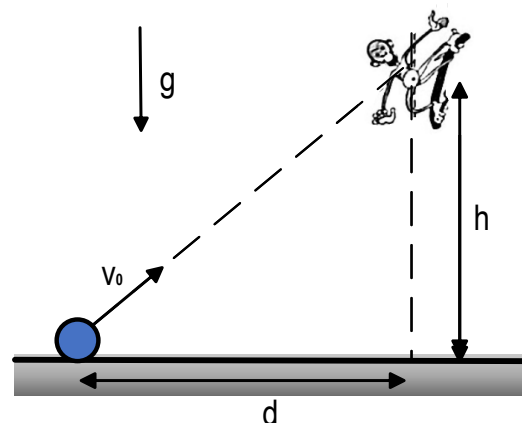
7. Quando lançado em um ângulo α com a horizontal, um projétil cai a uma distância a antes do alvo, enquanto, quando lançado em um ângulo β , ele cai a uma distância b após o alvo. Qual o ângulo θ com o qual ele deve ser lançado para que atinja o alvo?

8. Determine a velocidade horizontal com que deve ser arremessada uma pedra, a partir de uma altura h acima do pé de uma rampa, a fim de que a pedra colida com a rampa perpendicularmente à sua superfície, cuja inclinação em relação à horizontal vale α . A gravidade local vale g .



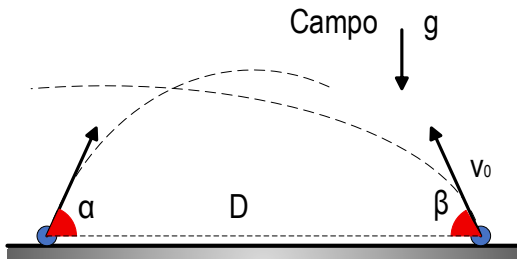
9. Um caçador mira sua arma exatamente na direção em que se encontra um macaco, apoiado num galho de árvore, como mostra a figura, numa região onde a aceleração da gravidade vale $g = 10 \text{ m/s}^2$. No exato momento do disparo, o macaco se solta devido ao susto e passa a cair em queda livre vertical. Sendo $d = 12 \text{ m}$ e $h = 16 \text{ m}$, determine se o projétil atingirá o macaco nos seguintes casos:

- a) o projétil é disparado com uma velocidade $v_0 = 100 \text{ m/s}$;
- b) o projétil é disparado com uma velocidade $v_0 = 10 \text{ m/s}$.





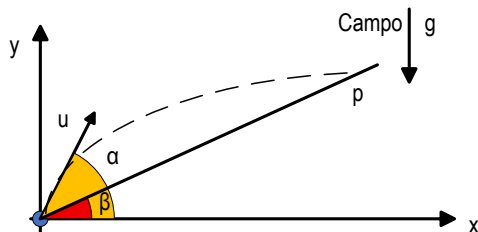
10. Dois lançadores A e B, localizados num solo horizontal a uma distância D entre si, disparam simultaneamente projéteis num mesmo plano vertical com velocidades iguais a V_A e V_B que formam respectivamente inclinações α e β com o solo horizontal. Sabendo que a gravidade local vale g :



a) Determine uma relação entre V_A , V_B , α e β necessária para que os projéteis sempre colidam entre si;

b) A relação determinada no item anterior é necessária, mas não suficiente para que os projéteis sempre colidam. Que condição adicional deve satisfazer a distância D que separa os lançadores a fim de garantir que os projéteis sempre colidirão?

11. Um lançador dispara projéteis a partir da base O de uma rampa inclinada que forma um ângulo β com a horizontal como na figura. Os projéteis são disparados com velocidade u que formam um ângulo α com a horizontal. A gravidade local vale g .



a) Determine o tempo de voo desse projétil;

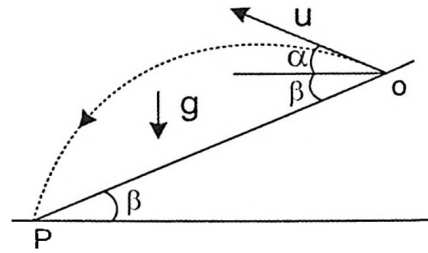
b) Determine o alcance OP do projétil ao longo da rampa;

c) Dado o valor de β , para qual valor de α esse alcance OP será máximo?

d) Determine o alcance máximo atingido ao longo da rampa.

12. Um lançador dispara projéteis do topo O de uma rampa inclinada que forma um ângulo β com a

horizontal como na figura. Os projéteis são disparados com velocidade u que formam um ângulo α com a horizontal. A gravidade local vale g .



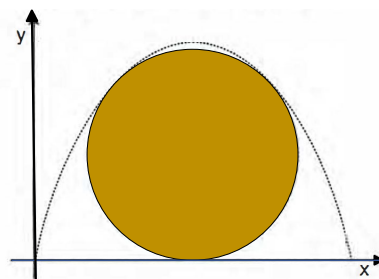
a) Determine o tempo de voo desse projétil;

b) Determine o alcance OP do projétil ao longo da rampa;

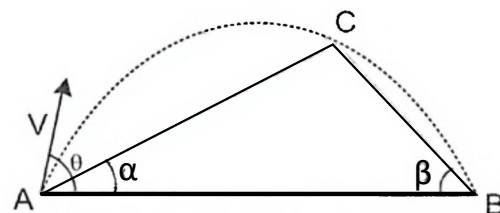
c) Dado o valor de β , para qual valor de α esse alcance OP será máximo?

d) Determine o alcance máximo atingido ao longo da rampa.

13. Um gafanhoto deseja saltar por cima de um tronco de árvore cilíndrico que se encontra apoiado no solo. Se a gravidade local vale g e o raio da secção transversal circular vale R , qual a velocidade mínima para o salto do gafanhoto lhe permitirá galgar o tronco de árvore?

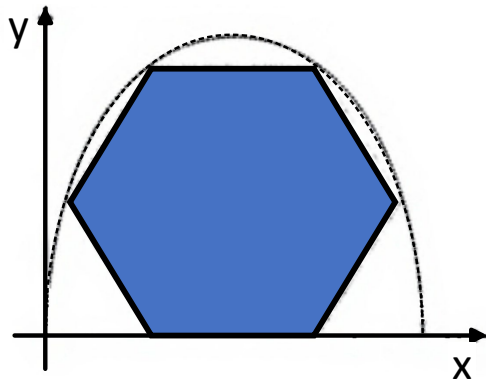


14. O triângulo ABC mostrado na figura, cujos ângulos das bases valem α e β , está localizado num plano vertical. Seja θ o ângulo segundo o qual deve ser lançado um projétil a partir do vértice A a fim de que sua trajetória passe pelo vértice C e atinja o solo no ponto B. Determine $\tan \theta$.





15. A figura mostra a secção transversal de um prisma reto de base hexagonal regular deitado sobre um solo horizontal. Um projétil lançado a partir do solo descreve uma trajetória parabólica que tangencia quatro dos seis vértices da secção transversal hexagonal de lado c . Se a gravidade local vale g , determine:



a) a tangente de α , onde α é o ângulo de disparo do projétil;

b) o alcance horizontal atingido pelo projétil.

16. Duas partículas são lançadas horizontalmente de um penhasco, a uma grande altitude, com velocidades v_1 e v_2 de mesma direção e sentidos opostos. Se a gravidade local vale g , determine a distância entre as partículas no instante em que suas velocidades forem perpendiculares entre si.

17. (INDIA) Se, em algum ponto da trajetória parabólica de um projétil, a velocidade é u e a direção do movimento faz um ângulo θ com a horizontal, prove que a partícula estará se movendo em ângulo reto em relação à sua direção anterior após um intervalo de tempo

$$t = \frac{u}{g \sin \theta}.$$

18. (INDIA) Duas partículas movem-se em um campo gravitacional uniforme com aceleração g . No instante inicial, as partículas estavam localizadas em um mesmo ponto e moviam-se com velocidades $v_1 = 3,0 \text{ m s}^{-1}$ e $v_2 = 4,0 \text{ m s}^{-1}$ horizontalmente em direções opostas. Determine a distância entre as partículas no instante em que seus vetores velocidade se tornam mutuamente perpendiculares.

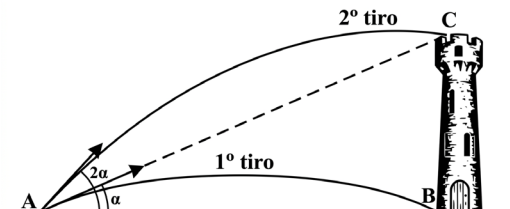
19. Duas partículas são lançadas horizontalmente de um penhasco, a uma grande altitude, com velocidades v_1 e v_2 de mesma direção e sentidos opostos. Se a gravidade local vale g , determine a distância entre as partículas no instante em que suas velocidades forem perpendiculares entre si.

20. (INDIA) Três partículas são lançadas obliquamente a partir de um mesmo ponto, num mesmo plano vertical, com velocidades de disparo iguais a u , v e w e inclinações com a horizontal respectivamente iguais a α , β e γ . Mostre que a condição para que as três partículas se movam alinhadas em qualquer instante é que:

$$\frac{\sin(\gamma - \beta)}{u} + \frac{\sin(\alpha - \gamma)}{v} + \frac{\sin(\beta - \alpha)}{w} = 0$$

21. Um canhão situado ao nível do mar dispara projéteis com velocidade u numa direção que forma um ângulo α com a horizontal contra navios piratas que se aproximam da costa, atingindo um alcance horizontal A num local onde a gravidade vale g . Se o canhão for montado sobre uma plataforma de altura h , nas mesmas condições de disparo iniciais, qual acréscimo ΔA será obtido no alcance dos projéteis disparados?

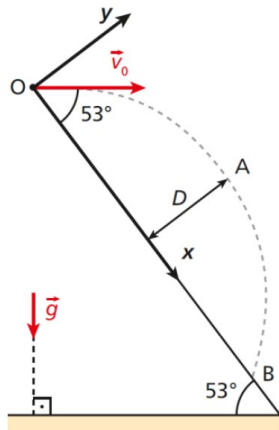
22. De um ponto A, dão-se dois tiros de canhão, com velocidades diferentes. No primeiro tiro, aponta-se o canhão para o ponto C no alto da torre e atinge-se a sua base B após o tempo t_1 . No segundo tiro, dobra-se o ângulo de disparo e atinge-se o ponto C no topo da torre após o tempo t_2 . Se a gravidade local vale g , determine a distância AB do canhão até a base da torre.



23. Uma partícula foi disparada horizontalmente com velocidade de intensidade $v_0 = 30 \text{ m/s}$ a partir do ponto O de um plano inclinado de 53° em relação à horizontal, conforme ilustra a figura. No local, efeito do ar é desprezível e adota-se $g = 10 \text{ m/s}^2$. O referencial



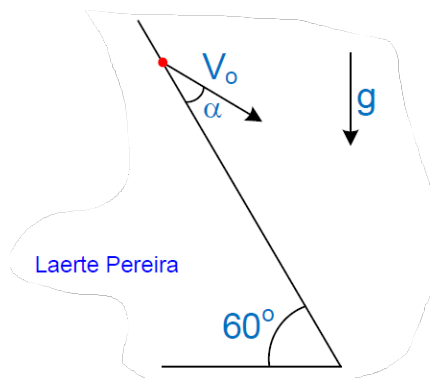
Oxy indicado, com origem no ponto O, foi utilizado na observação do voo balístico da partícula.



Adotando-se $\sin 53^\circ = \cos 37^\circ = 0,8$ e $\cos 53^\circ = \sin 37^\circ = 0,6$, pede-se determinar:

- o valor da altura máxima D da partícula em relação à superfície do plano inclinado;
- o alcance OB atingido pela partícula.

24. Um projétil é lançado do topo de uma grande rampa de inclinação 60° com a horizontal. Se a velocidade inicial de lançamento vale $V_0 = 20 \text{ m/s}$ e forma um ângulo $\alpha = 30^\circ$ com a rampa, o prof. Laerte Pereira pede que você determine, respectivamente, o tempo que o projétil leva até se chocar com a rampa, bem como a que distância do ponto de lançamento ocorreu o impacto. Use $g = 10 \text{ m/s}^2$.

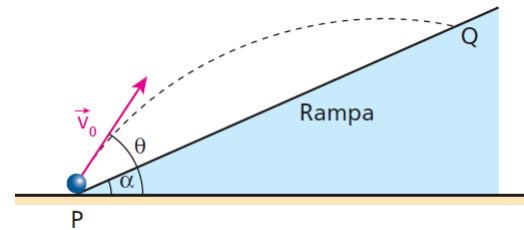


25. Uma bolinha de aço é lançada de um ponto P de uma rampa inclinada de α em relação à horizontal, com velocidade inicial v_0 , que forma um ângulo θ com a horizontal. Calcule a distância do ponto P ao ponto Q, onde a bolinha colide com a rampa. Despreze influências do ar e considere

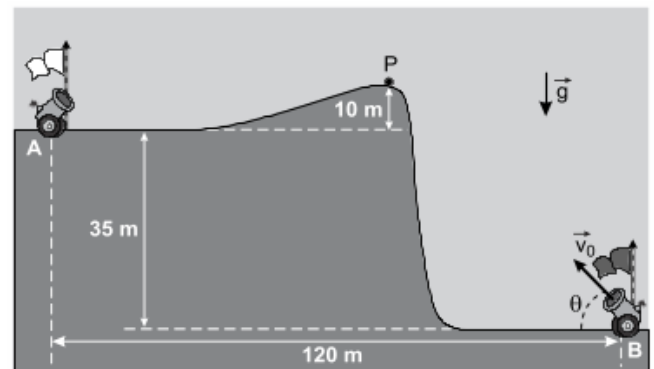
$g = 10 \text{ m/s}^2$,

$v_0 = 12 \text{ m/s}$,

$\alpha = 30^\circ$ e $\theta = 60^\circ$.



26. (Enem) A figura foi extraída de um antigo jogo para computadores, chamado *Bang! Bang!*



No jogo, dois competidores controlam os canhões A e B, disparando balas alternadamente com o objetivo de atingir o canhão do adversário; para isso, atribuem valores estimados para o módulo da velocidade inicial de disparo ($|v_0|$) e para o ângulo de disparo (θ)

Em determinado momento de uma partida, o competidor B deve disparar; ele sabe que a bala disparada anteriormente, $\theta = 53^\circ$, passou tangenciando o ponto P. No jogo, $|g|$ é igual a 10 m/s^2 . Considere $\sin 53^\circ = 0,8$, $\cos 53^\circ = 0,6$ e desprezível a ação de forças dissipativas.

Disponível em: <http://mebdownloads.butzke.net.br>. Acesso em: 18 abr. 2015 (adaptado).

Com base nas distâncias dadas e mantendo o último ângulo de disparo, qual deveria ser, aproximadamente, o menor valor de $|v_0|$ que permitiria ao disparo efetuado pelo canhão B atingir o canhão A?

- 30 m/s.
- 35 m/s.
- 40 m/s.

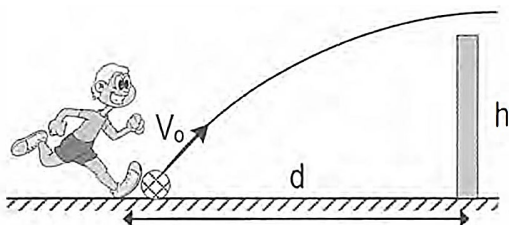


- d) 45 m/s.
e) 50 m/s.

27. Um prédio de 25 andares está em chamas e, dadas as grandes proporções do incêndio, o caminhão do corpo de bombeiros só consegue chegar a uma proximidade $d = 20$ m da base do prédio. Se a água desse esguicho é lançada com uma velocidade inicial $v_0 = 20$ m/s, o prof. Laerte pede que você determine a altura h da janela mais alta, que poderá ser atingida pelo jato d'água. Despreze a altura inicial do jato d'água, admitindo que ele parte do solo e use $g = 10$ m.s⁻².



28. Pedrinho quer chutar uma bola de futebol por cima de um muro de altura $h = 5$ m, distante $d = 20$ m do local onde se encontra a bola. Sendo $g = 10$ m/s², o prof. Laerte pede que você determine a menor velocidade V_0 com que deve chutar a bola para atingir o seu objetivo.

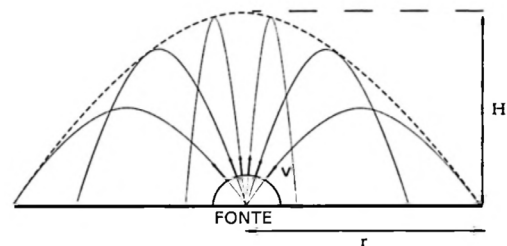


29. Deseja-se arremessar uma pedra do topo de uma colina mostrada a figura com velocidade inicial $V_0 = 6\sqrt{5}$ m/s a fim de que ela caia o mais longe possível do ponto de lançamento. Se a gravidade local vale $g = 10$ m/s², determine:

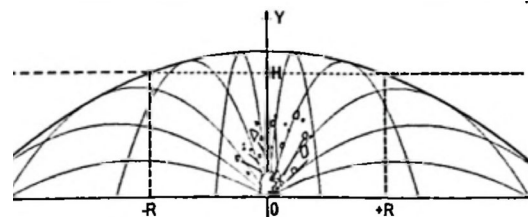
- a) o ângulo de inclinação α com que a pedra deve ser arremessada.
b) a distância entre o lançador e o ponto da colina mais distante que pode ser atingido.

30. Em uma praça existe uma fonte muito interessante. Ela tem o formato de um hemisfério de raio bem pequeno, preenchida de vários furos, de tal forma que possa lançar água para todos os lados de maneira aproximadamente uniforme. A fonte é alimentada por uma bomba e a água que sai da fonte, por todos os seus furos, tem velocidade v . A aceleração local da gravidade é dada por g .

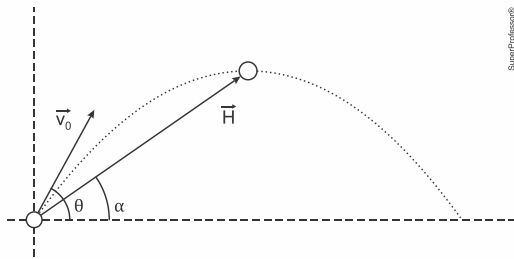
- (a) Qual a altura máxima H atingida por um jato de água?
(b) Qual o raio r que deve ser isolado da fonte para que pedestres não se molhem?
(c) Qual é o formato geométrico definido pelo conjunto de todos os jatos de água lançados pela fonte? Esses pontos estão delimitados pela linha tracejada da figura.



31. As provas do detonador de uma granada efetuam-se no centro do fundo de um poço cilíndrico de profundidade H . Os estilhaços da granada, produzidos pela explosão e cujas velocidades não ultrapassam v_0 , não devem cair na superfície da Terra. Qual deverá ser o diâmetro mínimo D do poço?



32. Uma partícula é lançada obliquamente e descreve um movimento parabólico, sem resistência do ar. No momento do lançamento dessa partícula, o vetor velocidade ($\vec{V}_0$) faz o ângulo θ com a horizontal e, ao atingir a altura máxima de sua trajetória, o vetor posição ($\vec{H}$) da partícula faz um ângulo α com essa mesma horizontal, conforme ilustra figura a seguir:



Nessas condições, a razão entre as tangentes de θ e α , $\frac{\tan \theta}{\tan \alpha}$, vale

- a) 1,5
- b) 2,0
- c) 2,5
- d) 3,0

33. (H. Moysés) Uma mangueira, com o bico a 1,5 m acima do solo, é apontada para cima, segundo um ângulo de 30° com o chão. O jato de água atinge um canteiro a 15 m de distância.

- a) Com que velocidade o jato sai da mangueira?
- b) Que altura ele atinge?

34. (H. Moysés) Num jogo de vôlei, desde uma distância de 14,5 m da rede, é dado um saque do tipo "jornada nas estrelas". A bola sobe a 20 m acima da altura de lançamento, e desce até a altura do lançamento num ponto do campo adversário situado a 1 m da rede e 8 m à esquerda do lançamento.

- a) Em que ângulo a bola foi lançada?
- b) Com que velocidade (em km/h) volta a atingir a altura do lançamento?
- c) Quanto tempo decorre neste percurso?

35. (H. Moysés) Demonstre o resultado de Galileu enunciado na Sec. 3.6, mostrando que, para uma dada velocidade inicial v_0 , um projétil pode atingir o mesmo alcance A para dois ângulos de elevação diferentes, $\theta = 45^\circ + \delta$ e $\theta = 45^\circ - \delta$, contanto que A não ultrapasse o alcance máximo $A_m = v_0^2/g$. Calcule δ em função de v_0 e A .

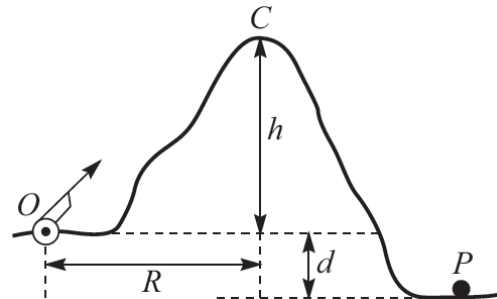
36. (H. Moysés) Generalize o resultado do problema anterior, mostrando que um projétil lançado do chão com velocidade inicial v_0 pode atingir um ponto situado à distância x e à altura y para dois ângulos de

elevação diferentes, contanto que o ponto (x, y) esteja abaixo da "parábola de segurança"

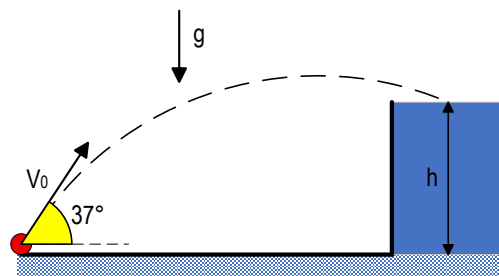
$$y = \frac{1}{2} \left(A_m - \frac{x^2}{A_m} \right)$$

onde A_m é o alcance máximo.

37. (H. Moysés) Um canhão lança um projétil por cima de uma montanha de altura h , de forma a passar quase tangenciando o cume C no ponto mais alto de sua trajetória. A distância horizontal entre o canhão e o cume é R . Após da montanha há uma depressão de profundidade d . Determine a distância horizontal entre o ponto de lançamento O e o ponto P onde o projétil atinge o solo, em função de R , d e h .

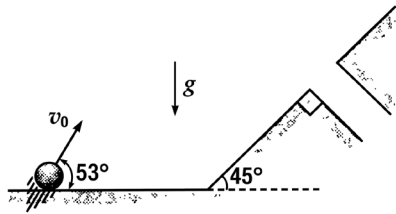


38. (PERU) Na posição A, a esfera é lançada com uma rapidez $v_0 = 20$ m/s observa-se que ela colide com o muro com uma rapidez de $8\sqrt{5}$ m/s. Determine h . ($g = 10$ m/s²)

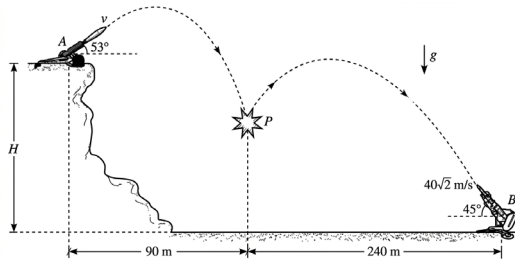


39. (PERU) Um objeto é lançado obliquamente com uma rapidez de **100 m/s**; determine o tempo que decorre desde o instante em que é lançado até o instante em que adquire uma velocidade de módulo $20\sqrt{2}$ m/s, a qual forma um ângulo de **98°** com a velocidade de lançamento. ($g = 10$ m/s²)

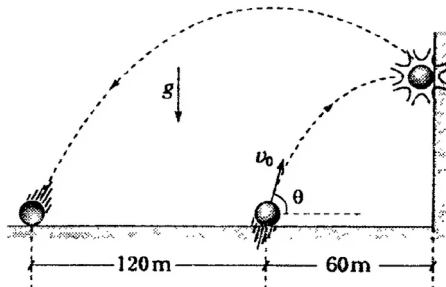
40. (PERU) Na figura, mostra-se uma pequena esfera que é lançada com certa velocidade v_0 e, depois de **7 s**, entra limpamente no buraco. Determine v_0 . ($g = 10$ m/s²)



41.(PERU) Dois projéteis são lançados simultaneamente de A e B. São mostradas suas trajetórias e o local onde colidem. Determine H. ($g = 10 \text{ m/s}^2$)



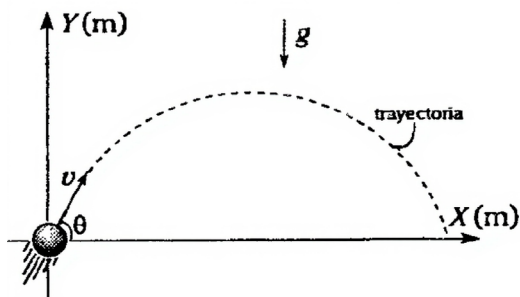
42.(PERU) Uma bolinha é lançada com $v_0 = 50 \text{ m/s}$ colide elasticamente com a parede, realizando o movimento parabólico antes e depois da colisão. Calcule o ângulo de lançamento θ . (Despreze a duração da colisão).



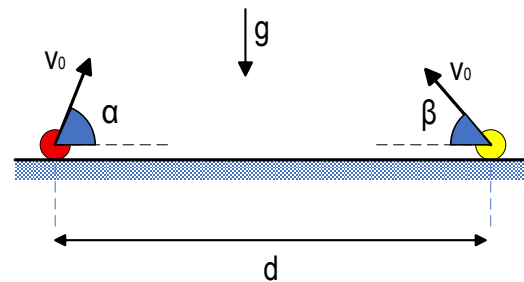
43. (PERU) Na figura, mostra-se o lançamento de uma partícula e, ao desprezar a resistência do ar, a equação da trajetória que ela descreve é dada por

$$y = x - \frac{x^2}{10}$$

Determine a menor rapidez que a partícula adquire. ($g = 10 \text{ m/s}^2$)



44.(PERU) Dois projéteis são lançados simultaneamente e com a mesma rapidez, conforme mostrado. Determine a menor separação entre eles.



