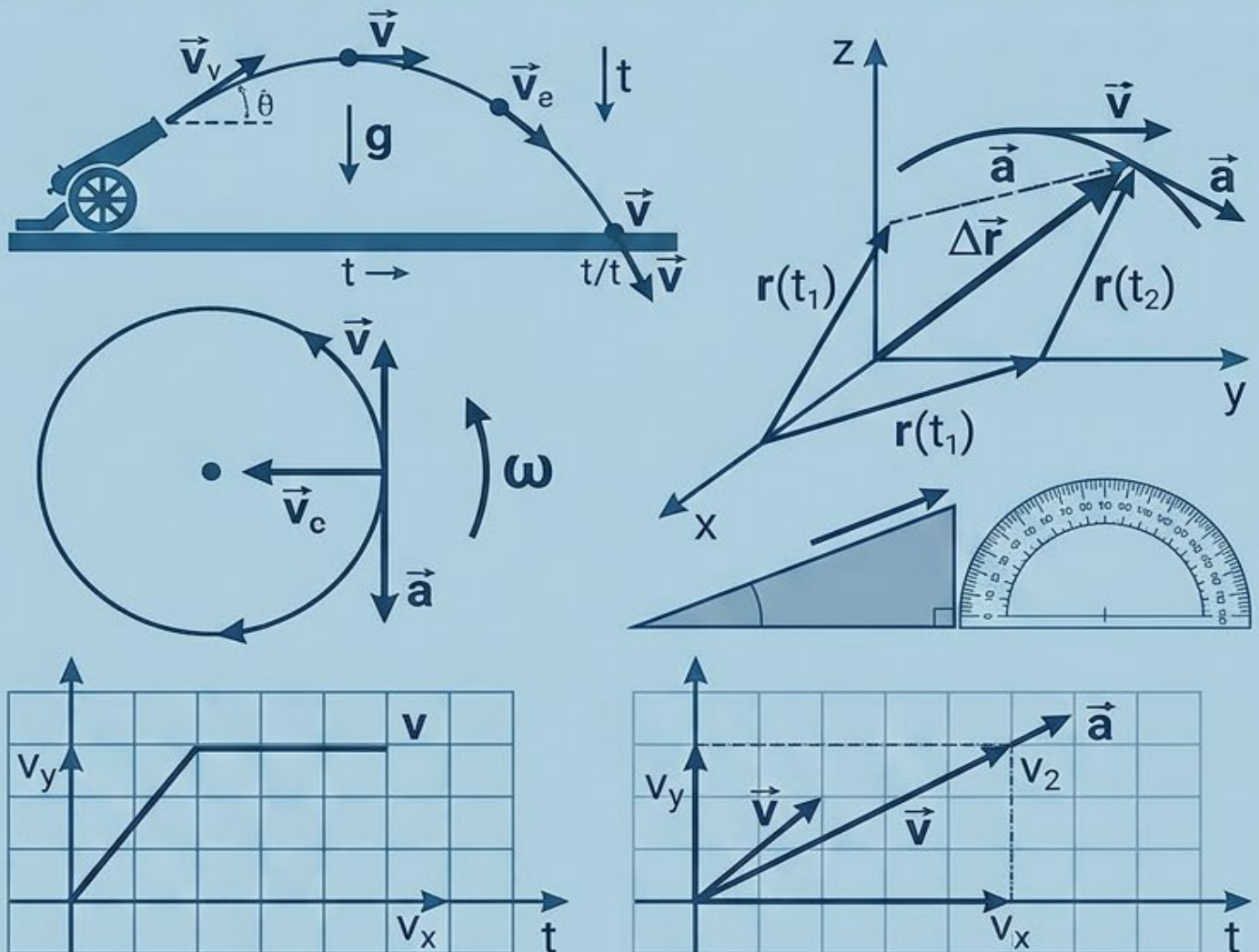


CINEMÁTICA VETORIAL

Apostila de Física para ITA, IME e OBF



PROFESSOR LAERTE PEREIRA

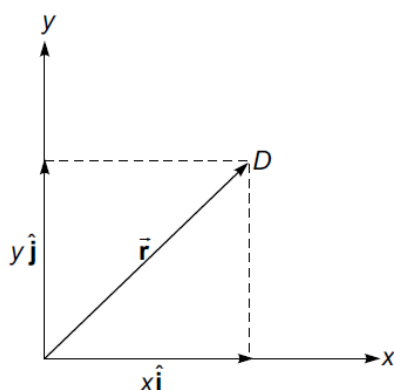


CINEMÁTICA VETORIAL

1. INTRODUÇÃO

No capítulo anterior definimos parâmetros cinemáticos como posição, deslocamento, velocidade e aceleração para objetos que se movem ao longo de uma linha reta. O aspecto direcional desses parâmetros podia ser tratado usando os sinais (+) e (-), mas isso não é possível para objetos em movimento em um plano e em três dimensões. Para compreender o movimento de tais objetos precisamos usar o conhecimento de vetores.

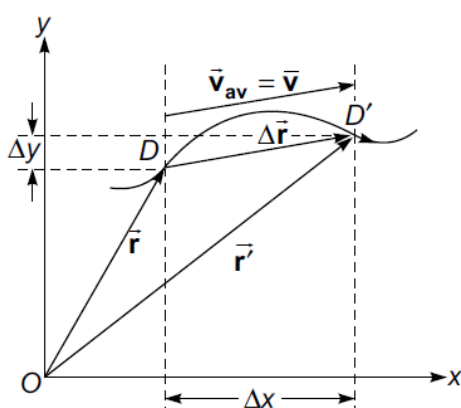
2. VETOR POSIÇÃO E DESLOCAMENTO



O vetor posição $\vec{r}$ de uma partícula P localizada em um plano com referência à origem de um sistema de coordenadas xy é dado por

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} \quad \text{eq(1)}$$

Suponha que uma partícula se mova ao longo da trajetória mostrada na figura.



A partícula está em P no instante t e em P' no instante t' , então o deslocamento é dado por

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}' - \vec{r}$$

$$\Delta\vec{r} = (x'\hat{i} + y'\hat{j}) - (x\hat{i} + y\hat{j})$$

$$\Delta\vec{r} = (x' - x)\hat{i} + (y' - y)\hat{j}$$

ou

$$\Delta\vec{r} = \Delta x\hat{i} + \Delta y\hat{j} \quad \text{eq(2)}$$

3. VELOCIDADE MÉDIA

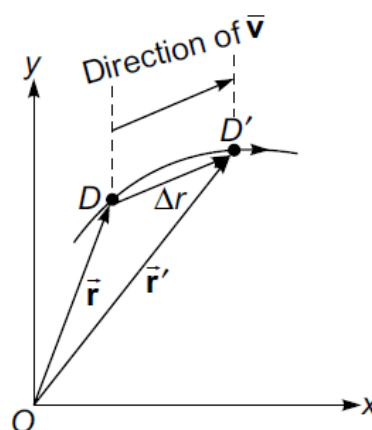
A velocidade média $\vec{v}$ de um objeto pode ser obtida dividindo o deslocamento $\Delta\vec{r}$ pelo correspondente intervalo de tempo Δt . Assim, a velocidade média

$$\vec{v}_m = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$$

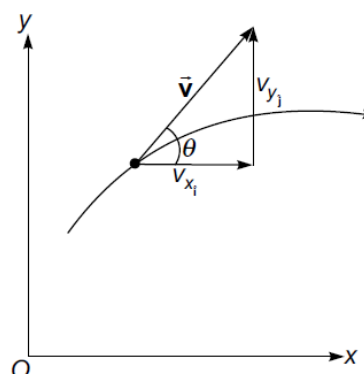
$$\vec{v}_m = \frac{\Delta x\hat{i} + \Delta y\hat{j}}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t}\hat{i} + \frac{\Delta y}{\Delta t}\hat{j}$$

$$\vec{v} = \bar{v}_x\hat{i} + \bar{v}_y\hat{j}$$

Como $\vec{v} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$, a direção da velocidade média é a mesma que a de $\Delta\vec{r}$, veja a figura.