45. Um projétil move-se sob a ação da força da gravidade e da resistência do ar, que é proporcional à sua velocidade. Para pequenas distâncias e considerando pequena a resistência do ar, determinar:

A) Um termo a mais no desenvolvimento

$$z = \frac{v_{z0}}{v_{x0}} x - \frac{1}{2} \frac{g}{v_{x0}^2} x^2 - \frac{1}{3} \frac{bg}{mv_{x0}^3} x^3 - \dots$$

que nos dá a posição na direção do eixo Z.

B) Um termo a mais no desenvolvimento

$$x_{max} = \frac{2v_{x0}v_{z0}}{g} - \frac{8bv_0^2v_{x0}}{3mg^2} + \dots$$

que nos dá o alcance máximo do projétil na horizontal.

46. Um projétil é lançado obliquamente de um terreno plano e horizontal, com velocidade inicial de módulo igual a 30 m/s , atingindo uma altura máxima de 25 m . Despreze as influências do ar e considere:

$$g = 10 \text{ m/s}^2$$

a) Calcule o módulo da mínima velocidade atingida pelo projétil durante seu movimento livre.

b) Uma circunferência tem o mesmo raio de curvatura em qualquer um de seus pontos. Uma parábola, entretanto, tem raio de curvatura variável. Calcule o raio de curvatura da trajetória do projétil, no ponto de altura máxima.

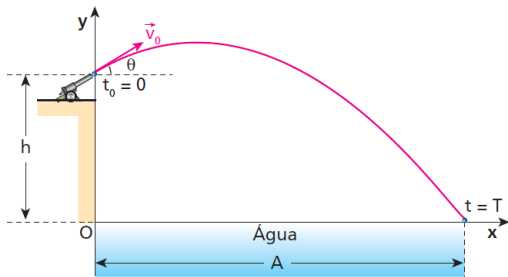
47. Um corpo de massa m é lançado obliquamente de uma superfície plana e horizontal, com velocidade



inicial $\vec{v}_0$, inclinada de θ em relação à horizontal. Suponha que, além do peso, atue no corpo uma (única) outra força $\vec{F}$, horizontal e constante, no sentido da componente horizontal de $\vec{v}_0$. Sendo $\vec{g}$ o campo gravitacional, mostre que o alcance horizontal (A) desse corpo é dado por:

$$A = \frac{v_0^2}{g} \cdot \sin 2\theta \left(1 + \frac{F \cdot \tan \theta}{m \cdot g} \right)$$

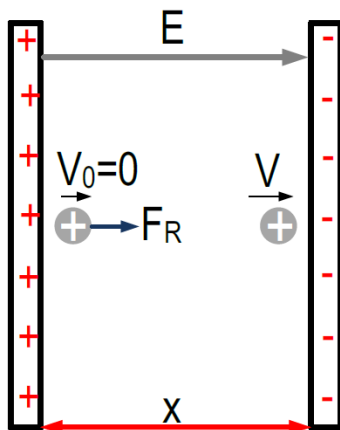
48. Do alto de um forte, um canhão lança uma bala com velocidade inicial $\vec{v}_0$, inclinada de θ em relação à horizontal. Desprezando influências do ar e sendo g a intensidade do campo gravitacional:



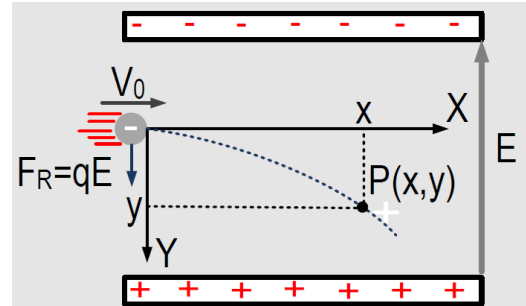
a) determine, em função de v_0 , g e h , o ângulo θ_M para que o alcance horizontal A seja máximo;

b) calcule o ângulo θ_M considerando $v_0 = 100 \text{ m/s}$, $g = 10 \text{ m/s}^2$ e $h = 200 \text{ m}$.

49. Uma partícula com carga positiva q e massa m é liberada do repouso em um campo elétrico uniforme E orientado ao longo do eixo x , conforme a figura abaixo. Descreva o movimento da partícula desprezando a ação do campo gravitacional que atua sobre a partícula.



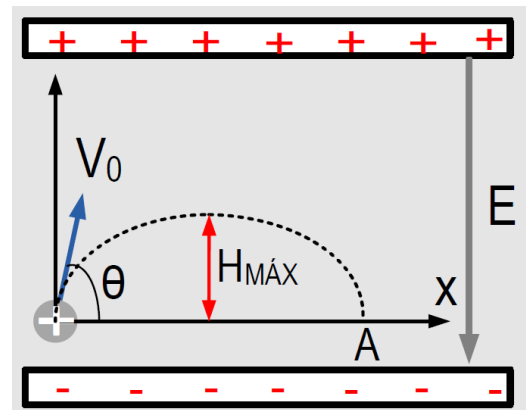
50. O campo elétrico entre duas placas de um capacitor plano carregados com cargas opostas é aproximadamente uniforme de módulo igual a E . Considere que um elétron de carga $-e$ e massa m é lançado horizontalmente neste campo com uma velocidade inicial v_0 . Despreze a ação do campo gravitacional que atua sobre a partícula. O professor Laerte pede que você descreva o movimento subsequente da partícula.



51. Uma partícula é lançada obliquamente com um ângulo θ em relação a horizontal em ponto cujas coordenadas iguais ($x = 0$ e $y = 0$) no interior de um campo elétrico uniforme vertical de módulo igual a $|E|$ com uma velocidade inicial igual a v_0 . Sabendo que a partícula está carregada com uma carga elétrica $+q$ e massa m , desprezando a ação do campo gravitacional que atua sobre a partícula, o professor Laerte pede que você determine:

a) o alcance da partícula no interior das placas ao retornar para a posição $y = 0$;

b) a altura máxima atingida pela partícula no interior das placas;



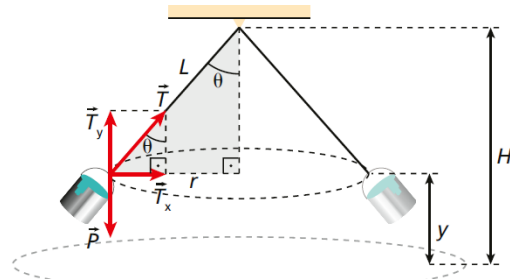


GABARITO

1. Resposta: c

2. Resposta: e

3.

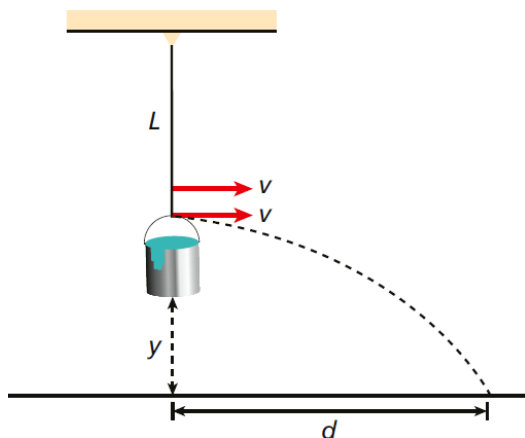


$$\sin \theta = \frac{r}{L} \Rightarrow \sin 60^\circ = \frac{r}{0,50} \therefore r = \frac{\sqrt{3}}{4} \text{ m}$$

$$\tan \theta = \frac{T_x}{T_y} \Rightarrow \tan \theta = \frac{F_{cp}}{P} \Rightarrow \tan \theta = \frac{mv^2/r}{mg}$$

$$\tan 60^\circ = \frac{v^2}{\frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 10} \Rightarrow v^2 = \sqrt{3} \cdot \frac{10\sqrt{3}}{4}$$

$$v = \sqrt{\frac{30}{4}} \text{ m/s}$$



$$\cos \theta = \frac{H - y}{L}$$

$$\cos 60^\circ = \frac{1,0 - y}{0,50}$$

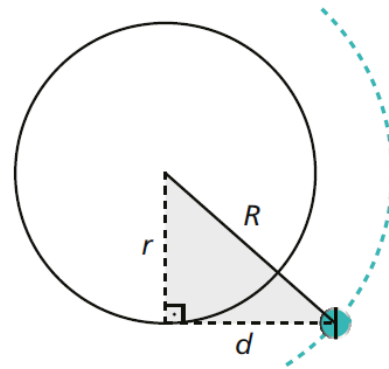
$$0,25 = 1,0 - y$$

$$y = 0,75 \text{ m}$$

Voo balístico:

$$d = v \sqrt{\frac{2y}{g}}$$

$$d = \sqrt{\frac{30}{4}} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot 0,75}{10}} \therefore d = \frac{\sqrt{18}}{4} \text{ m}$$



Vendo a situação proposta do ponto de fixação do pêndulo cônico ao lado: Teorema de Pitágoras:

$$R^2 = r^2 + d^2$$

$$R^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{18}}{4}\right)^2$$

Da qual:

$$R = \frac{\sqrt{21}}{4} \text{ m}$$

Resposta: d

4. Seja A o ponto extremo esquerdo da roda, de onde se soltará a gota de barro, e C o centro dela. Conforme mostrado na Figura, ao se soltar, a gota de barro terá velocidades $V \uparrow$ e $V \rightarrow$, onde $V \rightarrow$ é a velocidade de translação do centro C da roda. Assim, a gota de barro permanecerá na mesma vertical do ponto A durante todo o movimento parabólico, visto que ambos compartilham da mesma velocidade horizontal $V \rightarrow$ em relação à Terra.

A condição para que a gota de barro caia exatamente sobre o ponto A, após a roda ter dado n voltas, é que o tempo gasto pela gota em seu movimento vertical ida e volta seja o mesmo tempo que a roda leva para percorrer a distância horizontal $D = n \cdot 2 \cdot \pi \cdot R$. O tempo gasto na vertical vale:

$$T_{\text{vert}} = V/g \text{ (subida)} + V/g \text{ (descida)} = 2V/g$$

O tempo gasto para percorrer a distância horizontal D vale



$T_{\text{hor}} = D/v = n \cdot 2 \cdot \pi \cdot R/V$. Igualando esses tempos, temos:

$$T_{\text{vert}} = T_{\text{hor}} \Rightarrow \frac{2V}{g} = \frac{n \cdot 2 \cdot \pi \cdot R}{V} \Rightarrow$$

$$v = \sqrt{n \cdot \pi \cdot R \cdot g}$$

5. Tomemos o solo como eixo x , com origem em P . A trajetória é parabólica e podemos escrevê-la como

$$y(x) = Ax^2 + Bx$$

pois em P temos $x = 0, y = 0$ (logo não há termo constante).

Os dados geométricos do enunciado:

- A bola passa pelo topo da bandeira: ponto (b, h) ;
- A bola cai em M : ponto $(b + a, 0)$.

Logo:

1) Passar por (b, h) :

$$h = Ab^2 + Bb$$

2) Passar por $(b + a, 0)$:

$$0 = A(b + a)^2 + B(b + a)$$

Determinar A e B em função de a, b, h

Da equação (2):

$$A(b + a)^2 + B(b + a) = 0$$

Se $b + a \neq 0$,

$$A(b + a) + B = 0 \Rightarrow B = -A(b + a)$$

Substitua (3) em (1):

$$h = Ab^2 + bB = Ab^2 + b[-A(b + a)]$$

$$h = Ab^2 - Ab(b + a) = A[b^2 - b(b + a)] \\ = A[b^2 - b^2 - ab]$$

$$h = A(-ab) \Rightarrow$$

$$A = -\frac{h}{ab}$$

Então, de (3):

$$B = -A(b + a) = \frac{h}{ab}(b + a)$$

Altura máxima da trajetória

A parábola $y(x) = Ax^2 + Bx$ tem vértice em

$$x_v = -\frac{B}{2A}$$

Substituindo A e B :

$$x_v = -\frac{\frac{h}{ab}(b + a)}{2\left(-\frac{h}{ab}\right)} = \frac{\frac{h}{ab}(b + a)}{2\frac{h}{ab}} = \frac{b + a}{2}$$

Ou seja, o vértice está no ponto médio entre P e M , como esperado.

A altura máxima é

$$y_{\text{max}} = y(x_v) = Ax_v^2 + Bx_v$$

$$y_{\text{max}} = A\left(\frac{b + a}{2}\right)^2 + B\left(\frac{b + a}{2}\right)$$

Repare que $\left(\frac{b+a}{2}\right)^2 = \frac{(b+a)^2}{4}$, então:

$$y_{\text{max}} = A\frac{(b + a)^2}{4} + B\frac{b + a}{2}$$

Fatorando $\frac{b+a}{2}$:

$$y_{\text{max}} = \frac{b + a}{2} \left[A\frac{b + a}{2} + B \right]$$

Mas

$$A\frac{b+a}{2} + B = \frac{1}{2}A(b + a) + B.$$

Usando $B = -A(b + a)$:

$$\frac{1}{2}A(b + a) + B = \frac{1}{2}A(b + a) - A(b + a) \\ = -\frac{1}{2}A(b + a)$$

Logo,

$$y_{\text{max}} = \frac{b + a}{2} \left[-\frac{1}{2}A(b + a) \right] = -\frac{A(b + a)^2}{4}$$

Substituindo $A = -\frac{h}{ab}$:

$$y_{\text{max}} = -\frac{(ab)(b + a)^2}{4} = \frac{(b + a)^2}{4ab}h$$

Comparando com as alternativas

$$y_{\text{max}} = \frac{(b + a)^2}{4ab}h$$



Portanto, a alternativa correta é a letra **b**).

6. Alcance de um lançamento oblíquo em terreno horizontal:

$$A_{\alpha} = \frac{(V_0)^2}{g} \cdot \sin(2\alpha)$$

Se dois projéteis são lançados da mesma posição, com a mesma velocidade inicial V_0 , formando ângulos α e β (com $\alpha > \beta$), os alcances são:

$$A_{\alpha} = \frac{(V_0)^2}{g} \cdot \sin(2\alpha), A_{\beta} = \frac{(V_0)^2}{g} \cdot \sin(2\beta)$$

Condição para alcances iguais:

$$A_{\alpha} = A_{\beta} \Rightarrow \frac{(V_0)^2}{g} \cdot \sin(2\alpha) = \frac{(V_0)^2}{g} \cdot \sin(2\beta) \\ \Rightarrow \sin(2\alpha) = \sin(2\beta)$$

Da igualdade de senos:

- Solução 1: $2\alpha = 2\beta \Rightarrow \alpha = \beta$ (não serve aqui);
- Solução 2: $2\alpha + 2\beta = 180^\circ \Rightarrow \alpha + \beta = 90^\circ$.

Logo, para alcances iguais, os ângulos devem ser complementares:

$$\alpha + \beta = 90^\circ$$

No problema, os ângulos são α e 2α ; portanto:

$$\alpha + 2\alpha = 90^\circ \Rightarrow$$

$$3\alpha = 90^\circ \Rightarrow$$

$$\alpha = 30^\circ, 2\alpha = 60^\circ$$

Altura máxima de um lançamento oblíquo:

$$H_{max} = \frac{(V_0)^2}{2g} (\sin\theta)^2$$

Para o primeiro disparo ($\theta = \alpha = 30^\circ$):

$$20 = \frac{(V_0)^2}{2g} (\sin 30^\circ)^2$$

$$20 = \frac{(V_0)^2}{2g} \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{(V_0)^2}{2g} \cdot \frac{1}{4} = \frac{(V_0)^2}{8g}$$

$$(V_0)^2 = 20 \cdot 8g = 160g$$

Para o segundo disparo ($\theta = 2\alpha = 60^\circ$):

$$H'_{max} = \frac{(V_0)^2}{2g} (\sin 60^\circ)^2 = \frac{160g}{2g} \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \\ = 80 \cdot \frac{3}{4} = 60 \text{ m}$$

Resposta:

$$\boxed{H'_{max} = 60 \text{ m}}$$

7. Seja d a distância do lançador ao alvo visado. Quando lançado em um ângulo α com a horizontal, um projétil cai a uma distância a antes do alvo:

$$\frac{(V_0)^2}{g} \sin(2\alpha) = d - a \quad (\text{eq1})$$

Quando lançado em um ângulo β , ele cai a uma distância b após o alvo:

$$\frac{(V_0)^2}{g} \sin(2\beta) = d + b \quad (\text{eq2})$$

Qual o ângulo θ com o qual ele deve ser lançado para que atinja o alvo?

$$\frac{(V_0)^2}{g} \sin(2\theta) = d \quad (\text{eq3})$$

De (eq1) e (eq3), vem:

$$\frac{(V_0)^2}{g} \sin(2\theta) - \frac{(V_0)^2}{g} \sin(2\alpha) = a$$

De eq2 e eq3, vem:

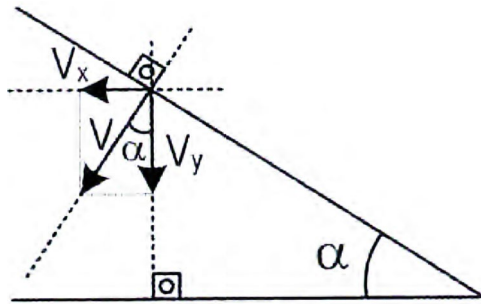
$$\frac{(V_0)^2}{g} \sin(2\beta) - \frac{(V_0)^2}{g} \sin(2\theta) = b \quad (\text{eq5})$$

Dividindo eq4 e eq5, membro a membro, vem:

$$\frac{\frac{(V_0)^2}{g} (\sin 2\theta - \sin 2\alpha)}{\frac{(V_0)^2}{g} (\sin 2\beta - \sin 2\theta)} = \frac{a}{b} \Rightarrow \\ \frac{\sin 2\theta - \sin 2\alpha}{\sin 2\beta - \sin 2\theta} = \frac{a}{b} \\ \sin 2\theta = \frac{a \sin 2\beta + b \sin 2\alpha}{a + b}$$

8. Para que a velocidade da pedra, ao colidir com a rampa, seja perpendicular à rampa, devemos ter:

$$\tan \alpha = \frac{V_x}{V_y} = \frac{V_0}{V_y} \Rightarrow V_y = V_0 \cdot \cot \alpha$$



A componente vertical da velocidade varia linearmente com o tempo (MUV), com aceleração $a = g$. Assim:

$$V_y = V_{0y} + gt \Rightarrow$$

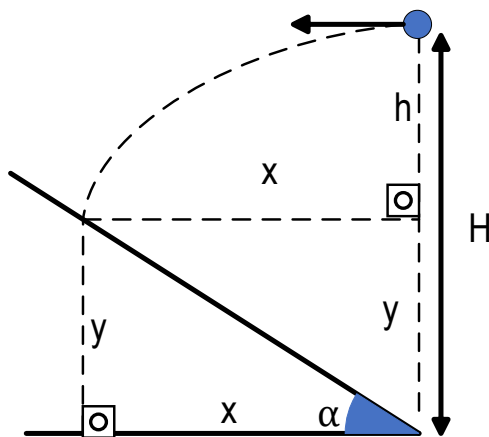
$$V_0 \cdot \cot \alpha = 0 + gt \Rightarrow$$

$$t = \frac{V_0 \cot \alpha}{g}$$

Durante esse tempo t de queda, a pedra sofre um deslocamento horizontal x em MRU, tal que:

$$x = V_0 t = V_0 \frac{V_0 \cot \alpha}{g} \Rightarrow$$

$$x = \frac{V_0^2 \cot \alpha}{g}$$



Simultaneamente, durante esse tempo t de queda, a pedra sofre um deslocamento vertical h tal que:

$$h = \frac{g}{2} t^2 \stackrel{(eq2)}{=} \frac{g}{2} \left(\frac{V_0 \cdot \cot \alpha}{g} \right)^2 \Rightarrow$$

$$h = \frac{V_0^2 \cot^2 \alpha}{2g} \quad (eq4)$$

Da Figura, vemos que $\tan \alpha = y/x$, portanto $y = x \cdot \tan \alpha$. Adicionalmente, temos:

$$y + h = H \Rightarrow x \cdot \tan \alpha + \frac{V_0^2 \cot^2 \alpha}{2g} = H$$

$$\frac{V_0^2 \cot \alpha}{g} \cdot \tan \alpha + \frac{V_0^2 \cot^2 \alpha}{2g} = H$$

$$V_0^2 (2 + \cot^2 \alpha) = 2gH \Rightarrow$$

$$V = \sqrt{\frac{2gH}{2 + \cot^2 \alpha}}$$

9. a) Se o projétil for disparado com velocidade $V_0 = 100 \text{ m/s}$, em quanto tempo ele acertará o macaco? Esse cálculo é mais simples quando executado no referencial em queda livre (gravidade desligada). Nesse referencial, o projétil se desloca em MRU na direção exata do macaco e percorre apenas a hipotenusa de comprimento D até atingir o animal. Nesse caso, teremos:

$$t = \frac{D}{V_0} = \frac{\sqrt{d^2 + h^2}}{V_0} = \frac{\sqrt{12^2 + 16^2}}{100} = \frac{20 \text{ m}}{100 \text{ m/s}} = 0,2 \text{ s}$$

Entretanto, como dissemos, a única forma de o macaco escapar do tiro é se ele chegar ao solo antes de ser alvejado, ou seja, antes do instante $t = 0,2 \text{ s}$.

Ora, no referencial da Terra, o macaco executa uma queda livre. O tempo de queda do macaco é dado por:

$$h = \frac{gt_q^2}{2} \Rightarrow 16 = \frac{10 \cdot t_q^2}{2} \Rightarrow t_q = 1,78 \text{ s}$$

Assim, como $0,2 \text{ s} < 1,78 \text{ s}$, vemos que o macaco ainda estará caindo no instante $t = 0,2 \text{ s}$, portanto, o macaco será alvejado pela bala.

b) Se o projétil for disparado com velocidade $V_0 = 10 \text{ m/s}$, em quanto tempo ele acertará o macaco? No referencial em queda livre, o projétil se desloca em trajetória retilínea em MRU na direção exata do macaco e percorre apenas a hipotenusa de comprimento D até atingir o animal. Nesse caso, teremos:

$$t = \frac{D}{V_0} = \frac{\sqrt{d^2 + h^2}}{V_0} = \frac{\sqrt{12^2 + 16^2}}{10} = \frac{25 \text{ m}}{10 \text{ m/s}} = 2,5 \text{ s}$$

Entretanto, como dissemos, a única forma de o macaco escapar do tiro é se ele chegar ao solo antes de ser alvejado, ou seja, antes do instante $t = 2,5 \text{ s}$.



Ora, como 2,5 s é maior do que o tempo de queda do macaco (2,5 s > 1,78 s), vemos que o macaco já terá chegado ao solo no instante $t = 2,5$ s e, portanto, a trajetória parabólica seguida pelo projétil (em relação à Terra) atingirá o solo antes de chegar ao macaco, levando o projétil ao repouso. Nesse caso, o macaco escapa de ser alvejado.

Chamo a atenção do leitor para o fato de que essa estratégia de usar o referencial em queda livre para “desligar a gravidade” só dá o efeito desejado quando esse referencial inicia a sua queda juntamente com os corpos da questão, a fim de que o tempo de queda Δt em $\frac{1}{2}g\Delta t^2$ seja igual para todos. Para isso, os corpos, por sua vez, precisam iniciar seus movimentos no campo gravitacional uniforme simultaneamente. Em problemas em que os projéteis não foram disparados simultaneamente, não há como “desligar a gravidade do problema”.

10. a) Conforme a resolução da questão 9, no referencial em queda livre (ou seja, desligando a gravidade), os projéteis descrevem trajetórias retilíneas em MRU e, portanto, para que eles sempre colidam, as distâncias percorridas por cada um devem satisfazer a lei dos senos:

$$\frac{V_A \cdot t}{\sin \beta} = \frac{V_0 \cdot t}{\sin \alpha} \Rightarrow V_A \sin \alpha = V_0 \sin \beta \quad (\text{eq1})$$

Essa condição eq1 equivale a igualar as componentes verticais das velocidades de lançamento dos projéteis, o que faz sentido. Afinal, se essas componentes verticais forem iguais, os projéteis estarão necessariamente na mesma altura, em qualquer instante, o que é uma condição necessária para que eles sempre colidam, mas não é suficiente.

b) Para que a colisão entre os projéteis ocorra efetivamente, ela deve acontecer antes de eles caírem no solo (obviamente ☺). Em suma, o instante da colisão deve ser anterior ao instante em que os projéteis chegam ao solo. O instante t da colisão pode ser determinado estudando as componentes horizontais dos movimentos uniformes de cada projétil:

$$V_A \cdot \cos \alpha \cdot t + V_B \cos \beta \cdot t = D$$

$$\Rightarrow t = \frac{D}{V_A \cos \alpha + V_B \cos \beta} \quad (\text{eq2})$$

O tempo de permanência no ar ($T_{V\infty}$) dos projéteis é o mesmo, devido à condição já imposta pela relação eq1. Ele vale:

$$T_{V\infty} = \frac{2 \cdot V_A \cdot \sin \alpha}{g} = \frac{2 \cdot V_B \cdot \sin \beta}{g} \quad (\text{eq3})$$

Assim, para que a colisão entre os projéteis ocorra enquanto eles ainda estejam no ar, devemos ter:

$$t < T_{V\infty} \Rightarrow \frac{D}{V_A \cos \alpha + V_B \cos \beta} < \frac{2 \cdot V_A \sin \alpha}{g}$$

$$D < \frac{2V_A \sin \alpha \cdot (V_A \cos \alpha + V_B \cos \beta)}{g}$$

11.

a) O projétil tem uma componente de velocidade $u \cdot \cos(\alpha - \beta)$ na direção da rampa e $u \cdot \sin(\alpha - \beta)$ na direção normal à rampa. As componentes da aceleração da gravidade são $g \cdot \sin \beta$ ao longo da rampa e $g \cdot \cos \beta$ na direção normal à rampa. Para determinar o tempo de voo, podemos escrever na direção normal à rampa:

$$V = V_0 + a \cdot t$$

$$0 = u \cdot \sin(\alpha - \beta) - g \cdot \cos \beta \cdot t \Rightarrow$$

$$t = \frac{u \cdot \sin(\alpha - \beta)}{g \cdot \cos \beta}$$

$$\Rightarrow t_{\text{voo}} = 2t = \frac{2u \cdot \sin(\alpha - \beta)}{g \cdot \cos \beta}$$

b) Ao longo da direção da rampa, o projétil executa um MRUV com velocidade inicial $u \cdot \cos(\alpha - \beta)$ sendo retardado pela componente da aceleração da gravidade $g \cdot \sin \beta$. Assim, o alcance OP ao longo da rampa é dado por:

$$OP = V_0 \cdot t_{\text{voo}} + \frac{a}{2} \cdot (t_{\text{voo}})^2$$

$$OP = u \cdot \cos(\alpha - \beta) \cdot \frac{2u \cdot \sin(\alpha - \beta)}{g \cdot \cos \beta} - \frac{g \cdot \sin \beta}{2} \left(\frac{2u \cdot \sin(\alpha - \beta)}{g \cdot \cos \beta} \right)^2$$

OP

$$= \frac{2u^2}{g} \left(\frac{\sin(\alpha - \beta) \cdot \cos(\alpha - \beta) \cdot \cos \beta}{\cos^2 \beta} - \frac{\sin^2(\alpha - \beta) \cdot \sin \beta}{\cos^2 \beta} \right)$$

$$OP = \frac{2u^2 \sin(\alpha - \beta)}{g \cos^2 \beta} [\cos \beta \cdot \cos(\alpha - \beta) - \sin \beta \cdot \sin(\alpha - \beta)]$$

$$OP = \frac{2u^2 \sin(\alpha - \beta)}{g \cos^2 \beta} \cdot \cos(\beta + \alpha - \beta)$$

$$\Rightarrow OP = \frac{2u^2 \sin(\alpha - \beta) \cdot \cos \alpha}{g \cos^2 \beta}$$

c) Para que OP seja máximo devemos maximizar a função trigonométrica:



$$F(\alpha) = \sin(\alpha - \beta) \cdot \cos \alpha \quad (\text{eq2})$$

Note que β é um ângulo fornecido no problema, portanto, é uma constante. Queremos achar o valor de α para que a função $F(\alpha)$ acima assuma seu valor máximo. Fazendo $\theta_1 = \alpha - \beta$ e $\theta_2 = \alpha$, a função $F(\alpha)$ pode ser reescrita como:

$$F = \sin \theta_1 \cdot \cos \theta_2, \text{ com } (\theta_1 - \theta_2) = \alpha - \beta - \alpha = -\beta = \text{constante.}$$

Da trigonometria, a função F pode ser reescrita como:

$$F = \sin \theta_1 \cos \theta_2 = \frac{1}{2} [\sin(\theta_1 + \theta_2) + \sin(\theta_1 - \theta_2)]$$

Entretanto, sendo $(\theta_1 - \theta_2) = \text{constante}$, podemos escrever:

$$F = \frac{1}{2} [\sin(\theta_1 + \theta_2) + \text{constante}]$$

Assim, para que F seja máxima, $\sin(\theta_1 + \theta_2)$ deve ser máximo, portanto:

$$\theta_1 + \theta_2 = 90^\circ \Rightarrow \alpha - \beta + \alpha = 90^\circ \Rightarrow$$

$$\alpha = \frac{\beta}{2} + 45^\circ \quad (\text{eq3})$$

d) Determinaremos o valor máximo do alcance OP encontrado no item b, que ocorre para ângulo de disparo α dado pela relação eq3. Analisando primeiramente a parte trigonométrica da relação eq1, vem:

$$Y = \frac{\sin(\alpha - \beta) \cdot \cos \alpha}{\cos^2 \beta} = \frac{\sin(90^\circ - \alpha) \cdot \cos \alpha}{\cos^2 \beta} = \frac{\cos^2 \alpha}{\cos^2 \beta}$$

Usando que

$$\cos(2\alpha) = 2 \cdot \cos^2 \alpha - 1 \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}, \text{ vem:}$$

$$\begin{aligned} Y &= \frac{\cos^2 \alpha}{\cos^2 \beta} = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2 \cos^2 \beta} = \frac{1 + \cos(\beta + 90^\circ)}{2 \cos^2 \beta} \\ &= \frac{1 - \sin \beta}{2 \cdot (1 - \sin^2 \beta)} \\ &= \frac{1}{2 \cdot (1 + \sin \beta)} \end{aligned}$$

Assim, o valor máximo do alcance OP é dado por:

$$\begin{aligned} OP_{\max} &= \frac{2u^2 \sin(\alpha - \beta) \cdot \cos \alpha}{g \cos^2 \beta} = \frac{2u^2}{g} \cdot \frac{1}{2 \cdot (1 + \sin \beta)} \\ \Rightarrow OP_{\max} &= \frac{u^2}{g \cdot (1 + \sin \beta)} \end{aligned}$$

12

13. A trajetória do gafanhoto é uma parábola que tangencia o tronco em dois pontos B e B* simétricos

em relação ao eixo vertical que passa pelo centro da secção circular. Até agora não sabemos nada sobre esses dois pontos B e B*. Eles podem ou não coincidir com o ponto E no topo do tronco.

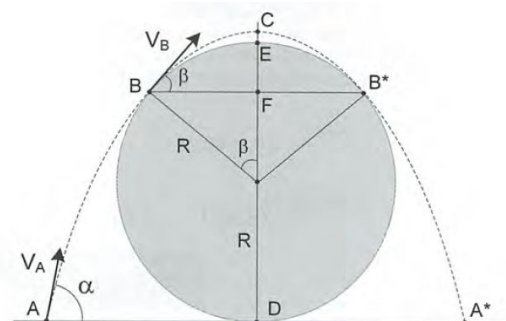
O gafanhoto salta do ponto A com velocidade inicial V_A fazendo um ângulo α com a horizontal. Nos pontos de tangência B e B*, o gafanhoto tem velocidade V_B fazendo um ângulo β com a horizontal.

No ponto B, a componente vertical da velocidade vale:

$$V_B \cdot \sin \beta = g \cdot t_2 \quad (\text{eq1})$$

onde t_2 é o tempo de voo para o trecho BC (C é o ponto mais alto da trajetória parabólica). O correspondente deslocamento horizontal BF vale:

$$V_B \cdot \cos \beta \cdot t_2 = R \cdot \sin \beta$$



Multiplicando-se eq1 e eq2, membro a membro, obtemos:

$$V_B^2 = \frac{g \cdot R}{\cos \beta} \quad (\text{eq3})$$

Da equação de Torricelli para a componente vertical do movimento (MUV), do ponto A ao ponto B, temos:

$$V_B^2 \cdot \sin^2 \beta = V_A^2 \cdot \sin^2 \alpha - 2 \cdot g \cdot R \cdot (1 + \cos \beta)$$

$$V_A^2 \cdot \sin^2 \alpha = V_B^2 \cdot \sin^2 \beta + 2 \cdot g \cdot R \cdot (1 + \cos \beta) \quad (\text{eq4})$$

Como a componente horizontal da velocidade permanece constante, podemos escrever:

$$(V_A \cos \alpha)^2 = (V_B \cos \beta)^2 \Rightarrow$$

$$V_A^2 (1 - \sin^2 \alpha) = V_B^2 (1 - \sin^2 \beta) \quad (\text{eq5})$$

Somando eq4 e eq5, vem:

$$V_A^2 = V_B^2 + 2 \cdot g \cdot R \cdot (1 + \cos \beta) \quad (\text{eq6})$$

A relação eq6 poderia ter sido obtida diretamente, sem fazer uso das relações eq4 e eq5, através da conservação da energia mecânica entre as posições A e B do movimento do gafanhoto. Como esse assunto só será abordado no volume 2 desta obra,



optei por fazer uso apenas de recursos cinemáticos para a resolução do problema.

Substituindo eq3 em eq6, vem:

$$V_A^2 = \frac{g \cdot R}{\cos \beta} + 2 \cdot g \cdot R \cdot (1 + \cos \beta) \Rightarrow$$

$$V_A^2 = 2Rg \cdot \left(1 + \cos \beta + \frac{1}{2\cos \beta}\right) \quad (\text{eq7})$$

Para determinar o valor mínimo da velocidade (em eq7), devemos determinar o valor mínimo da expressão trigonométrica:

$$Y = \cos \beta + \frac{1}{2\cos \beta} \quad (\text{eq8})$$

Para isso, podemos partir do fato de que qualquer número elevado ao quadrado é maior ou igual a zero. Se isso é verdade para qualquer número, certamente será verdadeira a sentença matemática abaixo:

$$\left(\sqrt{\cos \beta} - \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \cos \beta}}\right)^2 \geq 0$$

$$(\sqrt{\cos \beta})^2 - 2 \cdot \sqrt{\cos \beta} \cdot \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \cos \beta}} + \left(\frac{1}{\sqrt{2 \cdot \cos \beta}}\right)^2 \geq 0$$

$$\cos \beta - 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2\cos \beta} \geq 0 \Rightarrow \cos \beta + \frac{1}{2\cos \beta} \geq \sqrt{2} \quad (\text{eq9})$$

Assim, vimos que o valor mínimo da expressão trigonométrica mostrada em eq8 vale $\sqrt{2}$, mínimo esse que é atingido exatamente no caso em que os termos $\cos \beta$ e $1/(2 \cdot \cos \beta)$ são iguais entre si, ou seja:

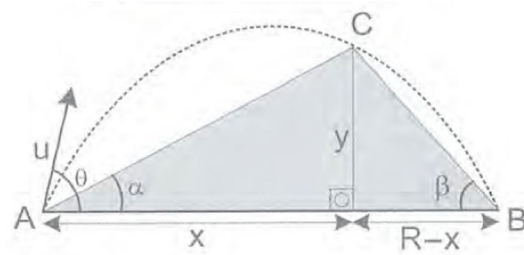
$$\cos \beta = \frac{1}{2\cos \beta} \Rightarrow \cos \beta = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \beta = 45^\circ$$

Substituindo o valor $\beta = 45^\circ$ em eq7, encontramos:

$$V_{Amin} = \sqrt{2Rg \cdot (1 + \sqrt{2})}$$

A expressão acima fornece a velocidade mínima que o gafanhoto deve ter para conseguir saltar o tronco cilíndrico.

14.



O alcance horizontal R atingido pelo projétil vale:

$$AB = R = \frac{v^2}{g} 2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha \quad (\text{eq1})$$

Do triângulo, vemos que:

$$\text{tg} \alpha + \text{tg} \beta = \frac{y}{x} + \frac{y}{R-x} = \frac{y(R-x) + yx}{x(R-x)} \Rightarrow$$

$$\text{tg} \alpha + \text{tg} \beta = \frac{y \cdot R}{x(R-x)} \quad (\text{eq2})$$

Da equação da trajetória parabólica, vem:

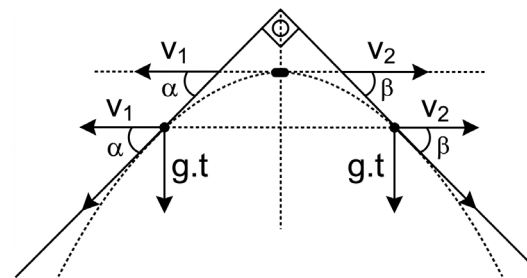
$$y = \text{tg} \theta \cdot x - \frac{g \cdot x^2}{2v^2 \cos^2 \theta} = \text{tg} \theta \cdot x \left[1 - \frac{g \cdot x}{2v^2 \cos^2 \theta \cdot \text{tg} \theta}\right]$$

$$y = \text{tg} \theta \cdot x \left[1 - \frac{x}{\frac{2v^2}{g} \sin \theta \cos \theta}\right] \stackrel{(\text{eq1})}{=} \text{tg} \theta \cdot x \left[1 - \frac{x}{R}\right]$$

$$= \text{tg} \theta \cdot \frac{x(R-x)}{R}$$

15

16. Na figura, temos:



$$\alpha + \beta = 90^\circ \Rightarrow \sin \alpha = \cos \beta \Rightarrow$$

$$\frac{g \cdot t}{\sqrt{g^2 t^2 + v_1^2}} = \frac{v_2}{\sqrt{g^2 t^2 + v_2^2}}$$

$$g^4 t^4 + g^2 t^2 v_2^2 = g^2 t^2 v_2^2 + v_2^2 v_1^2 \Rightarrow$$

$$g^4 t^4 = v_2^2 v_1^2 \Rightarrow$$

$$t = \frac{\sqrt{v_1 \cdot v_2}}{g}$$

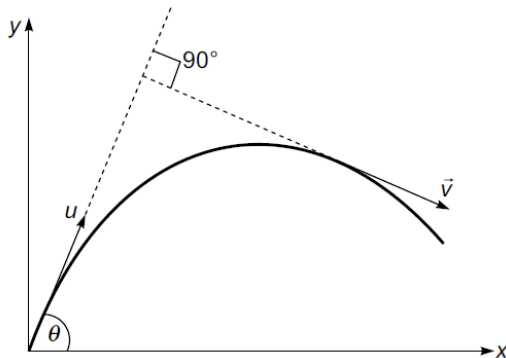


Como os projéteis estão sempre a uma mesma altitude, a distância entre eles será apenas horizontal, sendo dada por:

$$D = (v_1 + v_2)t = (v_1 + v_2) \frac{\sqrt{v_1 \cdot v_2}}{g}$$

17. Solução:

Método I:



Supondo que em $t = 0$ a velocidade da partícula seja u fazendo um ângulo θ com a horizontal, então

$$\vec{u} = u \cos \theta \hat{i} + u \sin \theta \hat{j}$$

A velocidade em qualquer instante t

$$\vec{v} = u \cos \theta \hat{i} + (u \sin \theta - gt) \hat{j}$$

$\vec{v}$ ser perpendicular a $\vec{u}$,

$$\vec{v} \cdot \vec{u} = 0$$

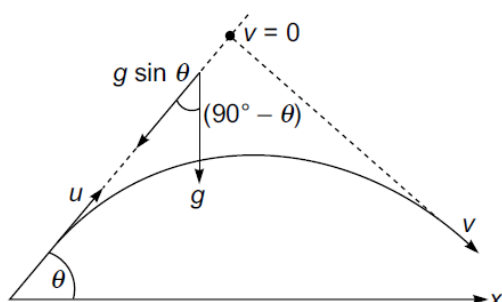
$$[u \cos \theta \hat{i} + (u \sin \theta - gt) \hat{j}] \cdot (u \cos \theta \hat{i} + u \sin \theta \hat{j}) = 0$$

$$u^2 \cos^2 \theta + u^2 \sin^2 \theta - ugt \sin \theta = 0$$

$$u^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) - ugt \sin \theta = 0$$

$$\therefore t = \frac{u}{g \sin \theta}$$

Método II:



Considere o movimento da partícula ao longo da linha inicial de projeção. Ao longo dessa linha, a velocidade inicial = u , a velocidade após o tempo t , $v = 0$ e a aceleração $a = g \sin \theta$.

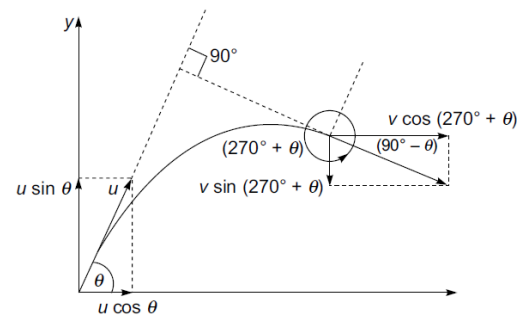
Usando a primeira equação do movimento ao longo da linha em consideração, temos

$$v = u + at$$

$$0 = u - g \sin \theta t$$

$$t = \frac{u}{g \sin \theta}$$

Método III:



Seja a velocidade da partícula no instante t igual a $\vec{v}$. Quando ela é perpendicular a $\vec{u}$, faz um ângulo $(270^\circ + \theta)$ com a horizontal. Assim, temos

$$v \cos(270^\circ + \theta) = u \cos \theta$$

$$v \sin \theta = u \cos \theta$$

A velocidade na direção vertical após o tempo t é

$$v \sin(270^\circ + \theta) = u \sin \theta - gt$$

$$-v \cos \theta = u \sin \theta - gt$$

Da Eq. (i), temos

$$v = \frac{u \cos \theta}{\sin \theta}$$

Substituindo este valor na Eq. (ii), obtemos

$$-\left(\frac{u \cos \theta}{\sin \theta}\right) \cos \theta = u \sin \theta - gt$$

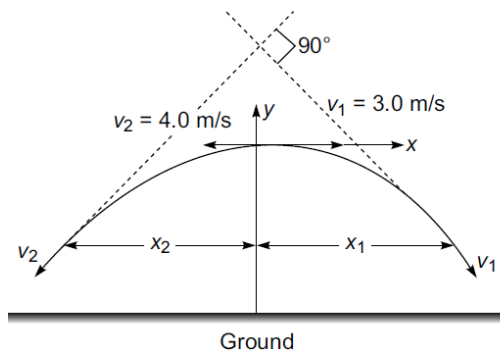
$$-u \cos^2 \theta = u \sin^2 \theta - gt \sin \theta$$

$$gt \sin \theta = u (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta)$$

$$t = \frac{u}{g \sin \theta}$$



18. Solução:



Supondo o ponto de projeção como a origem, as velocidades das partículas no instante t após a projeção

$$\vec{v}_1 = 3,0\hat{i} - gt\hat{j} \text{ (i)}$$

$$\vec{v}_2 = 4,0\hat{i} - gt\hat{j} \text{ (ii)}$$

Como $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ são mutuamente perpendiculares, então

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 0$$

$$(3,0\hat{i} - gt\hat{j}) \cdot (4,0\hat{i} - gt\hat{j}) = 0$$

$$3,0 \times 4,0 - g^2 t^2 = 0$$

$$t = \frac{\sqrt{12}}{g}$$

Como ambas as partículas têm velocidade inicial vertical nula, elas caem distâncias verticais iguais. Elas estão sobre a mesma linha horizontal. Portanto, temos

$$x_1 = 3,0t \text{ e } x_2 = 4,0t$$

$$x = x_1 + x_2 = 3,0t + 4,0t$$

$$= 7,0t = \frac{7,0\sqrt{12,0}}{g} \approx 2,5 \text{ m}$$

19. Na figura, temos:

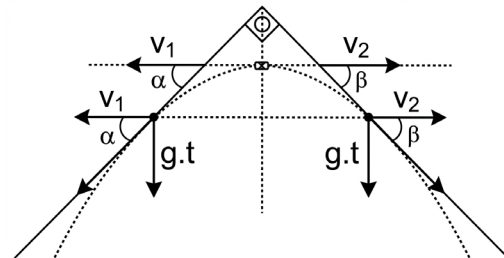
$$\alpha + \beta = 90^\circ \Rightarrow \sin \alpha = \cos \beta \Rightarrow$$

$$\frac{gt}{\sqrt{g^2 t^2 + v_1^2}} = \frac{v_2}{\sqrt{g^2 t^2 + v_2^2}}$$

$$g^4 t^4 + g^2 t^2 v_2^2 = g^2 t^2 v_2^2 + v_2^2 \cdot v_1^2 \Rightarrow$$

$$g^4 t^4 = v_2^2 \cdot v_1^2 \Rightarrow$$

$$t = \frac{\sqrt{v_1 \cdot v_2}}{g}$$



A imagem mostra:

$$D = (v_1 + v_2) \cdot t = (v_1 + v_2) \frac{\sqrt{v_1 \cdot v_2}}{g}$$

20. No referencial da Terra, as partículas têm coordenadas cartesianas (x, y) dadas, em função do tempo, por:

$$\text{Partícula 1: } (u \cos \alpha t, u \sin \alpha t - \frac{1}{2} g t^2)$$

$$\text{Partícula 2: } (v \cos \beta t, v \sin \beta t - \frac{1}{2} g t^2)$$

$$\text{Partícula 3: } (w \cos \gamma t, w \sin \gamma t - \frac{1}{2} g t^2)$$

O problema será mais facilmente resolvido num referencial em queda livre (equivalente a desligar a gravidade). Nesse referencial, as partículas têm coordenadas cartesianas dadas, em função do tempo, por:

$$\text{Partícula 1: } (u \cos \alpha t, u \sin \alpha t)$$

$$\text{Partícula 2: } (v \cos \beta t, v \sin \beta t)$$

$$\text{Partícula 3: } (w \cos \gamma t, w \sin \gamma t)$$

Da Geometria Analítica, a condição para o alinhamento das três partículas é:

$$\begin{vmatrix} u \cos \alpha t & u \sin \alpha t & 1 \\ v \cos \beta t & v \sin \beta t & 1 \\ w \cos \gamma t & w \sin \gamma t & 1 \end{vmatrix} = 0$$



Desenvolvendo o determinante, obtém-se:

$$\begin{aligned} & uwsen\alpha \cos \gamma t^2 + uvsen\beta \cos \alpha t^2 \\ & + vwsen\gamma \cos \beta t^2 - uvsen\alpha \cos \beta t^2 \\ & - vwsen\beta \cos \gamma t^2 - uwsen\gamma \cos \alpha t^2 = 0 \end{aligned}$$

A partir da expressão acima, fatoramos t^2 e agrupamos termos:

$$\begin{aligned} & t^2 [uw(\sen\alpha \cos \gamma - \sen\gamma \cos \alpha) \\ & + uv(\sen\beta \cos \alpha - \sen\alpha \cos \beta) \\ & + vw(\sen\gamma \cos \beta - \sen\beta \cos \gamma)] = 0. \end{aligned}$$

Usando $\sen A \cos B - \sen B \cos A = \sen(A - B)$, fica:

$$t^2 [uwsen(\alpha - \gamma) + uvsen(\beta - \alpha) + vwsen(\gamma - \beta)] = 0.$$

Como $t \neq 0$, a condição de alinhamento é

$$uwsen(\alpha - \gamma) + uvsen(\beta - \alpha) + vwsen(\gamma - \beta) = 0.$$

Dividindo toda a equação por uvw :

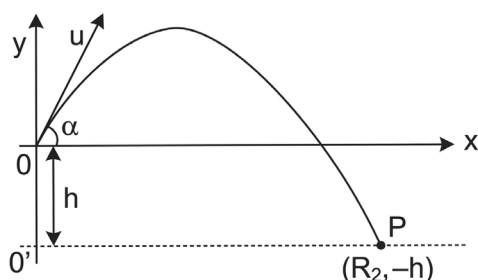
$$\frac{\sen(\gamma - \beta)}{u} + \frac{\sen(\alpha - \gamma)}{v} + \frac{\sen(\beta - \alpha)}{w} = 0,$$

que é exatamente o que se queria demonstrar.

21. Seja $A = R_1$ o alcance do canhão quando ele se encontra ao nível do mar:

$$R_1 = \frac{2u^2 \sen\alpha \cos \alpha}{g} \quad (\text{eq1})$$

Agora admita que o canhão esteja montado sobre uma plataforma de altura h . Ajustando a origem $(0,0)$ do sistema de coordenadas cartesianas de forma que ela coincida com a nova posição do canhão, a bala do canhão cairá na água no ponto P de coordenadas $(R_2, -h)$, onde R_2 é o alcance nessa nova situação, ou seja, $O'P = R_2$.