Velocidade instantânea



A velocidade instantânea é dada pelo valor limite da velocidade média quando o intervalo de tempo se aproxima de zero. Assim, a velocidade instantânea



$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

A velocidade $\vec{v}$ pode ser expressa em forma de componentes como:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta x}{\Delta t} \hat{i} + \frac{\Delta y}{\Delta t} \hat{j} \right)$$

ou

$$\vec{v} = \frac{dx}{dt} \hat{i} + \frac{dy}{dt} \hat{j}$$

$$\vec{v} = v_x \hat{i} + v_y \hat{j}$$

A magnitude de $\vec{v}$ é

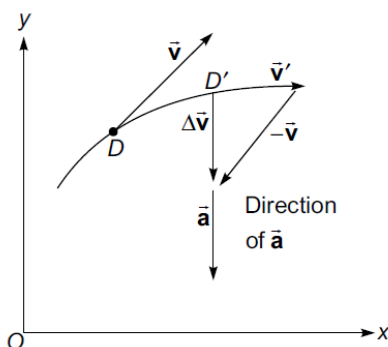
$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

e a direção de $\vec{v}$ é dada pelo ângulo θ .

$$\tan \theta = \frac{v_y}{v_x}$$

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{v_y}{v_x} \right)$$

4. ACELERAÇÃO MÉDIA



A aceleração média $\vec{a}$ de um objeto, para qualquer intervalo de tempo Δt movendo-se no plano xy , é a variação da velocidade dividida pelo intervalo de tempo Δt . Assim, a aceleração média

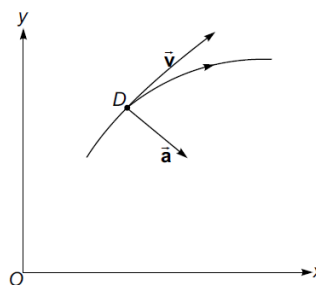
$$\vec{a} = \vec{a}_m = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{\Delta (v_x \hat{i} + v_y \hat{j})}{\Delta t}$$

$$\vec{a}_m = \frac{\Delta v_x}{\Delta t} \hat{i} + \frac{\Delta v_y}{\Delta t} \hat{j}$$

ou

$$\vec{a} = a_x \hat{i} + a_y \hat{j}$$

Aceleração instantânea



É o valor limite da aceleração média quando o intervalo de tempo se aproxima de zero. Assim, a aceleração instantânea

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta v_x}{\Delta t} \hat{i} + \frac{\Delta v_y}{\Delta t} \hat{j} \right)$$

$$\vec{a} = a_x \hat{i} + a_y \hat{j}$$

5. MOVIMENTO NO PLANO COM ACELERAÇÃO CONSTANTE

Suponha que um objeto esteja se movendo no plano xy e sua aceleração $\vec{a}$ seja constante. Seja a velocidade inicial do objeto $\vec{u}$; então, a velocidade em qualquer instante será $\vec{v} = \vec{u} + \vec{a}t$.

Em termos de componentes, podemos escrever:

$$v_x = u_x + a_x t$$

$$v_y = u_y + a_y t \quad \text{eq(1)}$$

De modo semelhante, o deslocamento em qualquer instante t é dado por

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{u}t + \frac{1}{2} \vec{a}t^2$$

Na forma de componentes ou forma (x, y) :

$$x = x_0 + u_x t + \frac{1}{2} a_x t^2$$

e

$$y = y_0 + u_y t + \frac{1}{2} a_y t^2$$

Se x_0 e y_0 são zero, então

$$x = u_x t + \frac{1}{2} a_x t^2$$

$$y = u_y t + \frac{1}{2} a_y t^2 \quad \text{eq(2)}$$



A partir das Equações. (1) e (2), nós também temos, usando o método vetorial

$$\begin{aligned}\vec{v} \cdot \vec{v} &= (\vec{u} + \vec{at}) \cdot (\vec{u} + \vec{at}) \\ &= \vec{u} \cdot \vec{u} + \vec{a} \cdot \vec{ut} + \vec{u} \cdot \vec{at} + \vec{a} \cdot \vec{at}^2 \\ &= \vec{u} \cdot \vec{u} + 2\vec{a} \cdot \left(\vec{ut} + \frac{1}{2}\vec{at}^2\right)\end{aligned}$$

ou

$$\vec{v} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{u} + 2\vec{a} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0)$$

Na forma de componentes, podemos escrever

$$v_x^2 = u_x^2 + 2a_x x$$

$$v_y^2 = u_y^2 + 2a_y y$$

6. Velocidade relativa em duas dimensões

Suponha que dois objetos A e B estejam se movendo com velocidades $\vec{v}_A$ e $\vec{v}_B$ em relação a um observador estacionário (solo). Então, a velocidade de A em relação a B é:

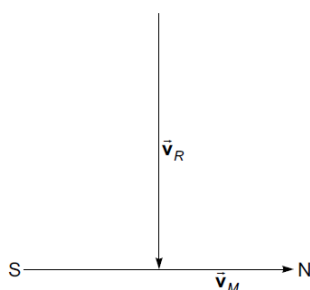
$$\vec{v}_{AB} = \vec{v}_A - \vec{v}_B$$

De modo semelhante, a velocidade de B em relação a A é:

$$\vec{v}_{BA} = \vec{v}_B - \vec{v}_A$$

Chuva e homem

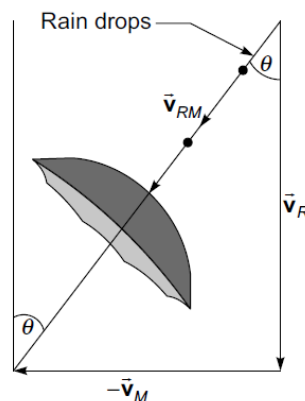
Vamos considerar que está chovendo e um homem está correndo em uma estrada horizontal. O homem percebe a velocidade da chuva relativa a ele mesmo. Para se proteger da chuva, o homem deve segurar seu guarda-chuva na direção da velocidade relativa da chuva em relação ao homem.



Suponha que a velocidade da chuva seja $\vec{v}_R$, dirigida verticalmente para baixo, e que o homem esteja se movendo para o norte com uma velocidade $\vec{v}_M$. Assim, a velocidade da chuva em relação ao homem é

$$\vec{v}_{RM} = \vec{v}_R - \vec{v}_M$$

A Figura mostra a velocidade da chuva em relação ao homem.



Se $\vec{v}_{RM}$ faz um ângulo θ com a vertical, então

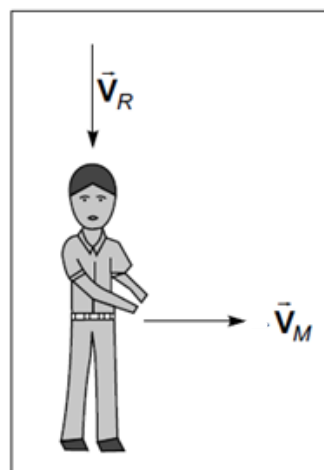
$$\tan \theta = \frac{v_R}{v_M}$$

para o sul da vertical.