A equação da trajetória parabólica é:

$$y = \tg\alpha \cdot x - \frac{g \cdot x^2}{2u^2 \cdot \cos^2 \alpha}$$

Essa trajetória parabólica passa pelo ponto $(R_2, -h)$, portanto:

$$-h = \tg\alpha \cdot R_2 - \frac{g \cdot R_2^2}{2u^2 \cdot \cos^2 \alpha} \Rightarrow$$

$$g \cdot R_2^2 - 2u^2 \sen\alpha \cos \alpha \cdot R_2 - 2u^2 h \cos^2 \alpha = 0$$

Usando eq1, vem:

$$gR_2^2 - gR_1R_2 - 2u^2 h \cos^2 \alpha = 0$$

$$R_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow$$

$$R_2 = \frac{gR_1 + \sqrt{g^2R_1^2 + 4g \cdot 2u^2 \cdot h \cos^2 \alpha}}{2g} \quad (\text{eq2})$$

Extraindo $\cos \alpha$ de eq1 e substituindo em eq2, vem:

$$R_2 = \frac{gR_1 + \sqrt{g^2R_1^2 + 8g \cdot u^2 \cdot h \cdot \left(\frac{g^2R_1^2}{4u^4 \sen^2 \alpha}\right)}}{2g}$$

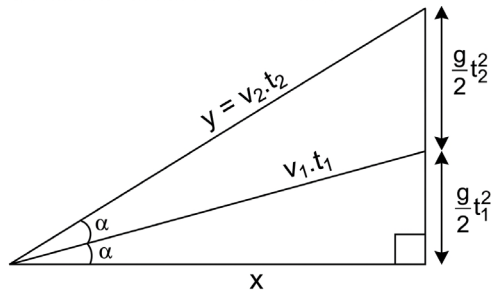
$$R_2 = \frac{R_1}{2} + \frac{R_1}{2} \sqrt{1 + \frac{2gh}{u^2 \sen^2 \alpha}}$$

$$= R_1 - \frac{R_1}{2} + \frac{R_1}{2} \sqrt{1 + \frac{2gh}{u^2 \sen^2 \alpha}}$$

$$R_2 - R_1 = \frac{R_1}{2} \sqrt{1 + \frac{2gh}{u^2 \sen^2 \alpha}} - \frac{R_1}{2}, \text{ com}$$

$$R_1 = A \text{ e } \Delta A = R_2 - R_1$$

$$\Delta A = \frac{A}{2} \left(\sqrt{1 + \frac{2gh}{u^2 \sen^2 \alpha}} - 1 \right)$$



- Teorema da bissetriz interna:

$$\frac{x}{\frac{g}{2}t_1^2} = \frac{y}{\frac{g}{2}t_2^2} \Rightarrow y = x \left(\frac{t_2}{t_1} \right)^2 \text{ (eq1)}$$

- Teorema de Pitágoras:

$$x^2 + \left(\frac{g}{2} (t_1^2 + t_2^2) \right)^2 = y^2 \text{ (eq2)}$$

- Substituindo eq1 em eq2, vem:

$$x^2 + \left(\frac{g}{2} (t_1^2 + t_2^2) \right)^2 = x^2 \frac{t_2^4}{t_1^4}$$

$$\Rightarrow \frac{g^2}{4} (t_1^2 + t_2^2)^2 = \frac{x^2}{t_1^4} (t_2^4 - t_1^4)$$

$$\frac{g^2}{4} (t_1^2 + t_2^2)(t_1^2 + t_2^2) = \frac{x^2}{t_1^4} (t_2^2 - t_1^2)(t_2^2 + t_1^2)$$

- Resultado final:

$$x = \frac{g}{2} t_1^2 \sqrt{\frac{t_1^2 + t_2^2}{t_2^2 - t_1^2}}$$

23

24

25

26. [C]

Na direção horizontal, o movimento é uniforme.

$$\begin{aligned} x &= x_0 + v_{0x} t \Rightarrow \\ x &= 0 + v_0 \cos 53^\circ t \Rightarrow \\ 120 &= 0,6 v_0 t \Rightarrow \\ v_0 t &= 200 \text{ (I)} \end{aligned}$$

Na direção vertical, o movimento é uniformemente variado.

$$\begin{aligned} y &= y_0 + v_{0y} t - \frac{1}{2} g t^2 \Rightarrow \\ y &= 0 + v_0 \sin 53^\circ t - 5 t^2 \Rightarrow \\ 35 &= 0,8 \times 200 - 5 t^2 \Rightarrow \\ 5 t^2 &= 160 - 35 \Rightarrow t^2 = \frac{125}{5} \Rightarrow \\ t &= 5 \text{ s (II)} \end{aligned}$$

Substituindo (II) em (I):

$$\begin{aligned} v_0 t &= 200 \Rightarrow \\ v_0 (5) &= 200 \Rightarrow \\ v_0 &= 40 \text{ m/s} \end{aligned}$$

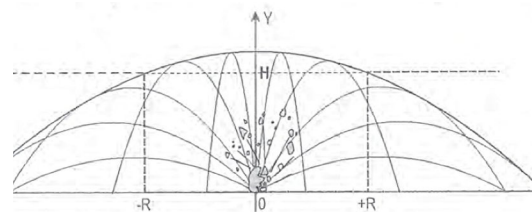
27

28

29

30

31. O menor diâmetro para esse poço, para que nenhum fragmento da granada atinja a superfície, ocorre quando a parábola de segurança (a envoltória de todas as possíveis trajetórias dos fragmentos) desse lançador (localizado na origem do sistema de coordenadas) passar exatamente sobre as bordas do poço.



Em outras palavras, o ponto de coordenadas cartesianas $(x, y) = (R, H)$ pertence à parábola de segurança (P.S.). Assim, podemos escrever:

$$y = \frac{V_0^2}{2 \cdot g} - \frac{g}{2 \cdot V_0^2} x^2$$

Substituindo $x = R$ e $y = H$ na equação da P.S., vem:

$$H = \frac{V_0^2}{2 \cdot g} - \frac{g}{2 \cdot V_0^2} R^2 \Rightarrow$$

$$2 \cdot V_0^2 \cdot g \cdot H = V_0^4 - g^2 \cdot R^2 \Rightarrow$$

$$R^2 = \frac{V_0^4 - 2V_0^2 \cdot gH}{g^2} \Rightarrow R = \frac{V_0 \cdot \sqrt{V_0^2 - 2gH}}{g}$$

Assim, o diâmetro D pedido vale: $D = 2.R \Rightarrow$

$$D = \frac{2 \cdot V_0 \cdot \sqrt{V_0^2 - 2gH}}{g}$$

32

33. Vamos perceber de cara que a mangueira faz um ângulo com a horizontal, o que já nos indica separar em componentes a nossa velocidade. Fica assim

$$v_x = v \cdot \cos 30^\circ$$

$$v_{0y} = v \cdot \sin 30^\circ$$

Outros dados importantes pra gente vai ser a altura final que é no solo, ou seja: **0** e a altura inicial do jato que é de **1,5 m**. Além da distância percorrida de **15 m**

$$h_i = 1,5 \text{ m}$$

$$h_f = 0 \text{ m}$$

$$S = 15 \text{ m}$$

Para saber o tempo em que o jato ficou no ar primeiro usamos a equação horizontal que é mais simples, mas nesse caso não sabemos a velocidade inicial. Então vamos resolver um sisteminha.

$$\begin{cases} S = v_x t \\ h_f - h_i = v_{0y} t - 4,9 t^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 15 = v_x t \\ -1,5 = v_{0y} t - 4,9 t^2 \end{cases}$$

Podemos portanto pegar a primeira equação do sistema e deixar t em evidência para então substituir:

$$t = \frac{15}{v_x}$$

E substituindo na segunda equação teremos:

$$-1,5 = v_{0y} \left(\frac{15}{v_x} \right) - 4,9 \left(\frac{225}{v_x^2} \right)$$

$$-1,5 v_x^2 = 15 v_{0y} v_x - 1102,5$$

Por fim, substituindo os valores que encontramos no Passo 1 para as velocidades em x e inicial em y , temos:

$$-1,5 \cdot \cos^2 30^\circ \cdot v^2 = 15 \cdot \sin 30^\circ \cdot \cos 30^\circ \cdot v^2 - 1102,5$$

$$-1,5 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 \cdot v^2 = 15 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} v^2 - 1102,5$$

$$-\frac{4,5}{4} v^2 = \frac{15\sqrt{3}}{4} v^2 - 1102,5$$

$$\frac{15\sqrt{3} + 4,5}{4} v^2 = 1102,5$$

$$v^2 = \frac{4410}{15\sqrt{3} + 4,5} = 144,68$$

$$v = 12,03 \text{ m/s}$$

2. Para saber a altura máxima primeiro vamos calcular o instante tempo em que a velocidade vertical zerou.

$$v_y = v_{0y} - gt$$

Podemos encontrar v_{0y} , fazendo:

$$v_{0y} = v \cdot \sin 30^\circ = 12,03 \left(\frac{1}{2} \right) = 6,01 \text{ m/s}$$

Portanto,

$$0 = 6,01 - 9,8t$$

$$t = \frac{6,01}{9,8} = 0,61 \text{ s}$$

Bom, agora é só utilizarmos esse tempo na equação da trajetória vertical que a gente descobre a altura máxima. Desse jeito aqui ó

á

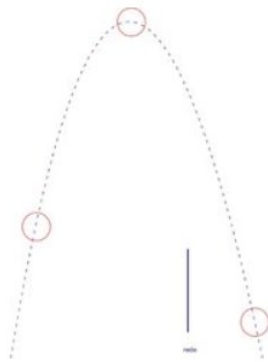
$$h_{\text{máx}} - h_i = v_{0y} t - \frac{gt^2}{2}$$

á

$$h_{\text{máx}} = 1,5 + 6,01 \cdot 0,61 - 4,9 \cdot 0,61^2 = \underline{\underline{3,34 \text{ m}}}$$



34



Não sabemos a que distância da rede a bola atinge o chão, mas que ela está a 1 m da rede quando atinge a altura do saque, então vamos considerar o lançamento só até essa altura, assim nossa distância horizontal percorrida é

$$D = 15,5m$$

E a altura máxima atingida (com referencial 0 no topo da rede) é

$$H = 20m$$

Sabemos que o movimento é descrito assim

$$\begin{cases} x = v_x t \\ y = v_{0y} t - \frac{g}{2} t^2 \end{cases}$$

E fazendo $y = 0$ podemos resolver o sistema e descobrir a distância do projétil, dessa forma

$$D = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\theta$$

Como só temos D e H, vamos buscar outras relações para achar nossa velocidade v_0

A altura máx acontece quando a velocidade vertical = 0, então

$$0 = v_{0y} - gt \rightarrow t = \frac{v_0 \sin \theta}{g}$$

Substituindo na equação da trajetória temos

$$D = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\theta$$

$$y_{max} = H = v_0 \sin \theta \cdot \left(\frac{v_0 \sin \theta}{g} \right) - \frac{1}{2g} v_0^2 \sin^2 \theta = \frac{v_0^2 \sin^2 \theta}{2g}$$

Assim ficamos com o sistema:

$$\begin{cases} D = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\theta \\ H = \frac{v_0^2 \sin^2 \theta}{2g} \end{cases}$$

Temos:

$$Dg = v_0^2 \sin 2\theta$$

$$2Hg = v_0^2 \sin^2 \theta$$

Dividindo as 2 equações ficamos com

$$\frac{D}{2H} = \frac{\sin 2\theta}{\sin^2 \theta}$$

Para resolver aqui usaremos uma identidade trigonométrica

$$\sin^2 \theta = \frac{1}{2} (1 - \cos 2\theta)$$

$$\frac{D}{2H} = \frac{\sin 2\theta}{\frac{1}{2} (1 - \cos 2\theta)}$$

Fazendo $\frac{D}{4H} = k$ para facilitar nossos cálculos fica assim

$$k(1 - \cos 2\theta) = \sin 2\theta$$

$$k^2(1 - \cos 2\theta)^2 = \sin^2 2\theta$$

Utilizando aquela formulinha da trigonometria a gente consegue deixar a equação bonita! Temos quase no fim, não desiste haha.

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$k^2(1 - \cos 2\theta)^2 = 1 - \cos^2 2\theta$$

$$k^2 - 2k^2 \cos 2\theta + k^2 \cos^2 2\theta = 1 - \cos^2 2\theta$$

Organizando tudo a gente fica com uma equação do segundo grau tranqüilinha

$$(k^2 + 1) \cos^2 2\theta - 2k^2 \cos 2\theta + k^2 - 1 = 0$$



$$k^2 + 1 = a$$

$$-2k^2 = b$$

$$k^2 - 1 = c$$

$$\cos 2\theta = \frac{2k^2 \pm \sqrt{4k^4 - 4(k^2 + 1)(k^2 - 1)}}{2(k^2 + 1)}$$

$$k = \frac{D}{4H} = \frac{15,5}{4,20} = 0,19375$$

$$\cos 2\theta = 1 \text{ ou } -0,927$$

Isso nos leva a $\theta = 0^\circ$ ou 78°

Como o ângulo de lançamento não pode ser 0 então

$$\theta = 78^\circ$$

Aproveitando nossas contas

$$H = \frac{v_0^2 \sin^2 \theta}{2g}$$

$$v_0 = \sqrt{\frac{2 \cdot 9,8 \cdot 20}{\sin^2 78^\circ}} = 20,4 \text{ m/s} = 73 \text{ km/h}$$

Finalmente pra acabar nosso probleminha (problemão né? Rs) o tempo que ela percorreu é dado por

$$x = v_x t$$

$$t = \frac{x}{v_x} = \frac{15,5}{20,4 \cdot \cos 78^\circ} \sim 4 \text{ s}$$

35. Então, nesse caso aqui a gente pode analisar a fórmula do alcance de modo bastante simples.

Como sabemos que

$$\frac{v^2 \sin 2\theta}{g} = A$$

Se gente pensar em 2 ângulos que vão nos dar o mesmo seno, teremos o mesmo alcance A, sim ou não? Bom, que valores eu coloco ali no espacinho do seno que vão me dar de volta uma resposta igual? Bora ver o ciclo trigonométrico



Na reta vertical temos os senos e na horizontal os cossenos, se a gente observar esses ângulos azul claro e escuro batem justamente no mesmo ponto da reta vertical, ou seja, tem o mesmo seno!!! Ótimo, e que ângulos são esses? Se a gente reparar são simétricos ao 90° , então vamos escrever eles assim

$$\sin(90 + x) = \sin(90 - x)$$

Como na nossa fórmula do começo estamos considerando 2θ fica assim

$$\frac{v^2}{g} \sin\left(45 + \frac{x}{2}\right) = \frac{v^2}{g} \sin\left(45 - \frac{x}{2}\right)$$

Ou seja, alcances iguais pra ângulos diferentes!! Matamos.

Para calcular nosso ângulo usaremos a fórmula inicial, substituindo θ por $45^\circ + \delta$, fica assim

$$\frac{v_0^2}{g} \sin(90 + 2\delta) = A$$

$$\sin(90^\circ + 2\delta) = \frac{gA}{v_0^2}$$

Usando a fórmula de soma de ângulos obtemos

$$\sin 90^\circ \cos 2\delta + \cos 90^\circ \sin 2\delta = \frac{gA}{v_0^2}$$

$$\cos 2\delta = \frac{gA}{v_0^2}$$

$$\delta = \frac{1}{2} \arccos\left(\frac{gA}{v_0^2}\right)$$



36. Nessa questão a gente só tem que mostrar que existem **2 ângulos de lançamento** para um mesmo ponto qualquer da trajetória. Já fizemos isso em outras questões com dados do problema, só precisamos formalizar um pouquinho de nada. Vamos começar com as equações básicas do movimento oblíquo.

$$\begin{cases} x = v_x t \\ y = v_{0y} t - \frac{g}{2} t^2 \end{cases}$$

$$t = \frac{x}{v_x}$$

$$y(x) = \frac{v_{0y}}{v_{0x}} x - \frac{g}{2} \left(\frac{x^2}{v_{0x}^2} \right)$$

$$y(x) = x \cdot tg\theta - \frac{g}{2} \left(\frac{x^2}{v_0^2 \cos^2 \theta} \right)$$

Sabendo agora que

$$\frac{1}{\cos^2 \theta} = \sec^2 \theta = 1 + tg^2 \theta$$

$$y(x) = x \cdot tg\theta - \frac{gx^2}{2v_0^2} tg^2 \theta - \frac{gx^2}{2v_0^2}$$

Assim, temos uma equação de segundo grau que nos fornece as seguintes raízes:

$$tg\theta = \frac{-x \pm \sqrt{x^2 - \left(\frac{gx^2}{v_0^2} \right)^2}}{-\frac{gx^2}{v_0^2}}$$

Se observarmos, o valor

$$\frac{g}{v_0^2}$$

aparece frequentemente e tem relação com nosso alcance máximo de lançamento, show? Fica assim:

$$\frac{g}{v_0^2} = \frac{1}{A_m}$$

$$tg\theta = \frac{-x \pm \sqrt{x^2 - \left(\frac{x^2}{A_m} \right)^2}}{-\frac{x^2}{A_m}}$$

Para que haja 2 alturas diferentes de lançamento nosso Δ precisa ser maior que 0. Então vamos analisar o caso extremo onde $\Delta = 0$.

$$tg\theta = -\frac{x}{\frac{x^2}{A_m}} = \frac{A_m}{x}$$

$$y(x) = x \cdot \frac{A_m}{x} - \frac{gx^2}{2v_0^2} \cdot \frac{A_m^2}{x^2} - \frac{gx^2}{2v_0^2}$$

$$y(x) = A_m - \frac{g}{2v_0^2} \cdot A_m^2 - \frac{gx^2}{2v_0^2}$$

$$y(x) = A_m - \frac{A_m^2}{2A_m} - \frac{x^2}{2A_m}$$

$$y(x) = \frac{A_m}{2} - \frac{x^2}{2A_m}$$

Isto significa que caso nosso lançamento represente pontos que estão nessa parábola, conseguiremos ter apenas **1 ângulo** que consiga alcançar seus pontos. Caso contrário e os pontos do lançamento estejam abaixo desse, nós teremos **2 ângulos diferentes** para cada ponto do espaço!

37. Para o cume C temos

$$v_y = v_{0y} - gt_1$$

$$v_{0y} = gt_1$$

Para saber t_1 vamos tirar da manga outra equação, saca só

$$h = v_{0y} t_1 - \frac{gt_1^2}{2}$$

$$h = gt_1^2 - \frac{gt_1^2}{2}$$



$$= \frac{gt_1^2}{2}$$

$$t_1 = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

Para o movimento da descida é quase a mesma coisa, só que mais fácil haha, vê só

$$h + d = \frac{gt_2^2}{2}$$

$$t_2 = \sqrt{\frac{2(h+d)}{g}}$$

Vamos achar nossa velocidade horizontal e tá no papo, ok?

$$V_x = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

Analisando a primeira parte do movimento fica assim

$$V_x = \frac{R}{t_1}$$

$$\Delta s_{tot} = \Delta s_1 + \Delta s_2$$

$$= R + \frac{Rt_2}{t_1}$$

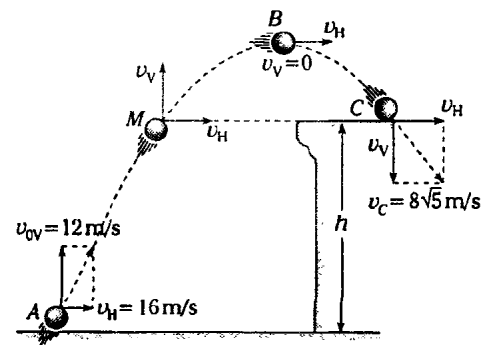
$$= R \left(1 + \frac{t_2}{t_1} \right)$$

$$= R \left(1 + \frac{t_2}{t_1} \right)$$

$$= R \left(1 + \sqrt{\frac{2(h+d)}{\frac{g}{2h}}} \right)$$

$$= R \left(1 + \sqrt{1 + \frac{d}{h}} \right)$$

38



No diagrama mostrado, ao decompor a velocidade de lançamento nas componentes horizontal e vertical, temos:

$$v_H = \frac{16 \text{ m}}{\text{s}} \text{ e } v_v = 12 \text{ m/s}$$

Agora, como a componente horizontal v_H em todo M.P.C.L. se mantém constante, isso significará que a componente horizontal da velocidade v_0 com a qual a esfera impacta o muro será $v_H = 16 \text{ m/s}$ e, como o módulo da velocidade com que a esfera impacta o muro é $v_C = 8\sqrt{5} \text{ m/s}$, então o módulo da componente vertical v_v em C será:

$$v_C^2 = v_v^2 + v_H^2$$

$$(8\sqrt{5})^2 = v_v^2 + (16)^2$$

$$v_v = 8 \text{ m/s}$$

Nosso objetivo no problema é determinar h e, segundo o que foi deduzido, examinamos o movimento na direção vertical de A até M empregando a seguinte equação:

$$v_v^2 = v_{0v}^2 - 2gh$$

Substituindo:

$$v_v^2 = 12^2 - 2(10)h(1)$$

Mas em M a $v_v = 8 \text{ m/s}$, já que em um mesmo nível a velocidade vertical de subida e de descida têm o mesmo módulo.

Em (1): $h = 4 \text{ m}$



Outro critério para calcular h

Pelas variações que a componente vertical da velocidade sofre, estabelece-se que:

$$t_{AC} = t_{AB} + t_{BC} = 1,2 \text{ s} + 0,8 \text{ s}$$

$$\Rightarrow t_{AC} = 2 \text{ s}$$

Em seguida, aplicamos a equação vetorial (de A para C):

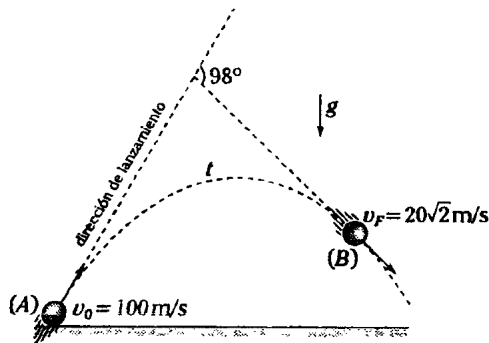
$$h = \left(\frac{v_{0y} + v_y}{2} \right) t_{AC} = \frac{(+12) + (-8)}{2} \cdot 2$$

$$h = +4 \text{ m}$$

O sinal (+) indica deslocamento para cima.

39. Resolução

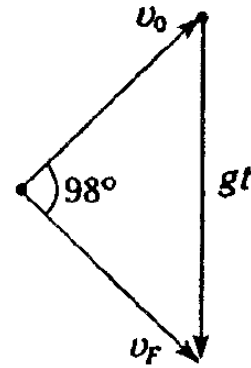
Consideramos que o objeto é lançado a partir da posição **A** e que, depois de **t segundos** de tê-lo lançado, encontra-se na posição **B**, onde a velocidade forma um ângulo de **98°** com a direção de lançamento, conforme mostrado a seguir.



Até agora temos trabalhado por componentes um **M.P.C.L.**, mas algumas vezes é conveniente tratá-lo geometricamente. Para todo movimento com aceleração constante (**M.R.U.V.**, **M.V.C.L.** ou **M.P.C.L.**) pode-se usar

$$\vec{v}_f = \vec{v}_0 + \vec{g}t$$

Como os módulos nessa fórmula não são paralelos, podemos proceder a formar um triângulo.



No triângulo formado, aplicamos a **lei dos cossenos**

$$(gt)^2 = v_0^2 + v_f^2 - 2v_0v_f \cos 98^\circ$$

$$100t^2 = (100)^2 + (20\sqrt{2})^2 - 2(100)(20\sqrt{2})(-\cos 8^\circ)$$

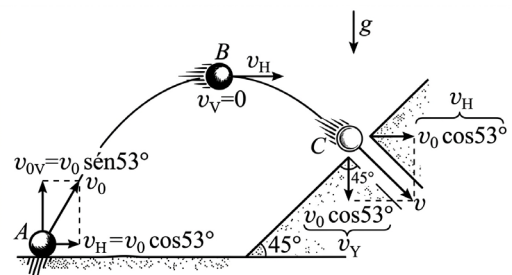
$$t^2 = 100 + 8 - 40\sqrt{2} \left(-\frac{1}{5\sqrt{2}} \right)$$

$$t^2 = 116$$

$$\therefore t = 2\sqrt{29} \text{ s}$$

40. Resolução

Segundo a direção do lançamento ($\theta = 53^\circ$) da esfera, ela realizará um **M.P.C.L.** Como a esfera consegue entrar com precisão no buraco, então nesse instante sua velocidade $\vec{v}$ será perpendicular à superfície inclinada, como mostra o diagrama a seguir.



Em todo momento, a componente horizontal não varia ($v_0 \cos 53^\circ = \text{cte.}$). Em C, dado que a entrada é com 45° , a componente vertical $v_v = v_0 \cos 53^\circ$. Como de A até C a esfera leva 7 s e também apresenta movimento de subida e depois



descida, então é conveniente usar a seguinte equação vetorial:

$$\vec{v}_v = \vec{v}_{0v} + \vec{g}t$$

Segundo a direção dos vetores, temos

$$-v_v = +v_{0v} + (-g)t$$

Substituindo os valores correspondentes

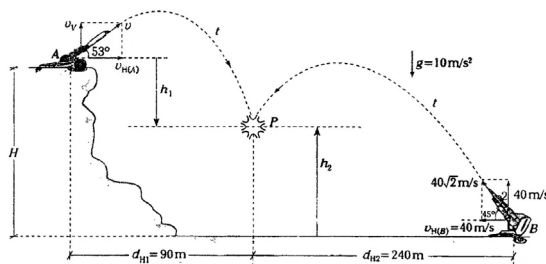
$$-v_0 \cos 53^\circ = +v_0 \sin 53^\circ - 10(7)$$

$$-v_0 \left(\frac{3}{5}\right) = +v_0 \left(\frac{4}{5}\right) - 10(7)$$

Resolvendo

$$v_0 = 50 \text{ m/s}$$

41.



Resolução

Os projéteis realizam **M.P.C.L.**, e, desde o instante em que são lançados simultaneamente até que colidem, transcorreram t segundos.

Cálculo de H

Da figura observa-se que

$$H = h_1 + h_2 \quad (I)$$

Analisando verticalmente o movimento de cada projétil, escrevemos a equação vetorial.