Assim, o homem deve segurar seu guarda-chuva formando um ângulo θ com a vertical em direção ao norte (na direção de seu movimento) para se proteger da chuva. A velocidade com que a chuva atinge o guarda-chuva é

$$v_{RM} = \sqrt{v_R^2 + v_M^2}$$

EXEMPLO 1: Um homem está caminhando para o leste com velocidade de 8 m/s. As gotas de chuva estão caindo verticalmente com velocidade de 6 m/s. Qual é a velocidade da chuva em relação ao homem? Qual é o ângulo que ele deve fazer o guarda-chuva com a vertical?



Resolução do prof Laerte: O diagrama vetorial é dado. A direção real da chuva é vertical. Para encontrar a velocidade da chuva em relação ao homem temos que fazer

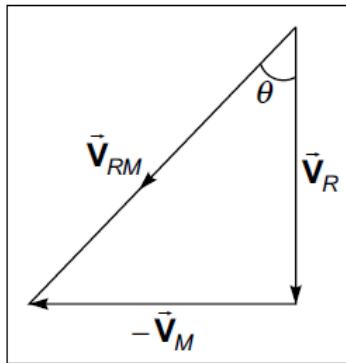


$\vec{V}_R - \vec{V}_M$.
Isto é uma subtração vetorial.

$$V_{RM} = \sqrt{(6)^2 + (8)^2} = \frac{10 \text{ m}}{\text{s}}$$

($\because V_R$ e V_M são a 90°).

O guarda-chuva deve ser mantido ao longo da direção da velocidade relativa.

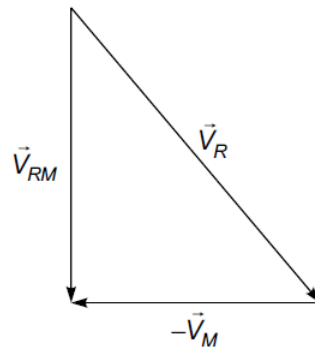
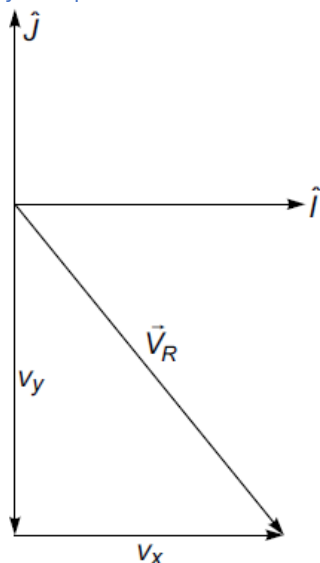


Seja θ o ângulo da velocidade real da chuva com a vertical

$$\therefore \tan \theta = \frac{8}{6}$$

EXEMPLO 2 (IIT Roorkee): Um homem correndo em uma estrada reta com velocidade uniforme $\vec{u} = u\hat{i}$ sente que a chuva está caindo verticalmente para baixo ao longo de $-\hat{j}$. Se ele dobra sua velocidade, ele percebe que a chuva está vindo com um ângulo θ em relação à vertical. Encontre a direção real e a velocidade da chuva em relação ao solo.

Resolução do prof Laerte:



Suponha que a velocidade da chuva seja

$$\vec{V}_R = v_x\hat{i} - v_y\hat{j}$$

e a velocidade do homem

$$\vec{V}_M = u\hat{i}$$

$\therefore$ Velocidade da chuva em relação ao homem

$$\vec{V}_{RM} = \vec{V}_R - \vec{V}_M = (v_x - u)\hat{i} - v_y\hat{j}$$

De acordo com a condição dada de que a chuva parece cair verticalmente, $(v_x - u)$ deve ser zero.

$\therefore$

$$v_x - u = 0$$

ou

$$v_x = u$$

Quando ele dobra sua velocidade, $\vec{V}'_M = 2u\hat{i}$.
Agora

$$\vec{V}_{RM} = \vec{V}_R - \vec{V}'_M = (v_x\hat{i} - v_y\hat{j}) - (2u\hat{i})$$

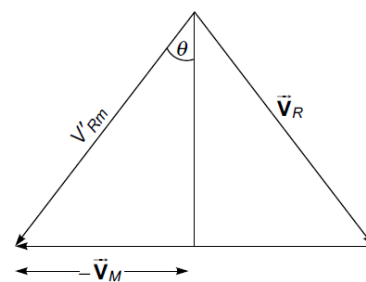
$$\vec{V}_{RM} = (v_x - 2u)\hat{i} - v_y\hat{j}$$

$\vec{V}_{RM}$ faz um ângulo θ com a vertical.

$\therefore$

$$\tan \theta = \frac{x = \text{component of } \vec{V}_{RM}}{y = \text{component of } \vec{V}_{RM}}$$

que fornece



$$= \frac{(v_x - 2u)}{-v_y}$$

$$= \frac{u - 2u}{-v_y}$$

$$= \frac{-v_y}{u}$$

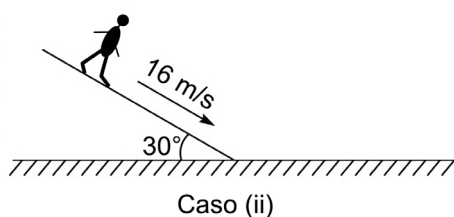
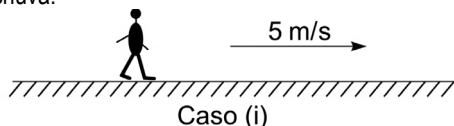
$$v_y = \frac{u}{\tan \theta}$$

$$\vec{V}_R = v_x\hat{i} - v_y\hat{j}$$

$$\vec{V}_R = u\hat{i} - \frac{u}{\tan \theta}\hat{j}$$



EXEMPLO 3: Um homem que se move com velocidade de 5 m/s em uma estrada horizontal observa que as gotas de chuva caem formando um ângulo de 45° com a vertical. Quando ele se move com velocidade de 16 m/s ao longo de um plano inclinado, que está inclinado de 30° em relação à horizontal, ele observa as gotas de chuva caindo verticalmente para baixo, como mostrado na Figura. Determine a velocidade real das gotas de chuva.



Resolução do prof Laerte:

Velocidade da chuva

$$\begin{aligned}\vec{V}_R &= v_x \hat{i} + v_y \hat{j}, \\ \vec{V}_M &= 5 \hat{i} \\ \vec{V}_{RM} &= (v_x - 5) \hat{i} + v_y \hat{j} \\ \frac{v_y}{v_x - 5} &= -\tan 45^\circ \text{ (Dado)} \\ v_y &= -(v_x - 5)\end{aligned}$$

No segundo caso

$$\begin{aligned}\vec{V}'_M &= \frac{16\sqrt{3}}{2} \hat{i} - \frac{16}{2} \hat{j} \\ \vec{V}_{RM} &= (v_x - 8\sqrt{3}) \hat{i} + (v_y + 8) \hat{j}\end{aligned}$$

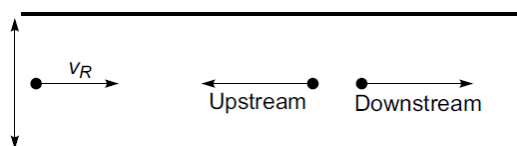
Dado que a resultante $\vec{V}_{RM}$ está na direção vertical.

$$\Rightarrow v_x = 8\sqrt{3}$$

Logo

$$\begin{aligned}v_y &= -(8\sqrt{3} - 5) \\ \Rightarrow \vec{V}_R &= 8\sqrt{3} \hat{i} - (8\sqrt{3} - 5) \hat{j}\end{aligned}$$

Problema de barco em rio



Importante:

O que é "rio abaixo" e "rio acima".

rio abaixo significa: se a direção do movimento do barco é na mesma direção do rio ou da velocidade da correnteza.

rio acima significa: a direção do movimento do barco é na direção oposta à do rio ou ao fluxo da velocidade.