- Para o projétil lançado desde A

$$\vec{h}_1 = \vec{v}_{0v}t + \frac{1}{2}\vec{g}t^2$$

$$-h_1 = +v_v t + \frac{1}{2}(-g)t^2 \quad (II)$$

- Para o projétil lançado desde B

$$\vec{h}_2 = \vec{v}_{0v}t + \frac{1}{2}\vec{g}t^2$$

$$+h_2 = +40t + \frac{1}{2}(-g)t^2 \quad (III)$$

Subtraindo (III) de (II)

$$h_1 + h_2 = (40 - v_v)t$$

$$H = (40 - v \sin 53^\circ)t \quad (IV)$$

Agora, para determinar v e t , analisamos o movimento horizontal (**M.R.U.**) do projétil lançado desde B.

$$d_{H2} = v_{H(B)}t = 40t$$

$$\Rightarrow 240 = 40t$$

$$t = 6 \text{ s} \quad (V)$$

Também para o projétil lançado desde A

$$d_{H1} = v_{H(A)} \cdot t$$

$$\Rightarrow 90 = (v \cos 53^\circ)(6)$$

Resolvendo

$$v = \frac{25 \text{ m}}{\text{s}} \quad (VI)$$

Também para o projétil lançado desde A

$$d_{H1} = v_{H(A)} \cdot t$$

$$\Rightarrow 90 = (v \cos 53^\circ)(6)$$

Resolvendo

$$v = \frac{25 \text{ m}}{\text{s}} \quad (VI)$$

(V) e (VI) em (IV)

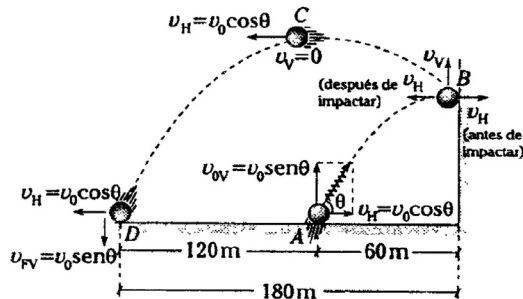
$$H = \left(40 - 25 \left(\frac{4}{5}\right)\right) 6$$



Daí

$$H = 120 \text{ m}$$

42



Como o choque é elástico, ele permite que a bolinha chegue com $v_0 \cos \theta (\rightarrow)$ e rebata com a mesma rapidez $v_0 \cos \theta (\leftarrow)$. A componente vertical da velocidade $v_y > 0 (\uparrow)$, ao se somar com $v_0 \cos \theta (\leftarrow)$, faz com que a bolinha descreva um M.P.C.L. de B até D.

Se a componente horizontal da velocidade se manter constante e a duração do choque for desprezada, então de A até D pode-se escrever:

$$v_H = \frac{e_{AD}}{t_{AD}} \Rightarrow v_0 \cos \theta = \frac{240}{t_{AD}} \quad (I)$$

Verticalmente, a bolinha desenvolve um M.V.C.L., e como de A até D a bolinha está em subida e descida, empregaremos a seguinte equação vetorial:

$$\vec{v}_{fv} = \vec{v}_{0v} + \vec{g}t$$

Substituindo

$$-v_{fv} = +v_{0v} + (-10)t_{AD}$$

$$-v_0 \sin \theta = +v_0 \sin \theta - 10t_{AD}$$

$$v_0 \sin \theta = 5t_{AD}$$

$$t_{AD} = \frac{v_0 \sin \theta}{5} \quad (II)$$

Substituímos (II) em (I)

$$v_0^2 \sin \theta \cos \theta = 240(5)$$

$$(50)^2 \sin \theta \cos \theta = 1200$$

$$2 \sin \theta \cos \theta = \frac{24}{25}$$

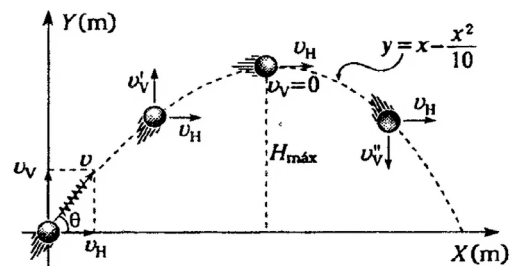
$$\sin 2\theta = \frac{24}{25}$$

Segundo essa relação, 2θ deve ser 74° , então:

$$2\theta = 74^\circ$$

$$\Rightarrow \theta = 37^\circ$$

43



No ponto mais alto,

$$v_{min} = v_H = v \cos \theta \quad (I)$$

São necessários v e θ .

Para o lançamento de uma partícula a partir da origem, sob certo ângulo, combinando

$$x = v \cos \theta t \text{ e } y = v \sin \theta t - \frac{1}{2} g t^2$$

estabelece-se que a equação de sua trajetória é dada por

$$y = \tan \theta x - \frac{g}{2v^2 \cos^2 \theta} x^2 \quad (II)$$

onde

- v : rapidez de lançamento;
- θ : ângulo de lançamento;
- g : aceleração da gravidade.

Comparando a equação da trajetória (dado)



$$y = x - \frac{x^2}{10}$$

com a relação (II), deduz-se que

$$\tan \theta = 1 \Rightarrow \theta = 45^\circ$$

e

$$\frac{g}{2v^2 \cos^2 \theta} = \frac{1}{10} \Rightarrow$$

$$\frac{10}{2v^2 \cos^2 45^\circ} = \frac{1}{10} \Rightarrow v = 10 \text{ m/s}$$

Substituindo em (I), obtém-se

$$v_{\min} = 5\sqrt{2} \text{ m/s}$$

Outra forma

Da equação da trajetória da partícula

$$y = x - \frac{x^2}{10}$$

deduzimos que a trajetória é uma parábola; por conseguinte, a partícula realizará um M.P.C.L.

Dando a seguinte forma à equação da trajetória:

$$y = a(x - d)^2 + H \text{ (III)}$$

onde $(d; H)$ é o ponto do vértice da parábola, sendo:

- y : a altura em que se encontra a partícula em relação ao eixo X ;
- a : número (constante);
- x : módulo do deslocamento horizontal;
- d : módulo do deslocamento horizontal até o momento em que a partícula atinge sua altura máxima H .

Nesse sentido, dando forma à equação da trajetória, obtém-se

$$y = -\frac{1}{10}(x - 5)^2 + 0,5$$

Então, comparando-a com (III), verifica-se que

$$d = 5 \text{ m} \wedge H = 0,5 \text{ m}$$

Agora, temos que calcular a rapidez mínima que a partícula adquire, já que está em sua posição mais alta. Se, nessa posição, a velocidade é horizontal (v_H), então

$$v_H = \frac{d}{t_{\text{sub}}} = \frac{5}{t_{\text{sub}}} \text{ (2)}$$

Além disso, verticalmente a partícula realiza um M.U.V.C., onde, de A para B ,

$$t_{\text{sub}} = t_{\text{baj}}$$

e, de B para C ,

$$H = v_{0y} t_{\text{baj}} + \frac{1}{2} g t_{\text{baj}}^2$$

então

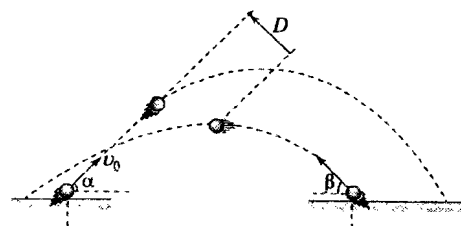
$$2,5 = \frac{1}{2} (10) t_{\text{baj}}^2 \Rightarrow t_{\text{baj}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Pela (2):

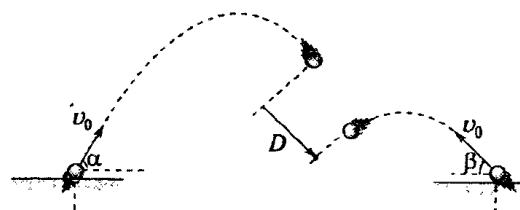
$$v_H = 5\sqrt{2} \text{ m/s} \Rightarrow v_{\min} = 5\sqrt{2} \text{ m/s}$$

44. Resolução: Uma vez lançados os projéteis, eles realizarão um M.P.C.L. Agora, como desejamos determinar a menor distância D de aproximação entre eles, isso pode ocorrer quando os projéteis estiverem subindo ou descendo, conforme mostrado a seguir nos seguintes casos:

Caso I

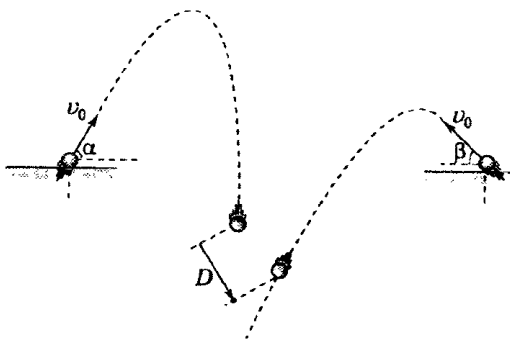


Caso II

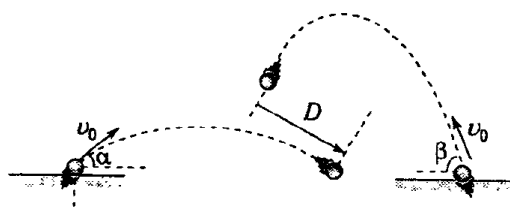




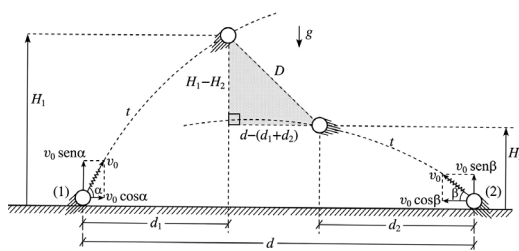
Caso III



Caso IV



Agora, os casos I, II, III e IV podem ocorrer, pois isso dependerá de v_0 e α . Para determinar D , podemos considerar qualquer caso. Consideremos o caso I.



Do triângulo retângulo sombreado, temos que a separação entre os projéteis é

$$D = \sqrt{(H_1 - H_2)^2 + (d - (d_1 + d_2))^2} \quad (I)$$

Como, na horizontal, os projéteis se comportam como se estivessem em um **M.R.U.** (*movimento retilíneo uniforme*), escreve-se diretamente

$$\begin{aligned} d_1 &= (v_0 \cos \alpha) t \\ d_2 &= (v_0 \cos \beta) t \end{aligned}$$

$$\Rightarrow d_1 + d_2 = v_0 t (\cos \alpha + \cos \beta) \quad (II)$$

Além disso, na direção vertical os projéteis realizam um **M.V.C.L.** (*movimento vertical de queda livre*), então, para seus deslocamentos verticais, temos

$$\begin{aligned} H_1 &= v_0 \sin \alpha t - \frac{1}{2} g t^2 \\ H_2 &= v_0 \sin \beta t - \frac{1}{2} g t^2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow H_1 - H_2 = v_0 t (\sin \alpha - \sin \beta) \quad (III)$$

Substituindo (II) e (III) em (I), obtém-se

$$D = \sqrt{(v_0 t (\sin \alpha - \sin \beta))^2 + (d - v_0 t (\cos \alpha + \cos \beta))^2} \quad (IV)$$

Desenvolvendo, reduzindo e ordenando, obtém-se

$$D = \sqrt{d^2 + v_0 t (2v_0 + 2v_0 t \cos(\alpha + \beta)) - d(\cos \alpha + \cos \beta)}$$

Segundo essa expressão, o valor de D depende apenas de t , já que v_0 , α e β são valores fixos. Nesse sentido, encontraremos t para o caso em que D seja mínimo; pois D será mínimo quando (*) for zero. Assim,

$$2v_0 t + 2v_0 t \cos(\alpha + \beta) - d(\cos \alpha + \cos \beta) = 0$$

$$\Rightarrow 2v_0 t (1 + \cos(\alpha + \beta)) = d(\cos \alpha + \cos \beta)$$

Aqui, deve-se recordar ou revisar algumas transformações trigonométricas, o ângulo pela metade e a passagem da diferença ao produto de cossenos; então se tem

$$\begin{aligned} 2v_0 t \left(2 \cos^2 \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \right) &= d \left(2 \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) \right) \\ \Rightarrow 2v_0 t \left(2 \cos^2 \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \right) &= d \left(2 \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) \right) \end{aligned}$$

de onde, isolando o tempo, teremos

$$t = \frac{d \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right)}{2v_0 \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right)}$$

Substituindo em (IV),

$$D = \sqrt{\left[v_0 \left(\frac{d \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right)}{2v_0 \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right)} \right) (\sin \alpha - \sin \beta) \right]^2 + \left[d - v_0 \left(\frac{d \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right)}{2v_0 \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right)} \right) (\sin \alpha + \sin \beta) \right]^2}$$

$$D = \sqrt{\left[v_0 \left(\frac{d \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right)}{2v_0 \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right)} \right) (\sin \alpha - \sin \beta) \right]^2 + \left[d - v_0 \left(\frac{d \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right)}{2v_0 \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right)} \right) (\sin \alpha + \sin \beta) \right]^2} \quad (V)$$

Pela trigonometria sabemos que

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right)$$

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \sin \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right)$$

Ao substituir em (V) e simplificar, obtém-se

$$D = \sqrt{\left[d \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) \sin \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) \right]^2 + \left[d - d \cos^2 \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) \right]^2}$$

$$D = \sqrt{d^2 \sin^2 \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) \cos^2 \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) + d^2 \left[1 - \cos^2 \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) \right]^2}$$

$$D = \sqrt{d^2 \sin^2 \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) \left[\cos^2 \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) + \sin^2 \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) \right]}$$

Identidade vale 1

$$\therefore D = d \sin \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right)$$

A partir dessa expressão, podemos deduzir que, para que os projéteis se choquem, deve-se cumprir $D = 0$; e, para isso, $\alpha = \beta$. Isso permite concluir que dois projéteis lançados simultaneamente de uma superfície horizontal colidirão se os componentes verticais de suas velocidades de lançamento forem iguais.



45. A) A coordenada de posição (z) de um corpo em cada instante de tempo, quando a força que atua sobre ele é seu próprio peso e a força de resistência do ar, é dada por:

$$z = \left(\frac{mg}{bv_{x0}} + \frac{v_{z0}}{v_{x0}} \right) x - \frac{m^2 g}{b^2} \ln \left(\frac{mv_{x0}}{mv_{x0} - bx} \right)$$

Reescrevendo esta equação,

$$z = \left(\frac{mg}{bv_{x0}} + \frac{v_{z0}}{v_{x0}} \right) x + \frac{m^2 g}{b^2} \ln \left(1 - \frac{bx}{mv_{x0}} \right)$$

Lembremos que o desenvolvimento em série de $\ln(1+x)$ para $x \ll 1$, é dado por:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} - \frac{x^4}{4!} + \dots$$

Utilizando este desenvolvimento em nossa expressão para (z), obtemos mais um termo, assim:

$$z = \frac{v_{z0}}{v_{x0}} x - \frac{1}{2} \frac{g}{v_{x0}^2} x^2 - \frac{1}{3} \frac{bg}{mv_{x0}^3} x^3 - \frac{1}{4} \frac{b^2 g}{m^2 v_{x0}^4} x^4$$

B) Na equação inicial para (z), tomando $z = 0$, obtemos a coordenada de posição (x), assim:

$$x_m = \frac{-\frac{g}{2v_{x0}^2} \pm A}{\frac{2}{3} \frac{bg}{mv_{x0}^3}}$$

sendo,

$$A = \left\{ \frac{1}{4} \frac{g^2}{v_{x0}^4} + 4 \left(\frac{v_{z0}}{v_{x0}} \right) \left(\frac{1}{3} \frac{bg}{mv_{x0}^3} \right) \right\}^{1/2}$$

Levando em conta que: $x \ll \left(\frac{mv_{x0}}{b} \right)$, a expressão para (x), fica assim:

$$x_m = \frac{-\frac{g}{2v_{x0}^2} \pm \frac{g}{2v_{x0}^2} \left[1 + \frac{bv_{z0}}{3mg} \right]^{1/2}}{\frac{2bg}{3mv_{x0}^3}}$$

Desenvolvendo em série de potências, o termo correspondente ao subradical, e tomando a parte positiva, obtemos um termo adicional no desenvolvimento de (x),

$$x_m = \frac{2v_{x0}v_{z0}}{g} - \frac{8bv_{z0}^2v_{x0}}{3mg^2} + \frac{64b^2v_{x0}v_{z0}^3}{3m^2g^3}$$

46. Resolução

a) A velocidade tem módulo mínimo no ponto de altura máxima, local em que ela possui apenas a componente horizontal v_x :

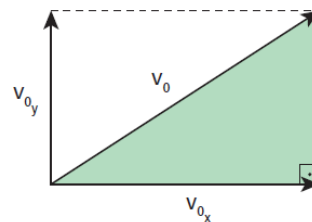
$$h_{max} = \frac{v_{0y}^2}{2g} \Rightarrow 25 = \frac{v_{0y}^2}{20} \Rightarrow v_{0y}^2 = 500$$

$$v_0^2 = v_{0x}^2 + v_{0y}^2$$

$$30^2 = v_{0x}^2 + 500$$

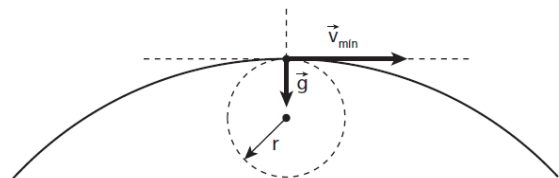
$$v_{0x} = v_x = 20 \text{ m/s}$$

$$v_{min} = 20 \text{ m/s}$$

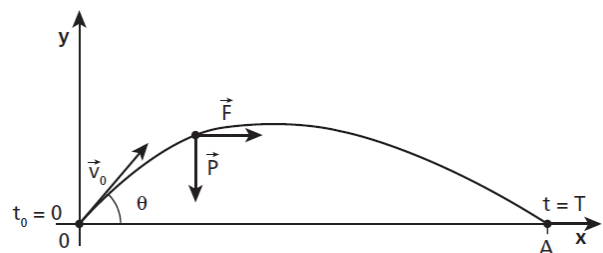


$$b) \vec{a}_{cp} = \vec{g} \Rightarrow \frac{v_{min}^2}{r} = g \Rightarrow \frac{20^2}{r} = 10$$

$$r = 40 \text{ m}$$



47.



Na vertical



$$\begin{cases} y_0 = 0 \\ v_{0y} = v_0 \sin \theta \\ \alpha_y = -g \end{cases}$$

$$T = \frac{2v_0 \sin \theta}{g}$$

Na horizontal

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ v_{0x} = v_0 \cos \theta \\ \alpha_x = \frac{F}{m} \end{cases}$$

$$x = x_0 + v_{0x}t + \frac{\alpha_x}{2}t^2 \Rightarrow$$

$$x = v_0 \cos \theta \cdot t + \frac{F}{2m}t^2$$

Em $t = T$, temos $x = A$:

$$A = v_0 \cos \theta \cdot \frac{2v_0 \sin \theta}{g} + \frac{F}{2m} \cdot \frac{4v_0^2 \sin^2 \theta}{g^2}$$

$$A = \frac{v_0^2}{g} 2 \sin \theta \cos \theta \left(1 + \frac{F \tan \theta}{mg} \right)$$

Resultado final da caixa

$$A = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\theta \left(1 + \frac{F \tan \theta}{mg} \right)$$

48. Resolução:

a)

$$x = v_0 \cos \theta t \Rightarrow A = v_0 \cos \theta T \Rightarrow$$

$$T = \frac{A}{v_0 \cos \theta}$$

$$y = h + v_0 \sin \theta T - \frac{gt^2}{2}$$

$$0 = h + v_0 \sin \theta T - \frac{g}{2}T^2$$

$$0 = h + v_0 \sin \theta \cdot \frac{A}{v_0 \cos \theta} - \frac{g}{2} \cdot \frac{A^2}{v_0^2 \cos^2 \theta}$$

$$0 = h + A \tan \theta - \frac{gA^2}{2v_0^2} \sec^2 \theta$$

$$0 = h + A \tan \theta - \frac{gA^2}{2v_0^2} (1 + \tan^2 \theta)$$

$$0 = h + A \tan \theta - \frac{gA^2}{2v_0^2} - \frac{gA^2}{2v_0^2} \cdot \tan^2 \theta$$

$$\frac{gA^2}{2v_0^2} \tan^2 \theta - A \tan \theta + \left(\frac{gA^2}{2v_0^2} - h \right) = 0$$

Na equação (1):

$$\Delta = A^2 - 4 \left(\frac{gA^2}{2v_0^2} \right) \left(\frac{gA^2}{2v_0^2} - h \right)$$

$$= A^2 - \frac{g^2 A^4}{v_0^4} + \frac{2gA^2 h}{v_0^2}$$

$$\Delta = A^2 \left(1 - \frac{g^2 A^2}{v_0^4} + \frac{2gh}{v_0^2} \right)$$

Para existir $\tan \theta$ real: $\Delta \geq 0$

$$A^2 \left(1 - \frac{g^2 A^2}{v_0^4} + \frac{2gh}{v_0^2} \right) \geq 0 \Rightarrow$$

$$1 - \frac{g^2 A^2}{v_0^4} + \frac{2gh}{v_0^2} \geq 0$$

$$\frac{g^2 A^2}{v_0^4} \leq 1 + \frac{2gh}{v_0^2} \Rightarrow \frac{g^2 A^2}{v_0^4} \leq \frac{v_0^2 + 2gh}{v_0^2}$$

$$A \leq \frac{v_0}{g} \sqrt{v_0^2 + 2gh} \Rightarrow A_{\max} = \frac{v_0}{g} \sqrt{v_0^2 + 2gh}$$

Sabe-se que $A_{\max}$ corresponde à igualdade $\Delta = 0$ na equação (1), situação em que essa equação admite uma única raiz $\tan \theta$ real (raiz dupla), que é a abscissa do vértice da parábola: $-\frac{b}{2a}$.

$$\tan \theta = -\frac{-A}{\frac{2gA^2}{2v_0^2}} = \frac{v_0^2}{gA}$$



Fazendo $A = A_{max}$, vem:

$$\operatorname{tg} \theta_M = \frac{v_0}{\sqrt{v_0^2 + 2gh}}$$

Dica:

• Quando h é igual a zero, caímos no caso trivial em que $\theta_M = 45^\circ$. De fato:

$$\operatorname{tg} \theta_M = \frac{v_0}{\sqrt{v_0^2 + 2gh \cdot 0}} = \frac{v_0}{v_0} = 1 \Rightarrow \theta_M = 45^\circ$$

b)

$$\operatorname{tg} \theta_M = \frac{100}{\sqrt{100^2 + 2 \cdot 10 \cdot 200}} \Rightarrow \theta_M \approx 40^\circ$$

49. **Resolução do Professor Laerte:** A aceleração neste caso é constante e dada por $a = \frac{q \cdot E}{m}$.

Neste caso temos um movimento uniformemente variado ao longo do eixo x , de forma que podemos aplicar equações cinemáticas conhecidas em uma dimensão, aqui faremos a escolha de $x_0 = 0$ e $v_0 = 0$, assim:

$$x = \frac{1}{2} a_x \cdot t^2 = \frac{q \cdot E}{2m} \cdot t^2$$

$$v = a_x \cdot t = \frac{q \cdot E}{m} \cdot t$$

$$v^2 = 2 \cdot a_x \cdot x = \left(\frac{2 \cdot q \cdot E}{m} \right) \cdot x$$

A energia cinética K da partícula depois que já se deslocou pela distância $d = x$ é:

$$K = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \left(\frac{2 \cdot q \cdot E}{m} \right) \cdot x$$

$$K = q \cdot E \cdot x$$

Esse resultado pode também ser obtido identificandose a partícula como um sistema não isolado e aplicando-se o modelo do sistema não isolado. A energia é transferida do ambiente (campo elétrico) pelo trabalho, então o teorema do trabalho e da energia cinética dá o mesmo resultado que o cálculo que acabamos de fazer. **TENTE FAZER!**

50. Como o campo elétrico está no sentido negativo de y , a aceleração está no sentido positivo de y , e é obtida por:

$$a = \frac{e \cdot E}{m}$$

Como a aceleração é constante, podemos decompor o movimento em duas direções (Independência dos movimentos de Galileu) aplicando as equações cinemáticas do movimento uniforme (direção X) e uniformemente variado (direção Y), com as seguintes condições iniciais $v_x = v_0$ e $v_{0y} = 0$:

$$x = v_0 \cdot t$$

$$y = \frac{1}{2} \cdot a_y \cdot t^2 = \frac{e \cdot E}{2m} \cdot t^2$$

O aluno deve perceber que a trajetória descrita pelo elétron neste caso é uma parábola, onde podemos demonstrar:

$$x = v_0 \cdot t \rightarrow t = \frac{x}{v_0}$$

Substituindo-se a Eq.

$$y = \frac{e \cdot E}{2m} \cdot t^2 = \frac{e \cdot E}{2m} \cdot \left(\frac{x}{v_0} \right)^2$$

$$y = \frac{e \cdot E}{2m \cdot v_0^2} \cdot x^2$$

Aqui você leitor pode fazer uma analogia entre o movimento descrito por uma partícula carregada lançada dentro de um campo elétrico uniforme $\vec{E}$, com o movimento de uma partícula de massa m em um campo gravitacional uniforme $\vec{g}$ sob a ação de uma força constante de magnitude $m \cdot \vec{g}$. No caso da figura acima após os elétrons saírem da região entre as placas ele descreverá uma trajetória retilínea obedecendo a primeira lei de Newton, com uma velocidade $v > v_0$ (Desprezando interações gravitacionais). Para uma dada velocidade inicial do elétron, a curvatura da trajetória depende do módulo de $|\vec{E}|$ do campo elétrico. Quando invertemos os sinais das cargas sobre as placas (figura acima), o sentido do campo elétrico se inverte e a concavidade da trajetória do elétron, em vez de ser voltada para baixo, passa a ser voltada para cima. Portanto, podemos "guiar" o elétron alterando os valores das cargas das placas. Desse modo, o campo elétrico entre as placas condutoras carregadas podem ser



usados para controlar a trajetória de um feixe de elétrons em um osciloscópio.