Um rio de largura b está fluindo com velocidade $\vec{v}_R$ e um barqueiro pode conduzir seu barco com uma velocidade $\vec{v}_{BR}$ em relação ao rio. A velocidade do barqueiro em relação ao solo

$$[\vec{v}_B]_{\text{ground}} = [\vec{v}_B]_{\text{river}} + [\vec{v}_{\text{river}}]_{\text{ground}}$$

$$\vec{v}_B = \vec{v}_{BR} + \vec{v}_R$$

(a) A velocidade do barqueiro quando ele conduz o barco rio acima (contra a correnteza)

$$[\vec{v}_B]_{\text{up}} = \vec{v}_{BR} - \vec{v}_R$$

$$[v_B]_{\text{up}} = v_{BR} - v_R$$

Assim, o tempo para percorrer uma distância x contra o fluxo é

$$t = \frac{x}{(v_{BR} - v_R)}.$$

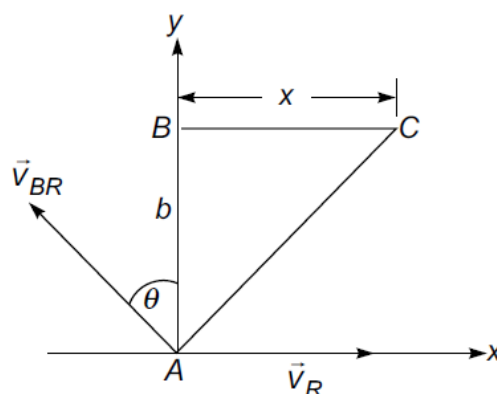
(b) Quando ele conduz o barco rio abaixo, a velocidade do barqueiro

$$[v_B]_{\text{down}} = v_{BR} + v_R$$

Assim, o tempo para percorrer uma distância x no sentido do fluxo é

$$t = \frac{x}{(v_{BR} + v_R)}.$$

Tempo para atravessar o rio



Suponha que o barqueiro conduza o barco com um ângulo θ em relação à linha AB durante todo o seu movimento.

A velocidade do barqueiro ao longo da linha AB



$$\vec{v}_{by} = \vec{v}_{bry} + \vec{v}_{ry}$$

ou

$$v_{by} = v_{br} \cos \theta + 0$$

$$v_{by} = v_{br} \cos \theta$$

E sua velocidade ao longo do fluxo

$$\vec{v}_{bx} = \vec{v}_{brx} + \vec{v}_{rx}$$

ou

$$v_{bx} = -v_{br} \sin \theta + v_r$$

$$v_{bx} = v_r - v_{br} \sin \theta$$

Assim, o tempo para atravessar o rio

$$t = \frac{\text{deslocamento}}{\text{velocidade ao longo do deslocamento}}$$

ou

$$t = \frac{b}{v_{br} \cos \theta}$$

O deslocamento ao longo do fluxo (eixo x) quando ele alcança a outra margem

$x = \text{vel do barco ao longo do fluxo} \times \text{tempo para atravessar o rio}$

$$x = v_{bx} \cdot t$$

$$x = (v_r - v_{br} \sin \theta) \cdot \frac{b}{v_{br} \cos \theta}$$

ou

$$x = b \left(\frac{v_r - v_{br} \sin \theta}{v_{br} \cos \theta} \right)$$

Suponha que ele chegue a um ponto C na outra margem do rio; então seu deslocamento resultante

$$s = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$s = \sqrt{x^2 + b^2}$$

A velocidade do barqueiro em relação ao solo

$$v_b = \sqrt{v_{bx}^2 + v_{by}^2}$$

a) Para atravessar o rio em tempo mínimo:

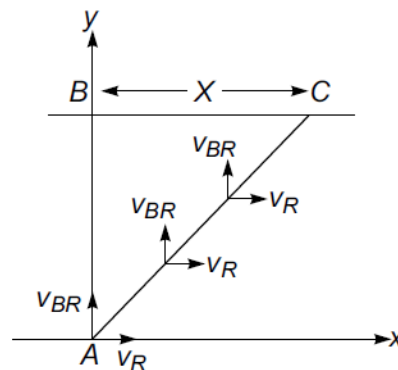
Da equação $t = \frac{b}{v_{br} \cos \theta}$, podemos ver que o tempo para atravessar o rio é mínimo quando $\cos \theta = +1$, ou $\theta = 0^\circ$.

Ou seja, o barqueiro conduz o barco sempre em ângulo reto à direção do fluxo.

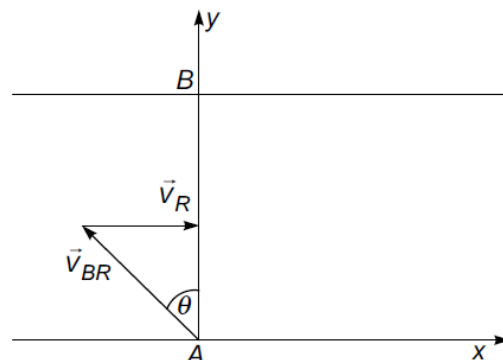
$$\therefore t_{\min} = \frac{b}{v_{br}}$$

Seu deslocamento ao longo do fluxo (deriva):

$$x = v_x \cdot \frac{b}{v_{br}} = b \left(\frac{v_r}{v_{br}} \right)$$



b) Atravessando o rio ao longo do caminho mais curto:

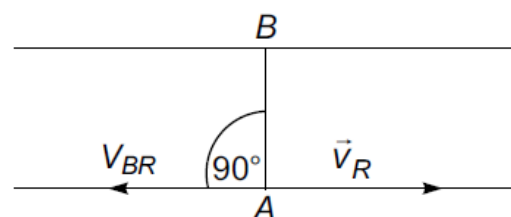


É claro que o caminho mais curto é de A até B. Para isso o desvio $x = 0$

$$(v_r - v_{br} \sin \theta) \cdot \frac{b}{v_{br} \cos \theta} = 0$$

$$\sin \theta = \frac{v_r}{v_{br}}$$

Como $\sin \theta \leq 1$, então, para $v_r \geq v_{br}$, o barqueiro nunca consegue alcançar a margem oposta em B. Para $\sin \theta = 1$; $\theta = 90^\circ$, é impossível alcançar a margem oposta, como fica claro na figura a seguir.





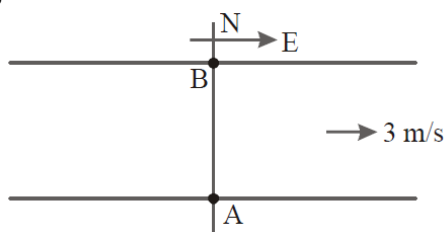
Importante:

Para $v_R \geq v_{BR}$, isso não significa que o barqueiro não alcançará a outra margem. Significa que ele não consegue alcançar o ponto oposto ao ponto de partida. O tempo para atravessar o rio é

$$t = \frac{b}{v_{BR} \cos \theta} = \frac{b}{\sqrt{v_{BR}^2 - v_R^2}}$$

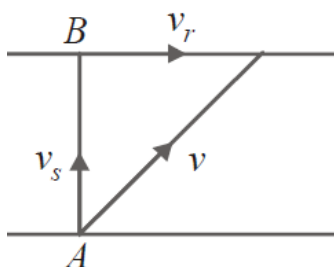
Como $\cos \theta < 1$ para o ângulo possível θ , o tempo para atravessar o rio, nesse caso, é maior que $\frac{b}{v_{BR}}$.

Exemplo 4 (GUPTA - INDIA): Um rio está fluindo exatamente para leste com uma velocidade de 3 m/s. Um nadador consegue nadar em água parada com uma velocidade de 4 m/s, como mostrado na figura dada.



- Se o nadador começar a nadar exatamente para o norte, qual será sua velocidade resultante (magnitude e direção)?
- Se ele quiser partir do ponto A na margem sul e atingir o ponto oposto B na margem norte, então em que direção ele deve nadar? qual será sua velocidade resultante?
- Considerando os dois casos diferentes mencionados em a) e b) acima, em qual deles ele chegará à margem oposta em menor tempo?

Resolução do prof Laerte:



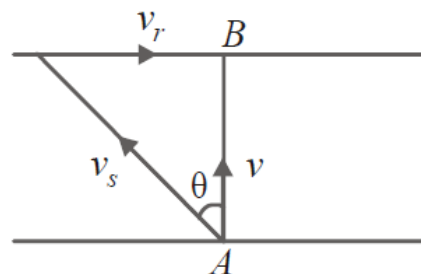
Velocidade do rio (v_r) = 3 m/s (leste)
Velocidade do nadador (v_s) = 4 m/s (norte)

a) Quando o nadador começa a nadar exatamente para o norte, então sua velocidade resultante
Transcrição traduzida do texto e das equações:

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{v_r^2 + v_s^2} \\ v &= \sqrt{(3)^2 + (4)^2} \\ v &= \sqrt{25} = 5 \text{ m/s} \\ \tan \theta &= \frac{v_r}{v_s} = \frac{3}{4} = 0,75 \end{aligned}$$

$$\theta = 36^\circ 54'$$

b) Para alcançar o ponto oposto B, o nadador deve nadar fazendo um ângulo θ em relação ao norte.



Velocidade resultante do nadador

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{v_s^2 - v_r^2} \\ v &= \sqrt{(4)^2 - (3)^2} \\ v &= \sqrt{16 - 9} = \sqrt{7} \text{ m/s} \\ \tan \theta &= \frac{v_r}{v} = \frac{3}{\sqrt{7}} \end{aligned}$$

ou

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{3}{\sqrt{7}} \right) \text{ para o lado norte}$$

(c) No caso (a), o tempo gasto pelo nadador para atravessar o rio

$$t_2 = \frac{b}{v_s} = \frac{b}{4} \text{ s}$$

Em caso (b), o tempo gasto pelo nadador para atravessar o rio

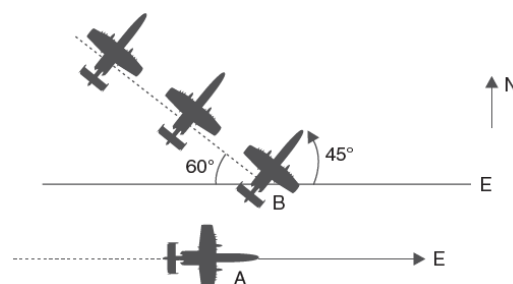
$$t_2 = \frac{b}{\sqrt{7}}$$

Claramente, $t_1 < t_2$.

Portanto, o nadador atravessará o rio em menos tempo no caso (a).

EXERCÍCIOS

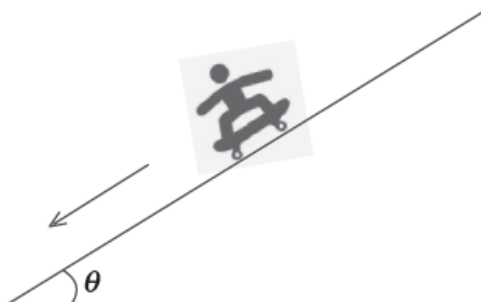
- (INDIA) Avião a jato A está se movendo para leste com velocidade de 900 km/h. Outro avião B está com o nariz apontado para 45° ao norte do leste, mas parece estar se movendo na direção 60° ao norte do oeste para o piloto em A. Determine a velocidade real de B. $\sin 60^\circ = 0,866$; $\sin 75^\circ = 0,966$



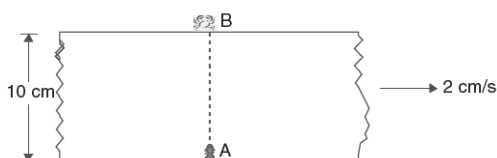
- (INDIA) Um garoto em um skate está deslizando para baixo em um plano inclinado liso, que faz um



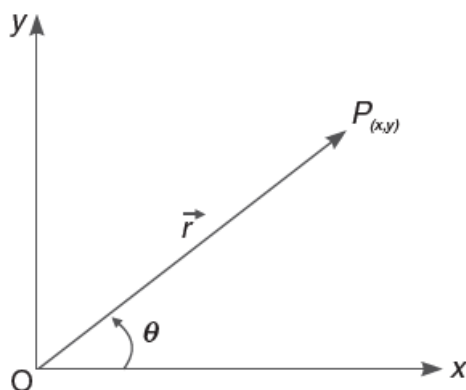
ângulo de inclinação θ . Ele lança uma bola de modo que a pega de volta após um tempo T . Com que velocidade a bola foi lançada pelo garoto em relação a ele mesmo?



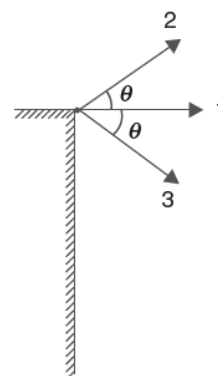
3. (INDIA) Um longo pedaço de papel tem **10 cm** de largura e está se movendo uniformemente ao longo de seu comprimento com uma velocidade de **2 cm/s**. Uma formiga começa a se mover sobre o papel a partir do ponto **A** e se move uniformemente em relação ao papel. Uma aranha estava localizada exatamente oposta à formiga, logo do lado de fora do papel, no ponto **B**, no instante em que a formiga começou a se mover sobre o papel. A aranha, sem se mover, conseguiu pegar a formiga **5 s** depois que ela (a formiga) começou a se mover. Encontre a velocidade da formiga em relação ao papel.



4.(INDIA) Uma partícula tem coordenadas (x, y) . Seu vetor posição faz um ângulo θ com a direção positiva de x . Em um intervalo de tempo infinitesimalmente pequeno, a partícula se move de tal forma que o comprimento de seu vetor posição não muda, mas o ângulo θ aumenta de $d\theta$. Expresse a variação do vetor posição da partícula em termos de x , y , $d\theta$ e dos vetores unitários $\hat{i}$ e $\hat{j}$.