51.

$$a_y = \frac{q \cdot E}{m}$$

Como a aceleração é constante, podemos decompor o movimento em duas direções (Independência dos movimentos de Galileu) aplicando-se as equações cinemáticas do movimento uniforme (direção X) e uniformemente variado (direção Y). Decompondo o vetor velocidade na direção horizontal (X) e vertical (Y), as condições iniciais do problema:

$$v_{0x} = v_0 \cdot \cos\theta$$

$$v_{0y} = v_0 \cdot \sin\theta$$

Agora determinando o tempo que a partícula leva para atingir a altura máxima ($v_y = 0$):

$$v_y = v_{0y} - a_y \cdot t \rightarrow$$

$$v_y = 0 = v_0 \cdot \sin\theta - a_y \cdot t,$$

$$t = \frac{v_0 \cdot \sin\theta}{a_y}$$

O tempo total é dado por:

$$t_{TOTAL} = \frac{2 \cdot v_0 \cdot \sin\theta}{a_y}$$

Finalmente, podemos determinar o alcance:

$$A = v_{0x} \cdot t_{TOTAL} \rightarrow$$

$$A = v_0 \cdot \cos\theta \cdot \left(\frac{2 \cdot v_0 \cdot \sin\theta}{a_y} \right).$$

$$A = \frac{v_0^2 \cdot (2 \cdot \sin\theta \cdot \cos\theta)}{a_y}$$

Usando a identidade trigonométrica:

$$\sin(2\theta) = 2 \cdot \sin\theta \cdot \cos\theta$$

Podemos reescrever o alcance da seguinte forma:

$$A = \frac{v_0^2 \cdot \sin(2\theta)}{a_y} = \frac{v_0^2 \cdot \sin(2\theta)}{\frac{q \cdot E}{m}}$$

b) Para determinarmos a altura máxima usamos a equação de Torricelli na direção Y:

$$v_y^2 = v_{0y}^2 - 2 \cdot a_y \cdot \Delta y$$

Na altura máxima a componente vertical da velocidade é nula $v_y = 0$, assim:

$$(0)^2 = (v_0 \cdot \sin\theta)^2 - 2 \cdot a_y \cdot H_{MAX},$$

$$2 \cdot a_y \cdot H_{MAX} = v_0^2 \cdot \sin^2\theta,$$

$$H_{MAX} = \frac{v_0^2 \cdot \sin^2\theta}{2 \cdot a_y},$$

$$H_{MAX} = \frac{v_0^2 \cdot \sin^2\theta}{2 \cdot \frac{q \cdot E}{m}}$$



COMO CAIU NO ITA – IME

1. (Epcar (Afa)) Na Figura 1, a seguir, tem-se uma vista de cima de um movimento circular uniforme descrito por duas partículas, A e B, que percorrem trajetórias semicirculares, de raios R_A e R_B , respectivamente, sobre uma mesa, mantendo-se sempre alinhadas com centro C.

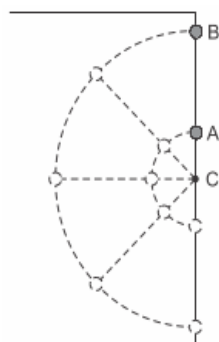


Figura 1

Ao chegarem à borda da mesa, conforme ilustra a Figura 2, as partículas são lançadas horizontalmente e descrevem trajetórias parabólicas, livres de quaisquer forças de resistência, até chegarem ao piso, que é plano e horizontal. Ao longo dessa queda, as partículas A e B percorrem distâncias horizontais, x_A e x_B , respectivamente.

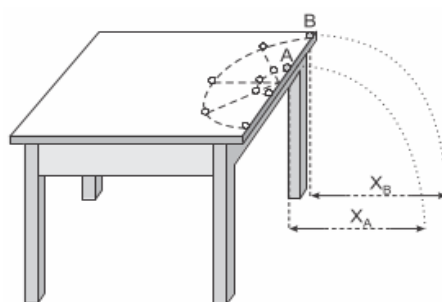
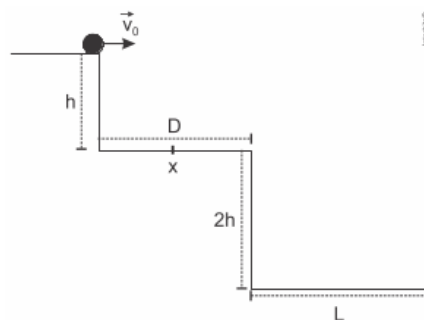


Figura 2

Considerando $R_B = 4R_A$, a razão $\frac{x_B}{x_A}$ será igual a

- a) $\frac{1}{4}$
- b) $\frac{1}{2}$
- c) 2
- d) 4

2. (Espcex (Aman)) Em uma escada, uma esfera é lançada com velocidade horizontal, de módulo V_0 , da extremidade do primeiro degrau de altura h em relação ao segundo degrau. A esfera atinge um ponto X na superfície perfeitamente lisa do segundo degrau, que tem um comprimento D , e, imediatamente, começa a deslizar sem rolar, também com velocidade horizontal V_0 constante, até chegar na extremidade do segundo degrau. Ela, então, percorre uma altura $2h$ na vertical e atinge o solo a uma distância L da base do segundo degrau, conforme representado no desenho abaixo. Podemos afirmar que o intervalo de tempo que a esfera leva, deslizando sem rolar, na superfície lisa do segundo degrau é de:

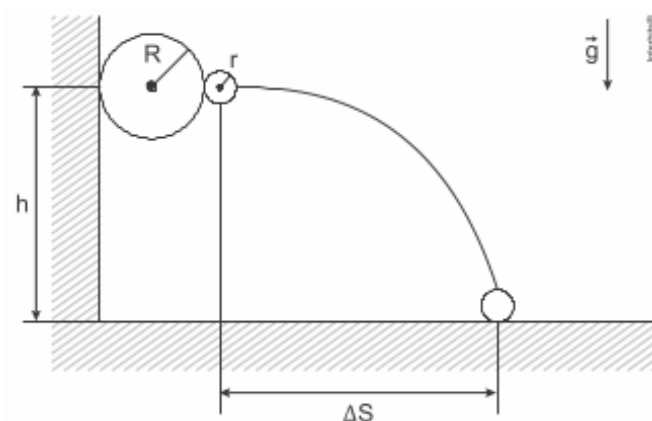


Desenho Ilustrativo - Fora de Escala

Dados: despreze a força de resistência do ar e considere o módulo da aceleração da gravidade igual a g .

- a) $[\sqrt{g} \cdot (D + L) - \sqrt{6h} \cdot V_0] / (V_0 \cdot \sqrt{g})$
- b) $[\sqrt{g} \cdot (D + L) + \sqrt{6h} \cdot V_0] / (V_0 \cdot \sqrt{g})$
- c) $[\sqrt{g} \cdot (D + L) + \sqrt{h} \cdot V_0 \cdot (\sqrt{2} - 2)] / (V_0 \cdot \sqrt{g})$
- d) $[\sqrt{g} \cdot (D + L) - \sqrt{h} \cdot V_0 \cdot (\sqrt{2} + 2)] / (V_0 \cdot \sqrt{g})$
- e) $[\sqrt{h} \cdot V_0 \cdot (\sqrt{2} + 2) - \sqrt{g} \cdot (D + L)] / (V_0 \cdot \sqrt{g})$

3. (Ita) Uma bola de gude de raio r e uma bola de basquete de raio R são lançadas contra uma parede com velocidade horizontal v e com seus centros a uma altura h . A bola de gude e a bola de basquete estão na iminência de contato entre si, assim como ambas contra a parede. Desprezando a duração de todas as colisões e quaisquer perdas de energia, calcule o deslocamento horizontal ΔS da bolinha de gude ao atingir o solo.

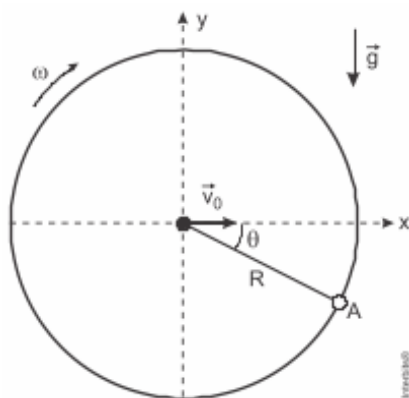


- a) $3v \sqrt{\frac{2(h-2r)}{g}}$
- b) $3v \sqrt{\frac{2(h-r)}{g}}$
- c) $v \sqrt{\frac{2(h-r)}{g}}$
- d) $v \sqrt{\frac{2(h-2r)}{g}}$



e) $3 v \sqrt{\frac{2(h-R-r)}{g}}$

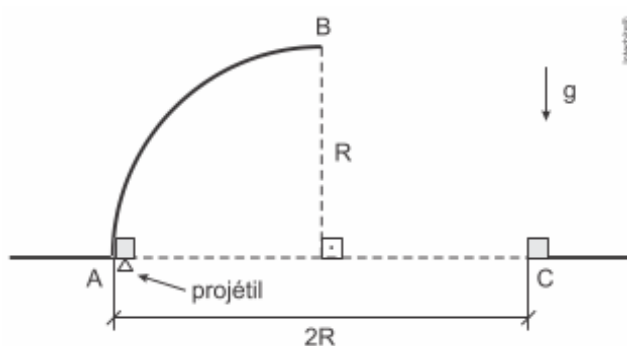
4. (Ita) Na figura, o anel de raio R gira com velocidade angular ω constante e dispõe de um alvo pontual A que cruza o eixo x no mesmo instante em que, do centro do anel, é disparado em sua direção um projétil puntiforme com velocidade v_0 .



Desconsiderando a resistência do ar,

- determine o ângulo θ , em relação ao eixo x , em que o projétil acerta o alvo;
- determine o intervalo de tempo Δt despendido pelo projétil para acertar o alvo;
- a velocidade angular ω é determinada apenas por θ e Δt ? Justifique.

5. (Ime)



Conforme a figura acima, um corpo, cuja velocidade é nula no ponto A da superfície circular de raio R , é atingido por um projétil, que se move verticalmente para cima, e fica alojado no corpo. Ambos passam a deslizar sem atrito na



superfície circular, perdendo o contato com a superfície no ponto B. A seguir, passam a descrever uma trajetória no ar até atingirem o ponto C, indicado na figura. Diante do exposto, a velocidade do projétil é:

Dados:

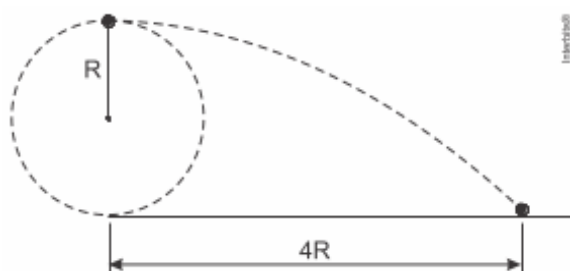
- massa do projétil: m ;
- massa do corpo: $9m$; e
- aceleração da gravidade: g

- a) $10\sqrt{\frac{5Rg}{2}}$
- b) $10\sqrt{\frac{3Rg}{2}}$
- c) $10\sqrt{\frac{5Rg}{3}}$
- d) $10\sqrt{\frac{3Rg}{5}}$
- e) $10\sqrt{\frac{2Rg}{3}}$

6. (Ita) A partir de um mesmo ponto a uma certa altura do solo, uma partícula é lançada sequencialmente em três condições diferentes, mas sempre com a mesma velocidade inicial horizontal v_0 . O primeiro lançamento é feito no vácuo e o segundo, na atmosfera com ar em repouso. O terceiro é feito na atmosfera com ar em movimento cuja velocidade em relação ao solo é igual em módulo, direção e sentido à velocidade v_0 . Para os três lançamentos, designando-se respectivamente de t_1 , t_2 e t_3 os tempos de queda da partícula e de v_1 , v_2 e v_3 os módulos de suas respectivas velocidades ao atingir o solo, assinale a alternativa correta.

- a) $t_1 < t_3 < t_2$; $v_1 > v_3 > v_2$
- b) $t_1 < t_2 = t_3$; $v_1 > v_3 > v_2$
- c) $t_1 = t_3 < t_2$; $v_1 = v_3 > v_2$
- d) $t_1 < t_2 < t_3$; $v_1 = v_3 > v_2$
- e) $t_1 < t_2 = t_3$; $v_1 > v_2 = v_3$

7. (Epcar (Afa)) Uma partícula de massa m , presa na extremidade de uma corda ideal, descreve um movimento circular acelerado, de raio R , contido em um plano vertical, conforme figura a seguir.



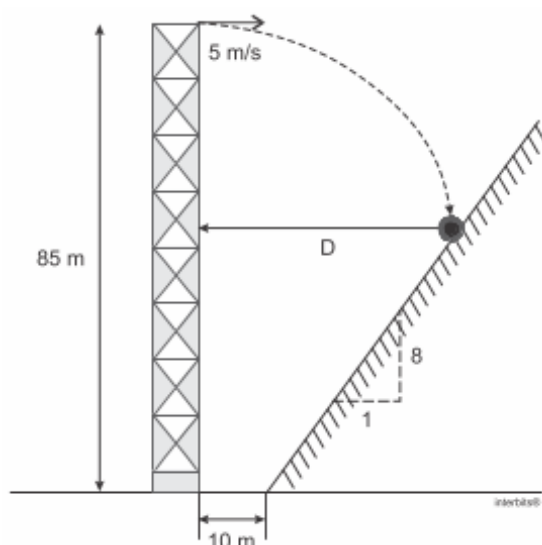


Quando essa partícula atinge determinado valor de velocidade, a corda também atinge um valor máximo de tensão e se rompe. Nesse momento, a partícula é lançada horizontalmente, de uma altura $2R$, indo atingir uma distância horizontal igual a $4R$. Considerando a aceleração da gravidade no local igual a g , a tensão máxima experimentada pela corda foi de

- a) mg
- b) $2mg$
- c) $3mg$
- d) $4mg$

8. (Efomm) Uma bola é lançada do topo de uma torre de 85 m de altura com uma velocidade horizontal de $5,0\text{ m/s}$ (ver figura). A distância horizontal D , em metros, entre a torre e o ponto onde a bola atinge o barranco (plano inclinado), vale

Dado: $g = 10\text{ m/s}^2$



- a) 15
- b) 17
- c) 20
- d) 25
- e) 28

9. (Ime) Um banhista faz o lançamento horizontal de um objeto na velocidade igual a $5\sqrt{3}\text{ m/s}$ em direção a uma piscina. Após tocar a superfície da água, o objeto submerge até o fundo da piscina em velocidade horizontal desprezível. Em seguida, o banhista observa esse objeto em um ângulo de 30° em relação ao horizonte. Admitindo-



se que a altura de observação do banhista e do lançamento do objeto são iguais a $1,80 \text{ m}$ em relação ao nível da água da piscina, a profundidade da piscina, em metros,

Dados:

- índice de refração do ar: $n_{ar} = 1$;

- índice de refração da água: $n_{\text{água}} = \frac{5\sqrt{3}}{6}$

a) 2

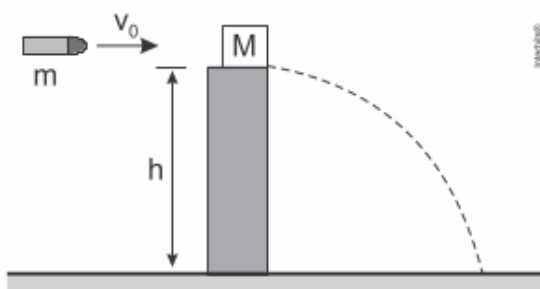
b) 1,6

c) $1,6\sqrt{3}$

d) $2\sqrt{3}$

e) $\sqrt{3}$

10. (Ita) Uma bala de massa m e velocidade v_0 é disparada contra um bloco de massa M , que inicialmente se encontra em repouso na borda de um poste de altura h , conforme mostra a figura. A bala aloja-se no bloco que, devido ao impacto, cai no solo.



Sendo g a aceleração da gravidade, e não havendo atrito e nem resistência de qualquer outra natureza, o módulo da velocidade com que o conjunto atinge o solo vale

a) $\sqrt{\left(\frac{mv_0}{m+M}\right)^2 + 2gh}$

b) $\sqrt{v_0^2 + \frac{2ghm^2}{(m+M)^2}}$

c) $\sqrt{v_0^2 + \frac{2mgh}{M}}$

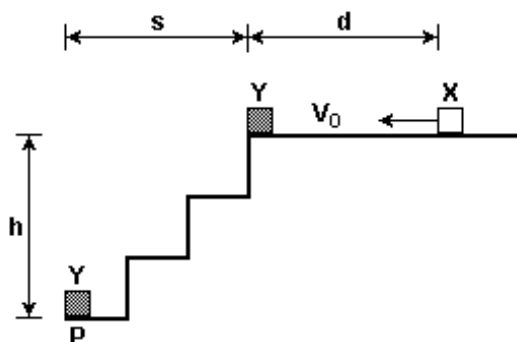
d) $\sqrt{v_0^2 + 2gh}$

e) $\sqrt{\frac{m}{m+M} v_0^2 + 2gh}$

11. (Ita) Animado com velocidade inicial, v_0 , o objeto X, de massa m , desliza sobre um piso horizontal ao longo de uma distância d , ao fim da qual colide com o objeto Y, de mesma massa, que se encontra inicialmente parado na beira de uma escada de altura h . Com o choque, o objeto Y atinge o solo no ponto P. Chamando $\mu(k)$ o coeficiente de



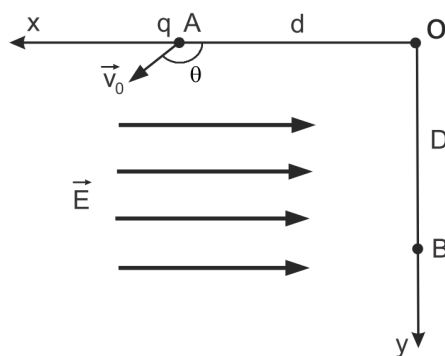
atrito cinético entre o objeto X e o piso, g a aceleração da gravidade e desprezando a resistência do ar, assinale a expressão que dá a distância d .



- a) $d = \frac{1}{2\mu_k g} \left(v_0^2 - \frac{s^2 g}{2h} \right)$
- b) $d = \frac{-1}{2\mu_k g} \left(v_0^2 - \frac{s^2 g}{2h} \right)$
- c) $d = \frac{-v_0}{2\mu_k g} \left(v_0 - s \sqrt{\frac{g}{2h}} \right)$
- d) $d = \frac{1}{2\mu_k g} \left(2v_0^2 - \frac{s^2 g}{2h} \right)$
- e) $d = \frac{-v_0}{\mu_k g} \left(v_0 - s \sqrt{\frac{g}{2h}} \right)$

12. (Espcex (Aman)) O desenho a seguir representa o espaço que foi mapeado com os eixos cartesianos xy com origem no ponto O . Na região, há um campo elétrico uniforme $\vec{E}$ de sentido contrário à orientação do eixo x . Uma carga elétrica puntiforme positiva q , de massa m , é lançada do ponto A , do eixo x , com uma velocidade inicial $\vec{v}_0$ na região em que o campo atua. Ela desloca-se sob ação exclusiva do campo elétrico até chocar-se em um anteparo, no ponto B do eixo y , conforme representado no desenho. Podemos afirmar que o módulo da carga elétrica q é dado por:

Dados: o ângulo entre $\vec{v}_0$ e $\vec{E}$ vale θ ; $\theta > 90^\circ$; $d = OA$ e $D = OB$

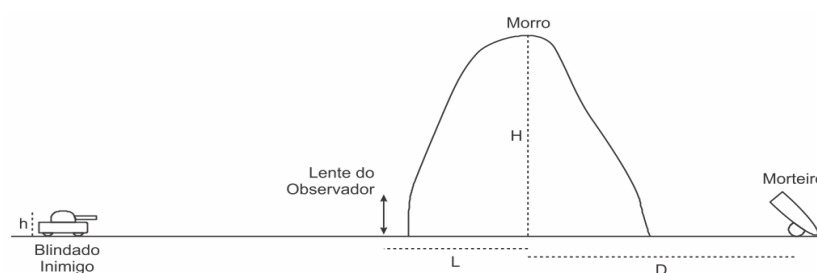


Desenho Ilustrativo - Fora de Escala



- a) $\frac{mv_0^2}{ED} \left(\frac{2D}{d} \sin^2 \theta - \sin \theta \right)$
 b) $\frac{mv_0^2}{ED} \left(\frac{2d}{D} \sin^2 \theta - \sin(2\theta) \right)$
 c) $\frac{mv_0^2}{Ed} \left(\frac{D}{d} \cos \theta + \sin \theta \right)$
 d) $\frac{D}{d} \left(\frac{mv_0^2 \cos \theta}{Ed} + \sin \theta \right)$
 e) $\frac{D}{d} \left(\cos \theta - \frac{mv_0^2 \sin(2\theta)}{ED} \right)$

13. (Ime)



Um sistema automático de defesa contra um determinado tipo de blindado inimigo é instalado próximo a um morro, como mostra a figura. Nesse sistema, um observador comanda o disparo de um morteiro que se encontra escondido atrás desse mesmo morro, com base na imagem do blindado obtida através de uma lente convergente especial. O observador realiza duas medidas do tamanho da imagem do blindado em instantes diferentes e utiliza esses valores para calcular o instante de disparo do morteiro.

Dados:

- distância focal da lente do observador: $f = 50 \text{ m}$;
- altura do morro: $H = 320 \text{ m}$;
- altura do blindado inimigo: $h = 2,7 \text{ m}$;
- distância horizontal entre a lente e o topo do morro: $L = 110 \text{ m}$;
- velocidade de disparo do projétil: $v_0 = 100 \text{ m/s}$;
- intervalo de tempo entre as medidas dos tamanhos das imagens: $\Delta t = 25 \text{ s}$;
- tamanho da primeira medida da imagem invertida: $i_1 = 5,40 \text{ cm}$;
- tamanho da segunda medida da imagem invertida: $i_2 = 6,75 \text{ cm}$;
- aceleração da gravidade: $g = 10 \text{ m/s}^2$.

Observações:

- o blindado e o morteiro estão na mesma horizontal;
- para efeito de cálculo do ponto de impacto do projétil, use o chão como referência.



Sabendo que o blindado se desloca com velocidade constante em direção à lente do observador e que o projétil atirado pelo morteiro atinge seu ponto máximo na trajetória exatamente no pico do morro, determine:

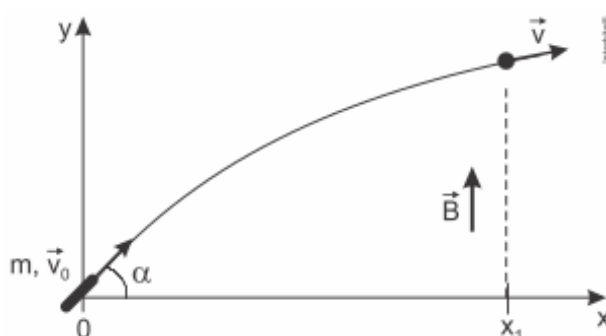
- a que distância horizontal D do pico do morro o morteiro deve ser posicionado;
- as distâncias entre o blindado e a lente nos momentos das duas medidas;
- a velocidade do blindado;
- o intervalo de tempo depois da segunda medida de imagem para que o disparo seja realizado e possa atingir o blindado.

14. (Esc. Naval) Um projétil de peso P é lançado a partir de uma superfície horizontal plana. Considere que durante todo o voo do projétil sopra um vento contrário, na horizontal, aplicando ao projétil uma força horizontal constante de módulo $P/4$. Sabendo-se que não há interferência do vento na direção vertical, de que ângulo com a superfície horizontal o projétil deve ser lançado de modo que a altura máxima alcançada pelo projétil seja igual ao seu alcance ao retornar ao solo?

- $\arctg(2)$
- $\arctg(1)$
- $\arctg\left(\frac{4}{5}\right)$
- $\arctg\left(\frac{2}{3}\right)$
- $\arctg\left(\frac{1}{2}\right)$

15.

(Ime)



Uma partícula de massa m e carga q positiva é lançada obliquamente com velocidade v_0 e ângulo α com a horizontal, conforme a figura. Em certo instante t_1 , antes de alcançar a altura máxima de sua trajetória, quando está a uma distância horizontal x_1 do ponto de lançamento, a partícula é submetida a um campo magnético de intensidade B , na direção vertical. Considerando g a aceleração da gravidade local, a menor intensidade B do campo magnético para que a partícula atinja o solo na posição $(x_1, 0)$ é:

- $\frac{2\pi m}{q\left(\frac{2v_0 \sin(\alpha)}{g} - t_1\right)}$



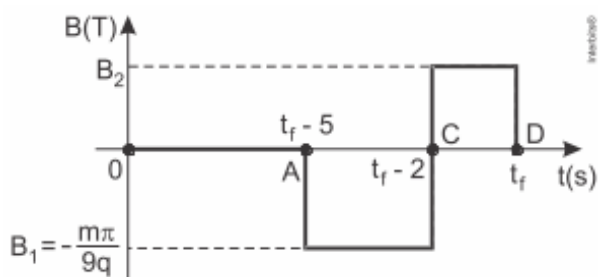
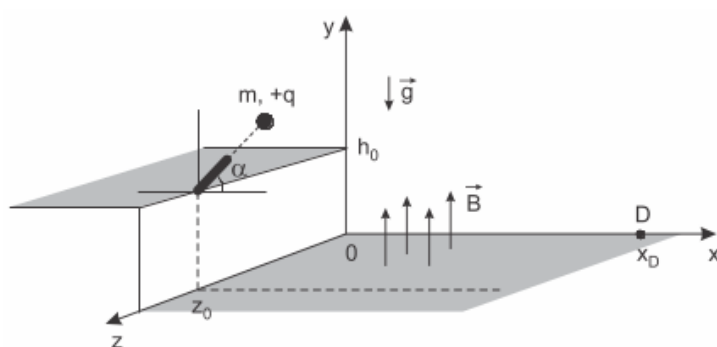
b) $\frac{\pi m}{q \left(\frac{2v_0 \sin(\alpha)}{g} - t_1 \right)}$

c) $\frac{2\pi m}{q \left(\frac{v_0 \sin(\alpha)}{g} - t_1 \right)}$

d) $\frac{4\pi m}{q \left(\frac{2v_0 \sin(\alpha)}{g} - t_1 \right)}$

e) $\frac{\pi m}{q \left(\frac{v_0 \sin(\alpha)}{2g} - t_1 \right)}$

16. (Ime)



Uma partícula de massa m e carga elétrica positiva $+q$ é lançada obliquamente com inclinação α em $t = 0$ no plano $z = z_0$, a uma velocidade inicial v_0 a partir da altura $y = h_0$, conforme ilustra a figura. Em determinado instante de sua trajetória, a partícula é submetida a um campo magnético uniforme $\vec{B} = (0, B, 0)$, cuja intensidade varia ao longo do tempo de acordo com o gráfico. Sabendo que t_f representa o instante em que a partícula encerra seu movimento no ponto D de coordenadas $(x_D, 0, 0)$, ao atingir o plano xz ; que A e C designam as posições da partícula, respectivamente, em $t = t_f - 5s$ e $t = t_f - 2s$; e que a resistência do ar pode ser desprezada, responda o que se pede:

- faça um esboço do gráfico da altura y da partícula *versus* o tempo t , desde seu lançamento até alcançar o ponto D, explicitando a altura máxima alcançada, a do ponto A e a do ponto C, com os correspondentes tempos; e
- determine as coordenadas x_C e z_C do ponto C.