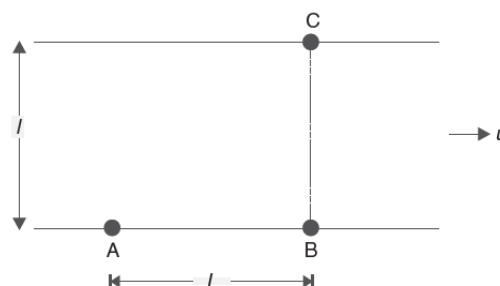


5.(INDIA) Três pedras são lançadas simultaneamente, com a mesma velocidade u , do topo de uma torre. A pedra 1 é lançada horizontalmente e as pedras 2 e 3 são lançadas fazendo um ângulo θ com a horizontal, como mostrado na figura. Antes de a pedra 3 atingir o chão, a distância entre 1 e 2 foi encontrada aumentando a uma taxa constante u .



- Encontre θ .
- Encontre a taxa com que a distância entre 2 e 3 aumenta.

6.(INDIA) Dois amigos **A** e **B** estão parados na margem de um rio, separados por uma distância **L**. Eles decidiram se encontrar em um ponto **C** na outra margem, exatamente em frente a **B**. Ambos começam a remar simultaneamente em barcos que podem viajar com velocidade $V = 5 \text{ km/h}$ em água parada. Verificou-se que ambos chegaram a **C** ao mesmo tempo. Ambos os barcos seguem trajetórias em linha reta. A largura do rio é $l = 3,0 \text{ km}$ e a água escoava com velocidade constante $u = 3,0 \text{ km/h}$.

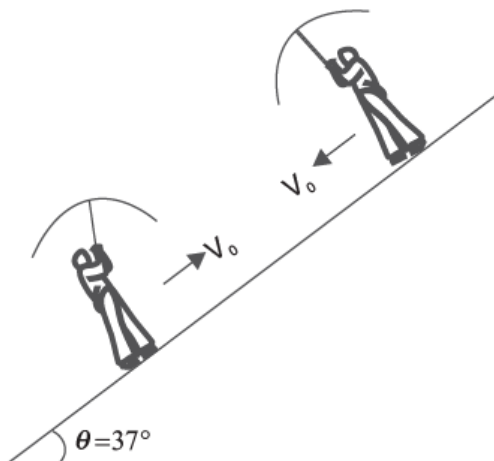


- Em quanto tempo os dois amigos atravessaram o rio?
- Encontre L .

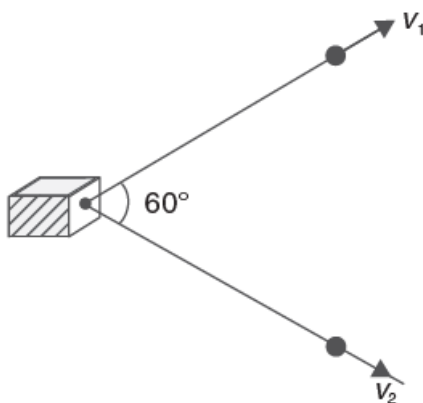
7.(INDIA) Um homem caminhando ladeira abaixo com velocidade V_0 descobre que seu guarda-chuva lhe dá



proteção máxima contra a chuva quando ele o segura de modo que a haste esteja perpendicular à superfície da ladeira. Quando o homem se vira e sobe a ladeira com velocidade V_0 , ele verifica que é mais adequado segurar a haste do guarda-chuva na posição vertical. Determine a velocidade real das gotas de chuva em função de V_0 . A inclinação da ladeira é $\theta = 37^\circ$.



8.(INDIA) Duas pessoas estão puxando um bloco pesado com a ajuda de cordas horizontais inextensíveis. No instante mostrado, as velocidades das duas pessoas são v_1 e v_2 , dirigidas ao longo das respectivas cordas, sendo que as cordas fazem entre si um ângulo de 60° .



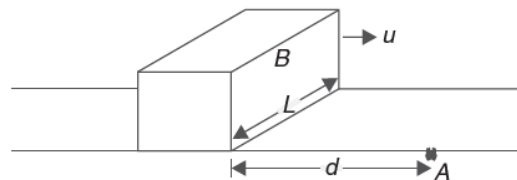
a) Determine a velocidade (módulo) do bloco no instante mostrado.

b) Para qual razão entre v_1 e v_2 a velocidade instantânea do bloco estará ao longo da direção de v_1 ?

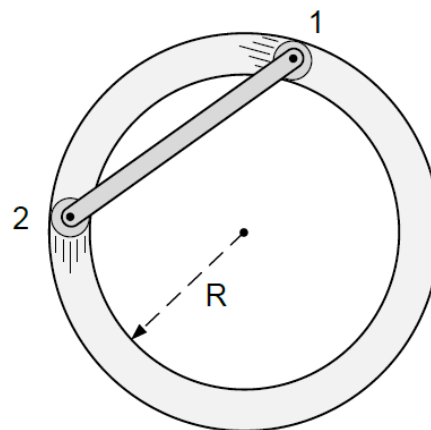
9. (INDIA) Um bloco pesado "B" está deslizando com velocidade constante u sobre uma mesa horizontal. A largura do bloco é L . Há um inseto A a uma distância d do bloco, como mostrado na figura. O inseto quer atravessar para o lado oposto da mesa.

Ele começa a se mover com velocidade constante v no instante mostrado na figura.

Determine o menor valor de v para o qual o inseto consegue atravessar para o outro lado sem ser atingido pelo bloco.



10.(PERU) A barra de comprimento $R/2$ está articulada aos centros das contas (1) e (2), que se movem com rapidez constante v ao longo do trilho em forma de circunferência. Determine a rapidez com que a conta (1) se move em relação à conta (2).



A) $2v$

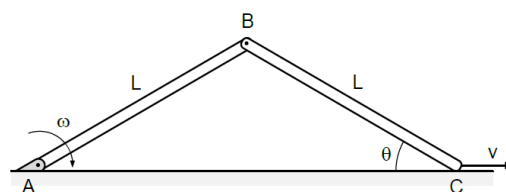
B) $\sqrt{2}v$

C) $4v$

D) v

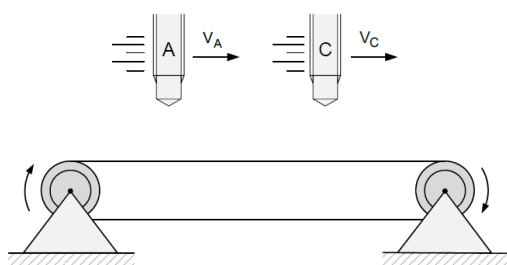
E) $\left(\frac{v}{2}\right)$

11. (PERU) Têm-se duas hastes idênticas de 2 m de comprimento. Se AB gira com uma rapidez angular constante $\omega = 0,1 \text{ rad/s}$, determine a rapidez da extremidade C quando $\theta = 37^\circ$.



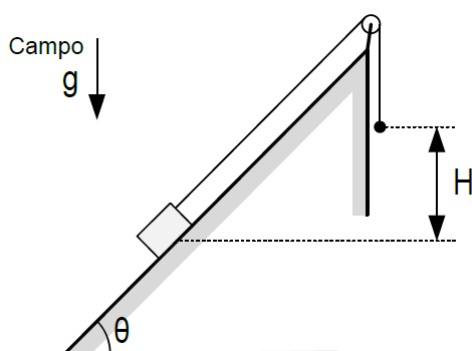


12. (PERU) A figura mostra uma cinta transportadora que translada com rapidez constante V . Acima da cinta estão dois dispositivos: o dispositivo A, que despeja n esferas por unidade de tempo, e um contador C, munido com uma fotocélula, que registra as esferas que passam por debaixo dele. Se a rapidez do dispositivo A e do contador C são constantes e menores que V , quantas esferas por unidade de tempo são registradas pelo contador?



- a) $n \left(\frac{V+V_A}{V-V_C} \right)$.
- b) $n \left(\frac{V-V_C}{V-V_A} \right)$.
- c) $n \left[\frac{V-(V_A+V_C)}{V} \right]$.
- d) $n \left(\frac{V-V_A}{V-V_C} \right)$.
- e) $n \left(\frac{V}{V_A+V_C} \right)$.

13. (PERU) No instante mostrado o sistema é abandonado de tal maneira que a esfera desce. Determine a mínima distância de separação entre o bloco e a esfera.



Segue a transcrição em português, com o texto e as equações exatamente como aparecem:

- a) $\frac{H \sec \theta}{2}$.
- b) $\frac{H \cos \theta}{2}$.

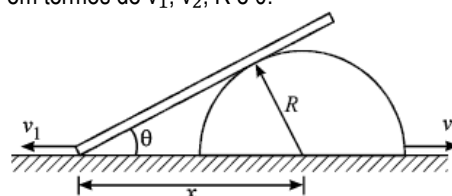
c) $\frac{H \sin(45^\circ - \theta)}{\sin(2\theta)}$.

d) $H \tan(2\theta)$.

e) $\frac{H \cot \theta}{1 + \sin \theta}$.

14. Depois de 2 h de haver cruzado com algumas jangadas que flutuavam arrastadas pelo rio, uma lancha a motor decide retornar rio abaixo. Em quanto tempo o barco alcançará as jangadas?

15. A figura mostra um hemisfério e uma haste apoiada. O hemisfério está se movendo para a direita com uma velocidade uniforme v_2 e a extremidade da haste que está em contato com o solo está se movendo na direção esquerda com uma velocidade v_1 . Encontre a taxa na qual o ângulo θ está variando em termos de v_1 , v_2 , R e θ .



16. Uma aeronave está descendo para pousar em um aeroporto na manhã. A aeronave está aterrissando para o leste, de modo que o piloto tem o sol em seus olhos. A aeronave tem uma velocidade v e está descendo a um ângulo α com a horizontal, e o sol está em um ângulo β acima do horizonte. Encontre a velocidade com que a sombra da aeronave se move sobre a terra.

17. (ITA) Um nadador, que pode desenvolver uma velocidade de $0,900 \text{ m/s}$ na água parada, atravessa o rio de largura D metros, cuja correnteza tem velocidade de $1,08 \text{ km/h}$. Nadando em linha reta ele quer alcançar um ponto da outra margem situada $\frac{\sqrt{3}}{3} D$ metros abaixo do ponto de partida. Para que isso ocorra, sua velocidade em relação ao rio deve formar com a correnteza o ângulo:

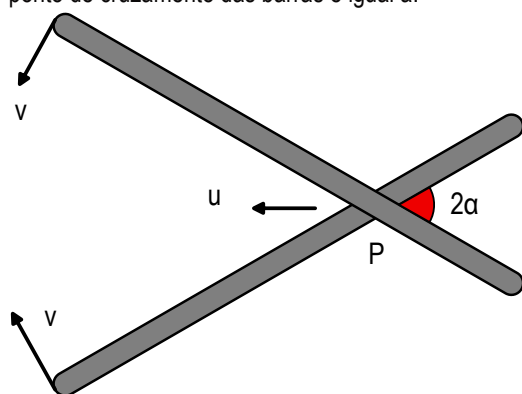
- a) $\arcsen \frac{\sqrt{3}}{12} (\sqrt{33} + 1)$.
- b) $\arcsen \frac{\sqrt{3}}{2}$.
- c) zero grau.
- d) $\arcsen \frac{\sqrt{3}}{12}$.
- e) o problema não tem solução.

18. (H.Moysés) Um trem viaja para o norte a 120 km/h . A fumaça da locomotiva forma uma trilha que se estende numa direção 14° ao E (leste) da direção sul,



com o vento soprando do Oeste. Qual é a velocidade do vento (da fumaça)?

19. Duas barras se cruzam formando entre si um ângulo 2α e se movem com velocidades iguais a v e perpendicularmente a si mesmas. A velocidade do ponto de cruzamento das barras é igual a:

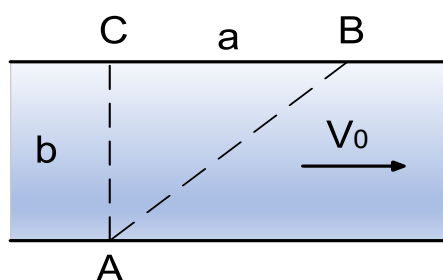


- a) $v \cdot \sin 2\alpha$
- b) $v / \sin 2\alpha$
- c) $v \cdot \cos 2\alpha$
- d) $v / \cos \alpha$
- e) $v / \sin \alpha$

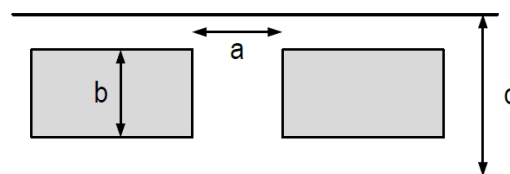
20. Um barco a motor, que ia subindo um rio, encontrou uma balsa que se movia no sentido da correnteza. Após uma hora do encontro, o motor do barco parou. O conserto do motor durou 30 min e durante esse tempo o barco moveu-se livremente no sentido da corrente. Depois do conserto, o barco começou a se mover na direção da corrente, seguindo rio abaixo com a mesma velocidade relativa à água e encontrou a balsa a uma distância de 7,5 km em relação ao primeiro encontro. Determine a velocidade da correnteza.

- a) 5 km/h
- b) 4 km/h
- c) 3 km/h
- d) 2 km/h
- e) 6 km/h

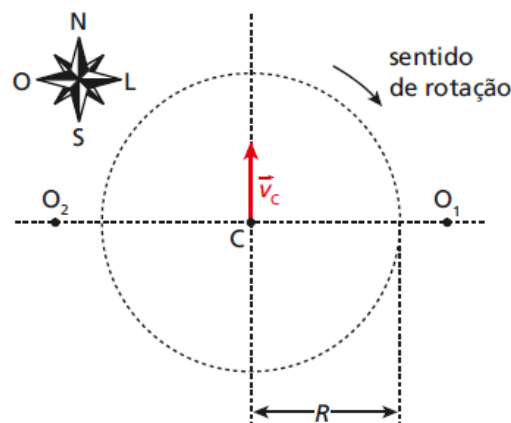
21. Um homem em uma lancha deve sair do ponto A e chegar ao ponto B, que se encontra na margem oposta do rio. A distância BC é igual a a . A largura do rio AC é igual a b . Com que velocidade mínima u , relativa à água, deve se mover a lancha para chegar ao ponto B? A velocidade da correnteza é V_0 .



22. Numa avenida retilínea de largura e , trafegam carros com velocidade constante v . A largura dos carros vale b e a distância livre entre dois carros consecutivos sempre vale a . Um pedestre, movendo-se em trajetória retilínea, deseja atravessar essa avenida com a menor velocidade constante possível, sem ser atropelado. Qual a menor velocidade possível para essa travessia?