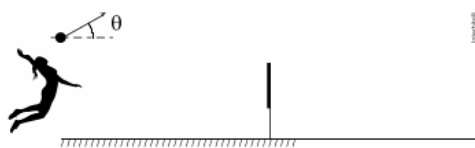
Dados:

- plano de lançamento da partícula $z = z_0 = \frac{225\sqrt{3}}{\pi} \text{ m}$;
- aceleração da gravidade: $g = 10 \text{ m/s}^2$;
- velocidade inicial: $v_0 = 100 \text{ m/s}$;
- ângulo de lançamento da partícula: $\alpha = 30^\circ$;
- altura inicial da partícula: $h_0 = 280 \text{ m}$.

17. (Ita) Por uma mangueira de diâmetro D_1 flui água a uma velocidade de 360 m/min , conectando-se na sua extremidade a 30 outras mangueiras iguais entre si, de diâmetro $D_2 < D_1$. Assinale a relação D_2/D_1 para que os jatos de água na saída das mangueiras tenham alcance horizontal máximo de 40 m .

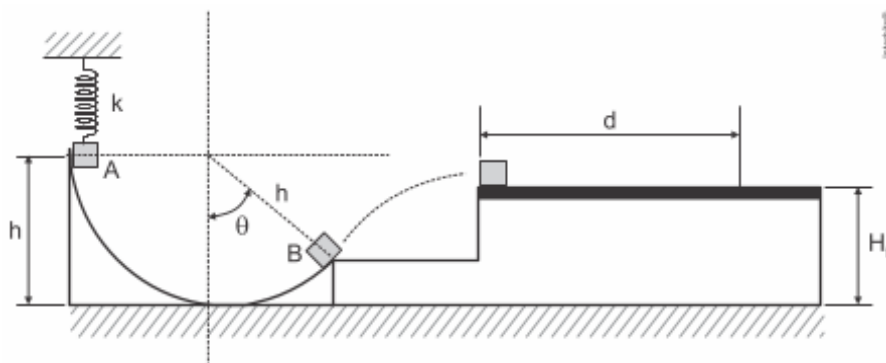
- a) $1/10$.
- b) $\sqrt{3/10}$.
- c) $4/5$.
- d) $1/2$.
- e) $\sqrt{2/3}$.

18. (Ita) Numa quadra de volei de 18 m de comprimento, com rede de $2,24 \text{ m}$ de altura, uma atleta solitária faz um saque com a bola bem em cima da linha de fundo, a $3,0 \text{ m}$ de altura, num ângulo θ de 15° com a horizontal, conforme a figura, com trajetória num plano perpendicular à rede. Desprezando o atrito, pode-se dizer que, com 12 m/s de velocidade inicial, a bola



- a) bate na rede.
- b) passa tangenciando a rede.
- c) passa a rede e cai antes da linha de fundo.
- d) passa a rede e cai na linha de fundo.
- e) passa a rede e cai fora da quadra.

19. (Ime)



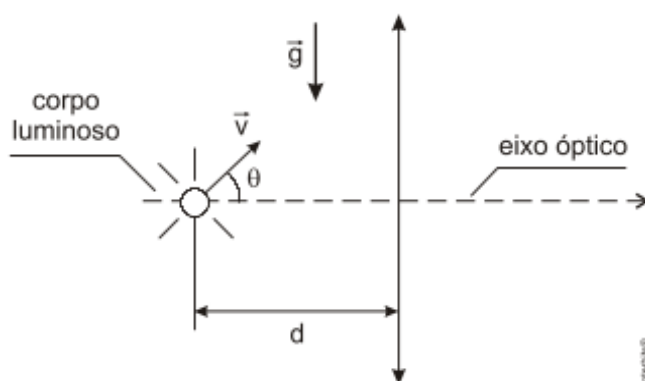
Uma mola comprimida por uma deformação x está em contato com um corpo de massa m , que se encontra inicialmente em repouso no Ponto A da rampa circular. O corpo é liberado e inicia um movimento sem atrito na rampa. Ao atingir o ponto B sob um ângulo θ indicado na figura, o corpo abandona a superfície da rampa. No ponto mais alto da trajetória, entra em contato com uma superfície plana horizontal com coeficiente de atrito cinético μ . Após deslocar-se por uma distância d nesta superfície horizontal, o corpo atinge o repouso. Determine, em função dos parâmetros mencionados:

- a altura final do corpo H_f em relação ao solo;
- a distância d percorrida ao longo da superfície plana horizontal.

Dados:

- aceleração da gravidade: g ;
- constante elástica da mola: k ;
- raio da rampa circular: h .

20. (Ime) Um corpo luminoso encontra-se posicionado sobre o eixo óptico de uma lente esférica convergente de distância focal f , distando d do vértice da lente. Esse corpo se encontra sob a ação da gravidade e é lançado com velocidade V , formando um ângulo θ com a horizontal.





Determine o ângulo de lançamento θ necessário para que a distância entre esse eixo e a imagem do corpo luminoso produzida pela lente varie linearmente com o tempo, até o instante anterior ao de seu retorno ao eixo óptico.

Dados :

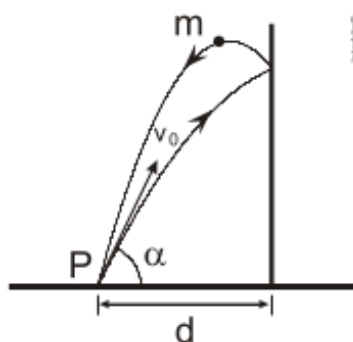
- $g = 10 \frac{m}{s^2}$;

- $v = 4 \frac{m}{s}$;

- $f = 1,2m$;

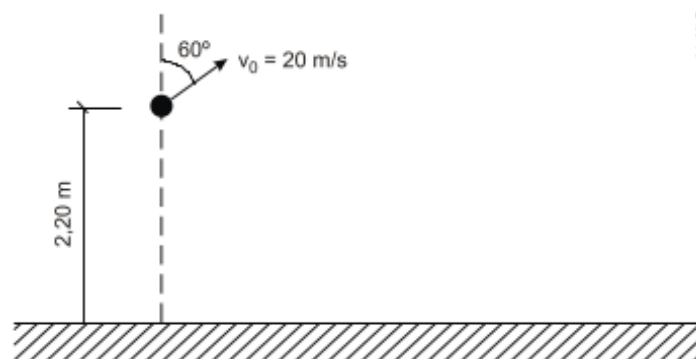
- $d = 2m$.

21. (Ita) Uma pequena bola de massa m é lançada de um ponto P contra uma parede vertical lisa com uma certa velocidade v_0 , numa direção de ângulo α em relação à horizontal. Considere que após a colisão a bola retorna ao seu ponto de lançamento, a uma distância d da parede, como mostra a figura. Nestas condições, o coeficiente de restituição deve ser



- a) $e = gd/(v_0^2 \sin 2\alpha - gd)$.
- b) $e = 2gd/(v_0^2 \cos 2\alpha - 2gd)$,
- c) $e = 3gd/(2v_0^2 \sin 2\alpha - 2gd)$.
- d) $e = 4gd/(v_0^2 \cos 2\alpha - gd)$.
- e) $e = 2gd/(v_0^2 \tan 2\alpha - gd)$.

22. (Ime)

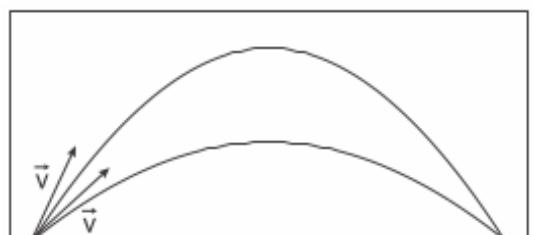


Um corpo de 300 g de massa é lançado de uma altura de 2,20 m em relação ao chão como mostrado na figura acima. O vetor velocidade inicial v_0 tem módulo de 20 m/s e faz um ângulo de 60° com a vertical. O módulo do vetor diferença entre o momento linear no instante do lançamento e o momento linear no instante em que o objeto atinge o solo, em kg.m/s, é:

Dado : aceleração da gravidade: 10 m/s^2 .

- a) 0,60
- b) 1,80
- c) 2,25
- d) 3,00
- e) 6,60

23. (Ita) Um projétil de densidade ρ_p é lançado com um ângulo α em relação à horizontal no interior de um recipiente vazio. A seguir, o recipiente é preenchido com um superfluido de densidade ρ_s e o mesmo projétil é novamente lançado dentro dele, só que sob um ângulo β em relação à horizontal. Observa-se, então, que, para uma velocidade inicial v do projétil, de mesmo módulo que a do experimento anterior, não se altera a distância alcançada pelo projétil (veja figura). Sabendo que são nulas as forças de atrito num superfluido, podemos então afirmar, com relação ao ângulo β de lançamento do projétil, que



- a) $\cos\beta = (1 - \rho_s/\rho_p)\cos\alpha$
- b) $\sin 2\beta = (1 - \rho_s/\rho_p)\sin 2\alpha$
- c) $\sin 2\beta = (1 + \rho_s/\rho_p)\sin 2\alpha$
- d) $\sin 2\beta = \sin 2\alpha(1 + \rho_s/\rho_p)$
- e) $\cos 2\beta = \cos\alpha/(1 + \rho_s/\rho_p)$

Gabarito

Resposta da questão 1:

[D]

Relação entre as velocidades de lançamento:

$$\begin{cases} v_A = \frac{2\pi R_A}{\frac{T}{2}} \\ v_B = \frac{2\pi R_B}{\frac{T}{2}} \end{cases} \Rightarrow \frac{v_A}{v_B} = \frac{R_A}{R_B} = \frac{R_A}{4R_A} \Rightarrow v_B = 4v_A$$

Como o tempo de queda é o mesmo, temos que:

$$\begin{cases} v_A = \frac{x_A}{\Delta t} \\ v_B = \frac{x_B}{\Delta t} \end{cases} \Rightarrow \frac{v_A}{v_B} = \frac{x_A}{x_B} \Rightarrow \frac{v_A}{4v_A} = \frac{x_A}{x_B} \\ \therefore \frac{x_B}{x_A} = 4$$

Resposta da questão 2:

[D]

Tempo de queda do 1º para o 2º degrau:

$$h = \frac{1}{2}gt_1^2 \Rightarrow t_1 = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

Alcance horizontal no 2º degrau:

$$x = v_0 t_1 = v_0 \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

Tempo até a esfera atingir a extremidade do 2º degrau após a sua queda:

$$v_0 = \frac{D - x}{t_2} \Rightarrow t_2 = \frac{D - v_0 \sqrt{\frac{2h}{g}}}{v_0} = \frac{D\sqrt{g} - v_0\sqrt{2h}}{v_0\sqrt{g}}$$

Tempo de queda do 2º para o 3º degrau:

$$2h = \frac{1}{2} g t_3^2 \Rightarrow t_3 = 2 \sqrt{\frac{h}{g}}$$

Alcance horizontal no 3º degrau:

$$L = v_0 t_3 = 2v_0 \sqrt{\frac{h}{g}} \Rightarrow L\sqrt{g} - 2v_0\sqrt{h} = 0$$

Como esta expressão é nula, podemos somá-la ao numerador da equação de t_2 chegando a:

$$t_2 = \frac{D\sqrt{g} - v_0\sqrt{2h} + L\sqrt{g} - 2v_0\sqrt{h}}{v_0\sqrt{g}}$$

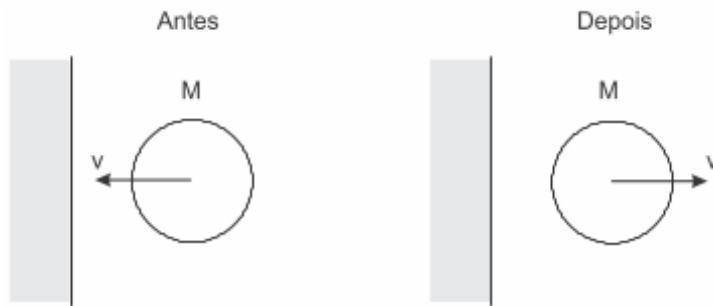
$$\therefore t_2 = \frac{\sqrt{g}(D + L) - v_0\sqrt{h}(\sqrt{2} + 2)}{v_0\sqrt{g}}$$

Resposta da questão 3:

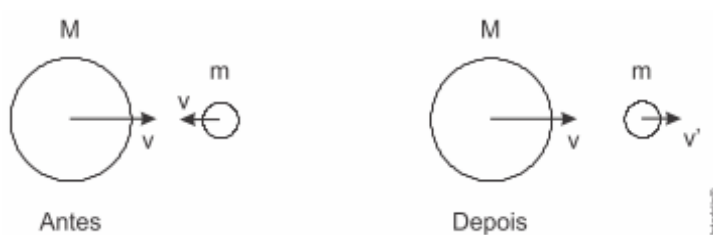
[B]

Temos as situações:

1) Colisão da bola de basquete com a parede:



2) Colisão entre as bolas:



Aplicando a conservação da quantidade de movimento e considerando a colisão elástica, obtemos:

$$\begin{cases} Mv - mv = Mv + mv' \\ v' - v = 2v \end{cases} \Rightarrow v' = \frac{(3M - m)v}{M + m}$$

Tempo para a bolinha de gude sofrer uma queda de uma altura de $h - r$:

$$h - r = \frac{gt^2}{2} \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2(h - r)}{g}}$$

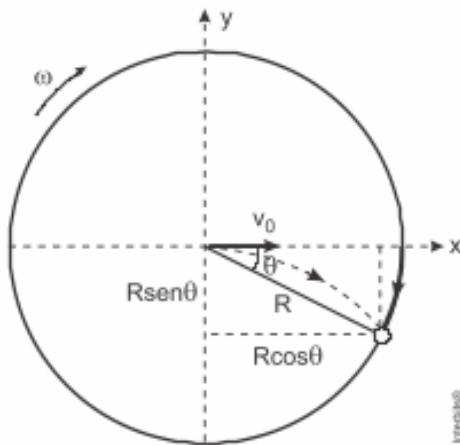
Para $M \gg m$, chegamos a:

$$\Delta s = v't = \frac{(3M - m)v}{M + m} \sqrt{\frac{2(h - r)}{g}}$$

$$\therefore \Delta s = 3v \sqrt{\frac{2(h - r)}{g}}$$

Resposta da questão 4:

a) Do enunciado, temos a situação:



Em y, temos:

$$\Delta y = \frac{1}{2} g \Delta t^2 \Rightarrow \Delta t = \sqrt{\frac{2 \Delta y}{g}}$$

$$\Delta t = \sqrt{\frac{2 R \sin \theta}{g}}$$

Em x, temos:

$$\Delta x = v_0 \Delta t \Rightarrow (R \cos \theta)^2 = \left(v_0 \sqrt{\frac{2 R \sin \theta}{g}} \right)^2$$

$$R^2 (1 - \sin^2 \theta) = v_0^2 \cdot \frac{2 R \sin \theta}{g} \Rightarrow \sin^2 \theta + \frac{2 v_0^2}{g R} \sin \theta - 1 = 0$$

Aplicando a fórmula de Bhaskara, chegamos a:

$$\sin \theta = -\frac{v_0^2}{g R} \pm \frac{\sqrt{v_0^4 + g^2 R^2}}{g R}$$

Devemos ter $\sin \theta > 0$, logo:

$$\therefore \theta = \arcsen \left(\frac{-v_0^2 + \sqrt{v_0^4 + g^2 R^2}}{g R} \right)$$

b) Substituindo o valor de $\sin \theta$ obtida para o tempo, obtemos:

$$\Delta t = \sqrt{\frac{2R}{g} \cdot \left(\frac{-v_0^2 + \sqrt{v_0^4 + g^2 R^2}}{gR} \right)}$$

$$\therefore \Delta t = \sqrt{\frac{2(-v_0^2 + \sqrt{v_0^4 + g^2 R^2})}{g^2}}$$

c) A velocidade angular é dada por:

$$\omega = \frac{\theta + 2k\pi}{\Delta t}, \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Portanto, é necessário também que se conheça o número de voltas dada pelo alvo.

Resposta da questão 5:

[A]

Sendo v a velocidade do projétil e v_A a velocidade do conjunto corpo + projétil após a colisão, por conservação da quantidade de movimento, temos:

$$mv = 10mv_A \Rightarrow v_A = \frac{v}{10}$$

Por conservação de energia, a velocidade do conjunto no ponto B será:

$$E_{m_A} = E_{m_B}$$

$$\frac{10mv_A^2}{2} = 10mgR + \frac{10mv_B^2}{2} \Rightarrow v_B = \sqrt{\frac{v^2}{100} - 2gR}$$

Para o lançamento horizontal, temos:

Em y:

$$R = \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2R}{g}}$$

Em X:

$$R = v_B t = \sqrt{\frac{v^2}{100} - 2gR} \cdot \sqrt{\frac{2R}{g}} \Rightarrow$$

$$R^2 = \frac{2v^2 R}{100g} - 4R^2 \Rightarrow v^2 = 100 \cdot \frac{5gR}{2}$$

$$\therefore v = 10 \sqrt{\frac{5gR}{2}}$$



Resposta da questão 6:

[B]

Como o tempo de queda só depende do movimento vertical, tanto nas situações do ar em repouso como na do ar em movimento, os tempos serão maiores do que t_1 (para o vácuo), pois as partículas sofrerão resistência ao caírem nessas circunstâncias, com $t_2 = t_3$ já que o movimento do ar se dá apenas horizontalmente.

Na primeira situação, o corpo irá adquirir velocidade máxima devido à ausência de resistência causada pelo vácuo. Na segunda situação, o corpo irá sofrer atrito com o ar, tendo sua velocidade minimizada. E na terceira situação, como o ar está em movimento, mas não se opondo à velocidade inicial, a partícula terá velocidade intermediária.

Portanto, teremos que: $t_1 < t_2 = t_3$ e $v_1 > v_3 > v_2$

Resposta da questão 7:

[C]

Cálculo do tempo de queda:

$$h = \frac{g^2}{2} \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2(2R)}{g}} \Rightarrow t = 2\sqrt{\frac{R}{g}}.$$

Após a ruptura da corda, na direção horizontal o movimento é uniforme. A velocidade inicial do lançamento é:

$$D = vt \Rightarrow 4R = v \left(2\sqrt{\frac{R}{g}} \right) \Rightarrow 16R^2 = v^2 4\frac{R}{g} \Rightarrow v^2 = 4Rg.$$

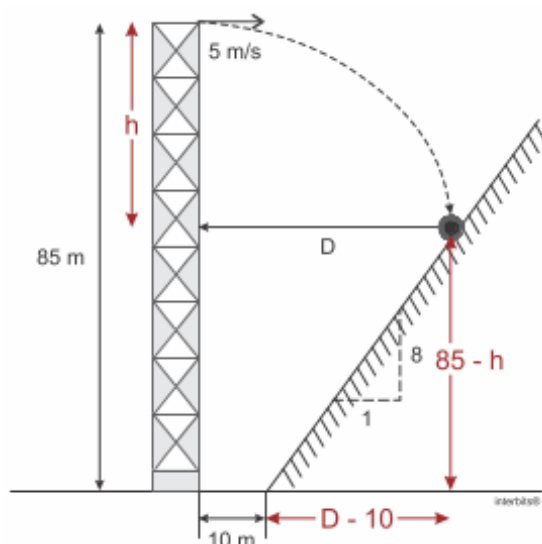
Se a partícula é lançada horizontalmente, a corda se rompe no ponto mais alto. Imediatamente antes da ruptura, a força resultante centrípeta tem intensidade igual à soma das intensidades do peso e da tração.

$$T + P = F_{cent} \Rightarrow T + mg = \frac{mv^2}{R} \Rightarrow T = \frac{m(4Rg)}{R} - mg \Rightarrow T = 3mg.$$

Resposta da questão 8:

[A]

Fazendo algumas definições na figura:



Por semelhança de triângulos, extraímos a primeira relação entre h e D :

$$\frac{85 - h}{D - 10} = \frac{8}{1} \therefore h = 165 - 8D(1)$$

Do lançamento horizontal, tem-se a expressão do alcance D :

$$D = v_x \cdot \sqrt{\frac{2h}{g}} \Rightarrow D = 5 \cdot \sqrt{\frac{2h}{10}} \therefore D = 5 \cdot \sqrt{\frac{h}{5}} \quad (2)$$

Substituindo (1) em (2):

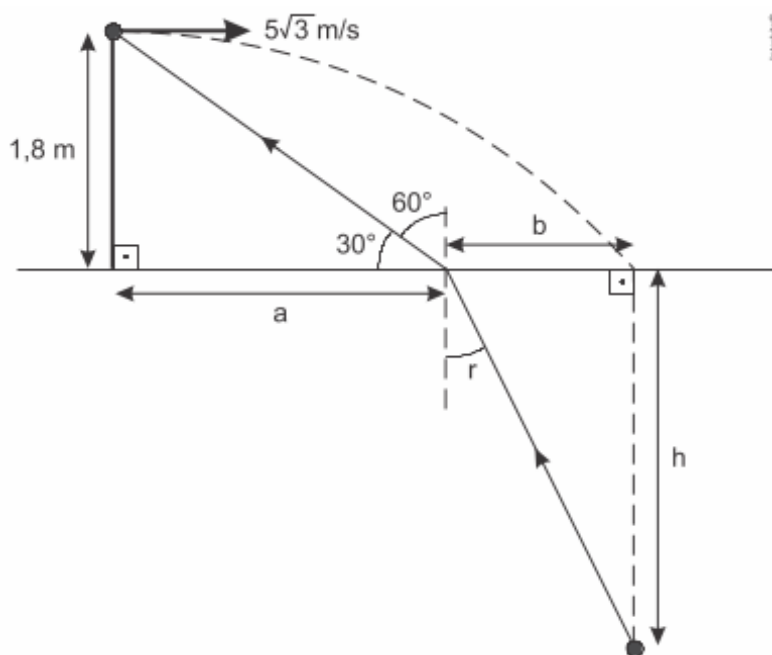
$$\begin{aligned} D &= 5 \cdot \sqrt{\frac{165 - 8D}{5}} \Rightarrow D^2 = 25 \cdot \left(\frac{165 - 8D}{5}\right) \Rightarrow \\ D^2 &= 5 \cdot (165 - 8D) \Rightarrow D^2 + 40D - 825 = 0 \\ D' &= -55 \text{ e } D'' = 15 \end{aligned}$$

Como a distância D é positiva, então $D = 15 \text{ m}$.

Resposta da questão 9:

[C]

Do enunciado, temos o seguinte esquema:



Da figura, temos que:

$$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{1,8}{a} \Rightarrow a = 1,8\sqrt{3}m$$

Tempo de queda até a superfície da água:

$$h = \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 18}{10}} \therefore t = 0,6 \text{ s}$$

Na horizontal, obtemos:

$$a + b = v_x t \Rightarrow 1,8\sqrt{3} + b = 5\sqrt{3} \cdot 0,6 \therefore b = 1,2\sqrt{3}m$$

Aplicando a lei de Snell, vem:

$$n_{ar} \cdot \operatorname{sen} 60^\circ = n_{\text{água}} \cdot \operatorname{sen} r \Rightarrow 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{5\sqrt{3}}{6} \cdot \operatorname{sen} r \Rightarrow \operatorname{sen} r = \frac{3}{5} \therefore \operatorname{tg} r = \frac{3}{4}$$

Logo:

$$\operatorname{tgr} = \frac{b}{h} \Rightarrow \frac{3}{4} = \frac{1,2\sqrt{3}}{h} \therefore h = 1,6\sqrt{3}m$$

Resposta da questão 10:

[A]



Resposta da questão 11:

[A]

Considerando a equação de Torricelli, a 2.a lei de Newton e o conceito de Força de atrito, pode-se mostrar que o bloco X colide com o bloco Y com velocidade igual a:

$$v = \sqrt{v_0^2 - 2\mu g d}, \text{ onde } \mu \text{ é o coeficiente de atrito cinético.}$$

Como o bloco Y possui a mesma massa do bloco X, para uma colisão perfeitamente elástica, aquele será lançado horizontalmente com velocidade inicial v .

Aplicando a equação de queda livre $h = \frac{g \cdot t^2}{2}$ e o deslocamento uniforme $s = v \cdot t$ chega-se a alternativa correta.

Resposta da questão 12:

[B]

Tempo desde o lançamento até o instante em que a carga atinge o ponto B:

$$\begin{aligned} v_y &= \frac{\Delta y}{\Delta t} \\ v_0 \sin(180^\circ - \theta) &= \frac{D}{\Delta t} \\ \Delta t &= \frac{D}{v_0 \sin \theta} \end{aligned}$$

Aceleração na direção x:

$$F_{el} = F_{res} \quad qE = -ma_x \quad a_x = -\frac{qE}{m}$$

Considerando o MUV na direção y, chegamos a:

$$\begin{aligned} x &= x_0 + v_{0x} \Delta t + \frac{a \Delta t^2}{2} \\ 0 &= d + v_0 \cos(180^\circ - \theta) \cdot \frac{D}{v_0 \sin \theta} - \frac{qE}{2m} \left(\frac{D}{v_0 \sin \theta} \right)^2 \\ 0 &= d - v_0 \cos \theta \cdot \frac{D}{v_0 \sin \theta} - \frac{qE}{2m} \cdot \frac{D^2}{v_0^2 \sin^2 \theta} \\ \frac{qED^2}{2mv_0^2 \sin^2 \theta} &= d - \frac{D \cos \theta}{\sin \theta} \\ q &= \frac{2dmv_0^2 \sin^2 \theta}{ED^2} - \frac{2Dmv_0^2 \sin^2 \theta \cos \theta}{ED^2 \sin \theta} \\ q &= \frac{2dmv_0^2 \sin^2 \theta}{ED^2} - \frac{mv_0^2 \cdot 2 \sin \theta \cos \theta}{ED} \\ q &= \frac{2dmv_0^2 \sin^2 \theta}{ED^2} - \frac{mv_0^2 \sin(2\theta)}{ED} \\ q &= \frac{mv_0^2}{ED} \left(\frac{2d \sin^2 \theta}{D} - \sin(2\theta) \right) \end{aligned}$$

Resposta da questão 13:

a) Sendo θ o ângulo de lançamento, temos que:

$$\begin{aligned}v_y^2 &= v_{0y}^2 + 2a\Delta s \\0 &= (v_0 \sin \theta)^2 - 2gH \\v_0 \sin \theta &= \sqrt{2gH} = \sqrt{2 \cdot 10 \cdot 320} \\100 \cdot \sin \theta &= 80 \\\sin \theta &= 0,8 \\\cos \theta &= \sqrt{1 - 0,8^2} = 0,6\end{aligned}$$

E o tempo para que o projétil atinja a altura máxima é dado por:

$$\begin{aligned}v_y &= v_{0y} + at_s \\0 &= v_0 \sin \theta - gt_s \\t_s &= \frac{v_0 \sin \theta}{g} = \frac{80}{10} \\t_s &= 8s\end{aligned}$$

Logo, a distância horizontal D vale:

$$\begin{aligned}D &= v_x t_s = v_0 \cos \theta \cdot t_s \\D &= 100 \cdot 0,6 \cdot 8 \\\therefore D &= 480m\end{aligned}$$

b) Como a lente é convergente e as imagens são menores que o objeto, o seu aumento linear transversal deve ser negativo. Utilizando a equação $A = \frac{i}{o} = \frac{f}{f-p}$, chegamos a:

$$\begin{aligned}-\frac{5,4 \cdot 10^{-2}}{2,7} &= \frac{50}{50 - p_1} \therefore p_1 = 2550 \text{ m} \\-\frac{6,75 \cdot 10^{-2}}{2,7} &= \frac{50}{50 - p_2} \therefore p_2 = 2050 \text{ m}\end{aligned}$$

c) A velocidade do blindado é igual a:

$$\begin{aligned}v &= \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{2550 - 2050}{25} \\\therefore v &= 20m/s\end{aligned}$$

d) Distância entre a lente e o ponto de impacto:

$$\begin{aligned}d &= 2D - (D + L) \\d &= 2 \cdot 480 - (480 + 110) \\d &= 370m\end{aligned}$$

Tempo de voo do projétil:

$$\begin{aligned}t_v &= 2t_s = 2 \cdot 8 \\t_v &= 16s\end{aligned}$$

Sendo assim, o tempo procurado vale:

$$t = \frac{p_2 - d}{v} - t_v$$

$$t = \frac{2050 - 370}{20} - 16$$

$$\therefore t = 68s$$

Resposta da questão 14:

[A]

Sendo v_0 e θ , respectivamente, a velocidade e o ângulo de lançamento, temos:

Tempo de subida do projétil até a sua altura máxima:

$$v_y = v_{0y} + at$$

$$0 = v_0 \sin \theta - gt_s$$

$$t_s = \frac{v_0 \sin \theta}{g}$$

Tempo total até o projétil retornar ao solo:

$$t_t = 2t_s = \frac{2v_0 \sin \theta}{g}$$

Altura máxima atingida pelo projétil:

$$v_y^2 = v_{0y}^2 + 2a\Delta s$$

$$0 = (v_0 \sin \theta)^2 - 2gh$$

$$h = \frac{v_0^2 \sin^2 \theta}{2g}$$

Aceleração horizontal do projétil:

$$F_r = -\frac{P}{4}$$

$$ma = -\frac{mg}{4}$$

$$a = -\frac{g}{4}$$

Alcance horizontal do projétil:

$$\Delta s_x = v_{0x} t_s + a \frac{t_t^2}{2}$$

$$A = v_0 \cos \theta \cdot \frac{2v_0 \sin \theta}{g} - \frac{g}{4} \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{2v_0 \sin \theta}{g} \right)^2$$

$$A = \frac{2v_0^2 \sin \theta \cos \theta}{g} - \frac{g}{8} \cdot \frac{4v_0^2 \sin^2 \theta}{g^2}$$

$$A = \frac{2v_0^2 \sin \theta \cos \theta}{g} - \frac{v_0^2 \sin^2 \theta}{2g}$$

Como $h = A$, chegamos a:

$$\frac{v_0^2 \sin^2 \theta}{2g} = \frac{2v_0^2 \sin \theta \cos \theta}{g} - \frac{v_0^2 \sin^2 \theta}{2g}$$

$$\frac{v_0^2 \sin^2 \theta}{g} = \frac{2v_0^2 \sin \theta \cos \theta}{g}$$

$$\frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \tan \theta = 2$$

$$\therefore \theta = \arctg(2)$$

Resposta da questão 15:

[A]

Tempo até alcançar a altura máxima:

$$v = v_0 + at$$

$$0 = v_0 \sin \alpha - gt$$

$$t = \frac{v_0 \sin \alpha}{g}$$

Tempo total:

$$t_t = 2t = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}$$

Período do MCU descrito pela partícula devido ao campo magnético:

$$T = \frac{2\pi m}{Bq}$$

Logo:

$$t_t = T + t_1$$

$$\frac{2v_0 \sin \alpha}{g} = \frac{2\pi m}{Bq} + t_1$$

$$\therefore B = \frac{2\pi m}{q \left(\frac{2v_0 \sin \alpha}{g} - t_1 \right)}$$



Resposta da questão 16:

a) A trajetória em y não é alterada pelo campo magnético. Portanto:

$$y = h_0 + v_0 \sin \theta t - \frac{gt^2}{2} = 280 + 100 \cdot \frac{1}{2} t - \frac{10t^2}{2}$$

$$y = 280 + 50t - 5t^2$$

Altura máxima:

$$y_{\max} = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{[50^2 - 4 \cdot (-5) \cdot 280]}{4 \cdot (-5)} \Rightarrow y_{\max} = 405 \text{ m}$$

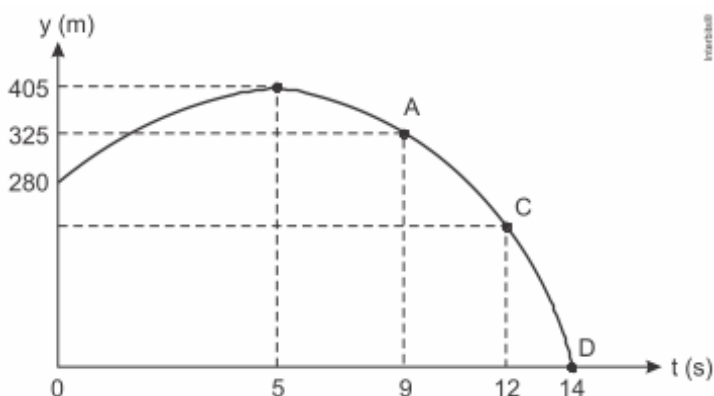
Instante de retorno a $y = 0$:

$$280 + 50t_f - 5t_f^2 = 0 \Rightarrow t_f = 14 \text{ s}$$

Alturas de A e C:

$$y_A = 280 + 50 \cdot 9 - 5 \cdot 9^2 \Rightarrow y_A = 325 \text{ m}$$

$$y_C = 280 + 50 \cdot 12 - 5 \cdot 12^2 \Rightarrow y_C = 160 \text{ m}$$



b) Raio da trajetória da partícula no plano XZ:

$$R = \frac{mv_x}{Bq} = \frac{m \cdot v_0 \cos \alpha}{\frac{m\pi}{9q} \cdot q} = \frac{9v_0 \cos \alpha}{\pi}$$

$$R = \frac{9 \cdot 100}{\pi} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow R = \frac{450\sqrt{3}}{\pi} \text{ m}$$

Período da trajetória:

$$T = \frac{2\pi m}{Bq} = \frac{2\pi m}{\frac{m\pi}{9q} \cdot q} \Rightarrow T = 18 \text{ s}$$



De A até C:

$$\Delta t = 12 \text{ s} - 9 \text{ s} = 3 \text{ s} \left(\Delta t = \frac{T}{6} \right)$$

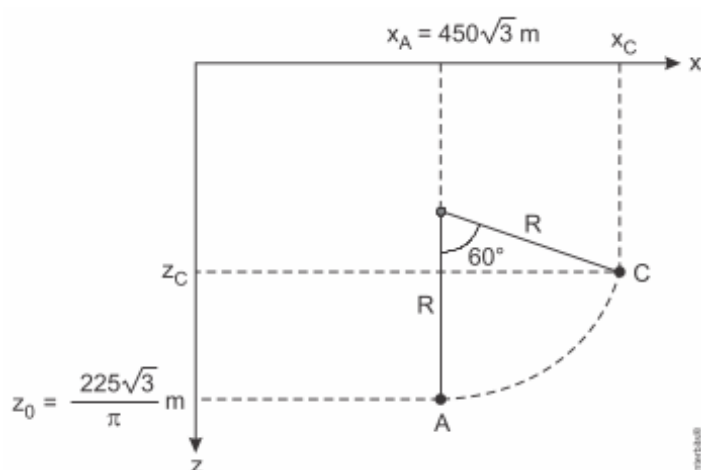
Logo, o ângulo percorrido é de:

$$\theta = \frac{360^\circ}{6} = 60^\circ$$

Coordenada x_A :

$$x_A = v_0 \cos \alpha t_A = 100 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 9 \Rightarrow x_A = 450\sqrt{3} \text{ m}$$

Desenhando a vista de cima, temos:



Sendo assim:

$$\begin{aligned} x_C &= x_A + R \sin 60^\circ = 450\sqrt{3} + \frac{450\sqrt{3}}{\pi} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \therefore x_C &= \frac{225}{\pi} (2\pi\sqrt{3} + 3) \text{ m} \\ z_C &= z_0 - (R - R \cos 60^\circ) = \frac{225\sqrt{3}}{\pi} - \left(\frac{450\sqrt{3}}{\pi} - \frac{450\sqrt{3}}{\pi} \cdot \frac{1}{2} \right) \\ \therefore z_C &= 0 \text{ m} \end{aligned}$$

Resposta da questão 17:

[A]

O valor do alcance é dado por:

$$A = \frac{v_0^2 \sin(2\theta)}{g}$$

Como o alcance é máximo para 40 m. devemos ter:

$$40 = \frac{v_0^2 \cdot 1}{10} \Rightarrow v_0 = 20 \text{ m/s} = 1200 \text{ m/min}$$

Pela equação da continuidade, obtemos:

$$\begin{aligned} A_1 v_1 &= A_2 v_2 \Rightarrow \pi \left(\frac{D_1}{2}\right)^2 \cdot 360 = 30 \cdot \pi \left(\frac{D_2}{2}\right)^2 \cdot 1200 \\ \left(\frac{D_2}{D_1}\right)^2 &= \frac{360}{30 \cdot 1200} = \frac{1}{100} \\ \therefore \frac{D_2}{D_1} &= \frac{1}{10} \end{aligned}$$

Resposta da questão 18:

[C]

Pelas fórmulas de adição de arcos, podemos determinar o seno e o cosseno de 15° .

$$\begin{cases} \sin 15^\circ = \sin(45^\circ - 30^\circ) = \sin 45^\circ \cos 30^\circ - \sin 30^\circ \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin 15^\circ = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \cong 0,26 \\ \cos 15^\circ = \cos(45^\circ - 30^\circ) = \cos 45^\circ \cos 30^\circ + \sin 45^\circ \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} \\ \cos 15^\circ = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \cong 0,97 \end{cases}$$

As componentes horizontal e vertical da velocidade inicial da bola serão:

$$\begin{aligned} v_x &= 12 \cdot \cos 15^\circ \Rightarrow v_x \cong 11,64 \text{ m/s} \\ v_y &= 12 \cdot \sin 15^\circ \Rightarrow v_y \cong 3,12 \text{ m/s} \end{aligned}$$

Em x, do ponto de lançamento à rede, teremos:

$$d_x = v_x t \Rightarrow 9 = 11,64 t \Rightarrow t \cong 0,77 \text{ s}$$

Em y, para o tempo acima, teremos:

$$d_y = d_{y_0} + v_y t + \frac{at^2}{2} \Rightarrow d_y = 3 + 3,12 \cdot 0,77 - \frac{10 \cdot 0,77^2}{2} \Rightarrow d_y = 2,44 \text{ m}$$

Portanto, a bola passa a rede.



Tempo para a bala atingir o solo após o lançamento:

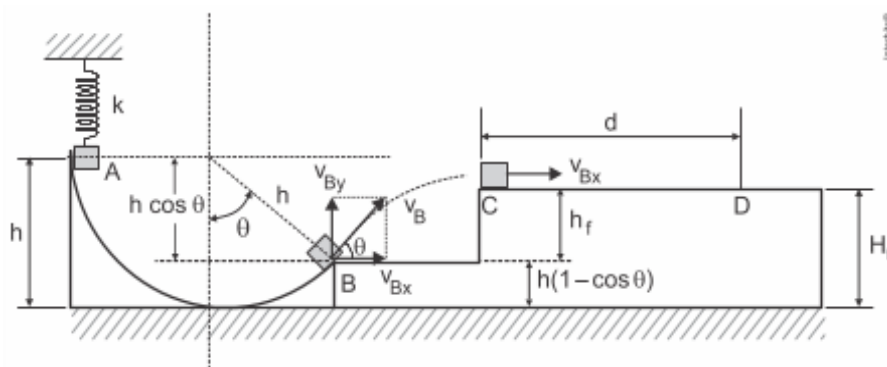
$$t_t = 2 \cdot 0,77 \text{ s} = 1,54 \text{ s}$$

Em x, teremos:

$$d_t = v_x t_t = 11,64 \cdot 1,54 \Rightarrow d_t \cong 17,93 \text{ m}$$

Portanto, a bola cai antes da linha de fundo.

Resposta da questão 19:



$$\text{Na figura : } \begin{cases} v_{Bx} = v_B \cos \theta \\ v_{By} = v_B \sin \theta \end{cases}$$

a) Usando a conservação da energia mecânica entre os pontos A e B, calculamos a velocidade em B:

$$\begin{aligned} E_{mec}^A &= E_{mec}^B \Rightarrow \frac{kx^2}{2} + mgh_A = \frac{mv_B^2}{2} + mgh_B \Rightarrow \\ \frac{kx^2}{2} + mgh &= \frac{mv_B^2}{2} + mg(h - h \cos \theta) \Rightarrow \\ v_B^2 &= \frac{kx^2}{m} + 2gh \cos \theta. \end{aligned}$$

A partir do ponto B, temos um lançamento oblíquo com altura máxima h_f em relação ao ponto de lançamento.

$$\begin{aligned} v_y^2 &= v_{By}^2 - 2gh_f \Rightarrow 0 = (v_B \sin \theta)^2 - 2gh_f \Rightarrow h_f = \frac{v_B^2 \sin^2 \theta}{2g} \Rightarrow \\ h_f &= \left(\frac{kx^2}{m} + 2gh \cos \theta \right) \frac{\sin^2 \theta}{2g} \Rightarrow h_f = \left(\frac{kx^2}{2mg} + h \cos \theta \right) \sin^2 \theta. \end{aligned}$$



Da figura:

$$H_f = h_f + h(1 - \cos \theta) \Rightarrow H_f = \left(\frac{kx^2}{2mg} + h \cos \theta \right) \sin^2 \theta + h(1 - \cos \theta)$$

$$H_f = \frac{kx^2}{2mg} \sin^2 \theta + h \cos \theta \sin^2 \theta + h(1 - \cos \theta) \Rightarrow$$

$$H_f = \frac{kx^2}{2mg} \sin^2 \theta + h[\cos \theta (1 - \cos^2 \theta) + 1 - \cos \theta] \Rightarrow$$

$$H_f = \frac{kx^2 \sin^2 \theta}{2mg} + h(1 - \cos^3 \theta).$$

b) O movimento na superfície plana horizontal tem velocidade inicial $v_C = v_{Bx} = v_B \cos \theta$ e velocidade final $v_D = 0$.

Entre os pontos C e D a força resultante é a força de atrito. Aplicando o teorema da energia cinética entre esses pontos:

$$\begin{aligned} W_{F_{at}} &= E_{\text{cin}}^D - E_{\text{cin}}^C \Rightarrow -F_{at}d = \frac{mv_D^2}{2} - \frac{mv_C^2}{2} \Rightarrow \\ -\mu p g d &= 0 - \frac{p h (v_B \cos \theta)^2}{2} \Rightarrow d = \frac{1}{2\mu g} v_B^2 \cos^2 \theta \Rightarrow \\ d &= \frac{1}{2\mu g} \left(\frac{kx^2}{m} + 2gh \cos \theta \right) \cos^2 \theta \Rightarrow \\ d &= \left(\frac{kx^2}{2\mu m g} + \frac{h \cos \theta}{\mu} \right) \cos^2 \theta \end{aligned}$$

Resposta da questão 20:

Equações de posição do corpo luminoso:

$$\begin{aligned} x &= d - v \cos \theta t = 2 - 4 \cos \theta t \\ y &= v \sin \theta t - \frac{gt^2}{2} = 4 \sin \theta t - 5t^2 \end{aligned}$$

Da equação do aumento, vem:

$$\frac{y'}{y} = \frac{f}{f - x}$$

Mas $y' = \alpha t$, com α constante. Logo:

$$\begin{aligned} \frac{\alpha t}{t(4 \sin \theta - 5t)} &= \frac{1,2}{1,2 - 2 + 4 \cos \theta t} \Rightarrow -0,8\alpha + 4\alpha \cos \theta t = 4,8 \sin \theta - 6t \Rightarrow \\ &\Rightarrow (4\alpha \cos \theta + 6)t - (0,8\alpha + 4,8 \sin \theta) = 0 \end{aligned}$$

Portanto:



$$\begin{cases} 4\alpha\cos\theta + 6 = 0 \Rightarrow \alpha = -\frac{3}{2\cos\theta} \Rightarrow 6\sin\theta = \frac{3}{2\cos\theta} \Rightarrow \\ 0,8\alpha + 4,8\sin\theta = 0 \Rightarrow \alpha = -6\sin\theta \\ \Rightarrow 2\sin\theta\cos\theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin 2\theta = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\therefore \theta = 15^\circ \text{ ou } \theta = 75^\circ$$

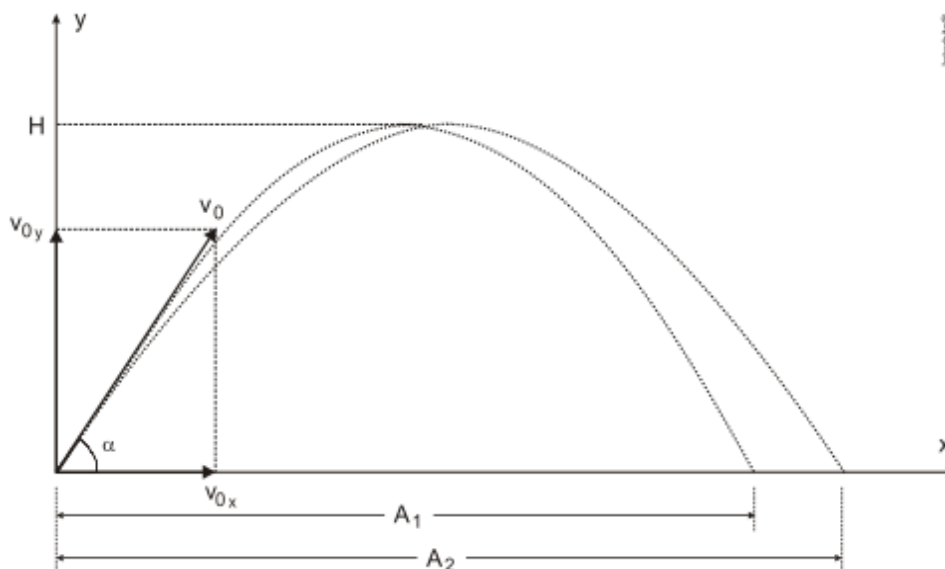
Resposta da questão 21:

[A]

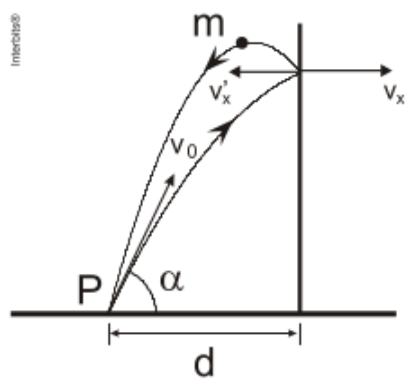
Num lançamento oblíquo sobre superfície plana e horizontal, sendo desprezível a resistência do ar, o tempo total de movimento (t_T) e a altura máxima atingida (H), dependem somente da componente vertical de velocidade ($v_{0y} = v_0 \sin \alpha$). Como se pode demonstrar:

$$\begin{cases} t_T = \frac{2v_{0y}}{g} = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g} \\ H = \frac{v_{0y}^2}{2g} = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g} \end{cases}$$

Numa situação hipotética, se, ao longo do movimento, somente houvesse redução na componente horizontal da velocidade (v_x), seria alterado apenas o alcance horizontal (A), como indicado na figura.



No caso dessa questão, como a parede é lisa, não ocorre alteração na componente vertical da velocidade, portanto o tempo total de movimento é igual ao tempo total que seria gasto se não houvesse o choque. O tempo t_1 do lançamento até o choque é maior que o tempo t_2 do choque ao retorno ao solo, pois o choque ocorre antes do ponto mais alto da trajetória.



$$\left\{ \begin{array}{l} d = v_x t_1 \Rightarrow t_1 = \frac{d}{v_x} \\ d = v'_x t_2 \Rightarrow t_2 = \frac{d}{v'_x} \\ t_1 + t_2 = t_T = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{d}{v_x} + \frac{d}{v'_x} = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g} \Rightarrow \frac{d}{v'_x} = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g} - \frac{d}{v_0 \cos \alpha} \Rightarrow$$

$$\frac{d}{v'_x} = \frac{2v_0^2 \sin \alpha \cos \alpha - gd}{gv_0 \cos \alpha} \Rightarrow \frac{d}{v'_x} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha - gd}{gv_0 \cos \alpha} \Rightarrow v'_x = \frac{dgv_0 \cos \alpha}{v_0^2 \sin 2\alpha - gd}$$

O coeficiente de restituição (e) é definido como:

$$e = \frac{|v_{\text{afast}}|}{|v_{\text{aprox}}|} = \frac{v'_x}{v_x} \Rightarrow e = \frac{\frac{dgv_0 \cos \alpha}{v_0^2 \sin 2\alpha - gd}}{v_0 \cos \alpha} \Rightarrow$$

$$e = \frac{gd}{v_0^2 \sin 2\alpha - gd}.$$

Resposta da questão 22:

[E]

$$\Delta Q = Q_f - Q_i \rightarrow -\Delta Q = Q_i - Q_f$$

$$|-\Delta Q| \neq Q_i - Q_f \quad | = \Delta Q$$

Pelo teorema do impulso, temos:

$$\Delta Q = F \cdot \Delta t$$

$$F = P = m \cdot g$$

$$\Delta Q = F \Delta t \rightarrow \Delta Q = m \cdot g \cdot \Delta t \text{ (eq.1)}$$

Vamos determinar o Δt analisando o lançamento oblíquo, considerando como referencial o chão, ou seja, $s_0 = 2,2 \text{ m}$, $S = 0$ e $V_Y = V_0 \cdot \cos 60^\circ$.

$$\begin{aligned}\Delta S &= V_Y \cdot t + \frac{a \cdot t^2}{2} \rightarrow S - S_0 = V_Y \cdot t + \frac{g \cdot t^2}{2} \rightarrow 0 - 2,2 = V_0 \cdot \cos 60^\circ \cdot t + \frac{10 \cdot t^2}{2} \rightarrow \\ &\rightarrow -2,2 = 20 \cdot 0,5 \cdot t + 5 \cdot t^2 \rightarrow t^2 + 2 \cdot t + 0,44 = 0\end{aligned}$$

Resolvendo a equação de segundo grau, teremos raízes: $t_1 = 2,2 \text{ s}$ e $t_2 = -2,2 \text{ s}$.

Considerando a raiz positiva e substituindo na eq.1, teremos:

$$\Delta Q = mg\Delta t \rightarrow 300 \times 10^{-3} \cdot 10 \cdot 2,2 \rightarrow \Delta Q = 6,60 \text{ kg m/s}$$

Resposta da questão 23:

[B]