23. O olho C de um furacão desloca-se em linha reta com velocidade de intensidade $v_C = 150$ km/h em relação à Terra na direção Sul-Norte, dirigindo-se para o Norte. A massa de nuvens desse ciclone tropical, contida em um plano horizontal paralelo ao solo, realiza uma rotação uniforme no sentido horário em torno de C abrangendo uma região praticamente circular de raio R igual a 100 km, conforme ilustra a figura, em que O_1 e O_2 são dois observadores em repouso em relação à superfície terrestre.



Sabendo que a velocidade angular da massa de nuvens é constante e igual a $0,50$ rad/h, responda:

- a) Qual a intensidade da velocidade dos ventos medida por O_1 ?
- b) Qual a intensidade da velocidade dos ventos medida por O_2 ?
- c) De que lado (Leste ou Oeste) o furacão tem maior poder de destruição?

24. Um trem dotado de janelas laterais retangulares de dimensões 80 cm (base) x 60 cm (altura) viaja ao longo de uma ferrovia retilínea e horizontal com velocidade constante de intensidade 40 km/h. Ao mesmo tempo, cai uma chuva vertical (chuva sem vento), de modo que as gotas apresentam, em relação ao solo, velocidade constante de intensidade v . Sabendo que o trajeto das gotas de chuva observado



das janelas laterais do trem tem a direção da diagonal dessas janelas, determine:

- o valor de v ;
- a intensidade da velocidade das gotas de chuva em relação a um observador no trem.

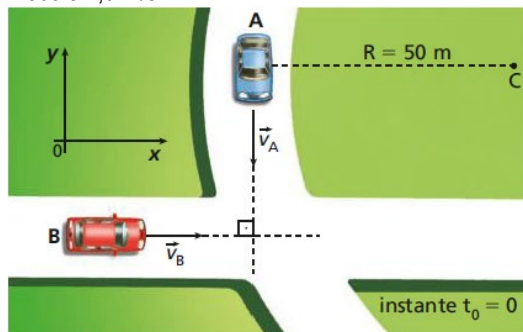
25. Uma partícula se desloca sobre o plano cartesiano Oxy tal que suas coordenadas de posição, x e y , variam em função do tempo t , conforme as expressões:

$$x = 1,0t^2 + 1,0t \text{ (SI)} \text{ e } y = 1,0t^3 + 5,0 \text{ (SI)}$$

Sabendo-se que em $t_0 = 0$ a partícula se encontra em um ponto A e que no instante $t_1 = 2,0$ s ela se encontra em um ponto B, pede-se determinar:

- o seno do ângulo u formado entre o deslocamento vetorial da partícula de A até B e o eixo Ox ;
- a intensidade da velocidade vetorial média da partícula no trânsito de A até B.

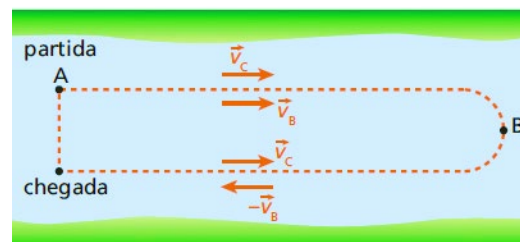
26. A figura representa dois carros, A e B, em um instante $t_0 = 0$. O referencial Oxy adotado está contido no solo, suposto plano e horizontal. O carro A se desloca com velocidade de módulo constante de 72 km/h em uma curva circular de centro C e raio $R = 50$ m; o carro B tem uma velocidade inicial de módulo 54 km/h e se desloca em uma trajetória reta. Para evitar a colisão, o motorista do carro B começa a frear, no instante $t_0 = 0$, com uma aceleração de módulo $4,0 \text{ m/s}^2$.



Pede-se determinar:

- o módulo da aceleração de A em relação ao solo;
- o módulo da velocidade de A em relação a B no instante $t_0 = 0$;
- o módulo de aceleração de A em relação a B no instante $t_0 = 0$.

27. Um barco vai de Manaus até Urucu descendo um rio e, em seguida, retorna à cidade de partida, conforme esquematizado na figura.



A velocidade da correnteza é constante e tem módulo v_c em relação às margens.

A velocidade do barco em relação à água é constante e tem módulo v_B .

Desconsiderando-se o tempo gasto na manobra para voltar, a velocidade escalar média do barco, em relação às margens, no trajeto total de ida e volta tem módulo dado por:

- $\frac{v_B + v_c}{2}$
- $\frac{v_B - v_c}{2}$
- $\sqrt{v_B v_c}$
- $\frac{v_B^2 + v_c^2}{v_B}$
- $\frac{v_B^2 - v_c^2}{v_B}$

28. (H. Moysés) A distância entre as cidades A e B é l . Um avião faz uma viagem de ida e volta entre A e B voando em linha reta, com velocidade V em relação ao ar.

a) Calcule o tempo total de voo, se o vento sopra com velocidade v , numa direção que forma um ângulo θ com a direção AB. Este tempo depende do sentido em que o vento sopra?

b) Mostre que a viagem de ida e volta só é possível se $v < V$, e calcule a relação entre o tempo de voo $t_{\parallel}$ quando o vento sopra na direção AB e o tempo $t_{\perp}$ quando sopra na direção perpendicular (este resultado é relevante na discussão do experimento de Michelson e Morley);

c) Mostre que, qualquer que seja sua direção, o vento sempre prolonga a duração da viagem de ida e volta.

29. (IME) Dois observadores em movimento acompanham o deslocamento de uma partícula no plano. O observador 1, considerando estar no centro do seu sistema de coordenadas, verifica que a partícula descreve um movimento dado pelas equações $x_1(t) = 3\cos(t)$ e $y_1(t) = 4\sin(t)$, sendo t a variável tempo. O observador 2, considerando estar no centro de seu sistema de coordenadas, equaciona o movimento da partícula como $x_2(t) = 5\cos(t)$ e $y_2(t) = 5\sin(t)$. O observador 1 descreveria o movimento do observador 2 por meio da equação: Observações:



- Os eixos x_1 e x_2 são paralelos e possuem o mesmo sentido; e
- Os eixos y_1 e y_2 são paralelos e possuem o mesmo sentido.

a) $9x^2 + 16y^2 = 25$.

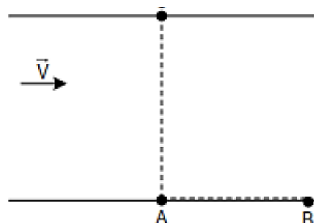
b) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 25$

c) $4x^2 + y^2 = 1$.

d) $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$

e) $4x^2 + y^2 = 4$.

30. (ITA) Dois barcos, 1 e 2, partem simultaneamente de um ponto A da margem de um rio, conforme a figura, com velocidades constantes em relação à água respectivamente iguais V_1 e V_2 . O barco 1 vai diretamente até o ponto B da mesma margem, rio abaixo, e volta a A. O barco 2 vai diretamente até o ponto C da outra margem e volta a A. Os tempos de ida e volta para ambos os barcos são iguais. As distâncias AC e AB são iguais entre si e a velocidade da correnteza é constante e apresenta módulo V , em relação às margens do rio. Sabendo que a razão entre o tempo de descida de A para B e o tempo de subida de B para A é r , os módulos V_1 e V_2 , valem respectivamente:



a) $V_1 = V \left(\frac{1+r}{1-r} \right)$ e $V_2 = V \sqrt{\left(\frac{1+r}{1-r} \right)^2 - 1 + \left(\frac{1-r}{1+r} \right)^2}$.

b) $V_1 = V \left(\frac{1+r}{1-r} \right)$ e $V_2 = V \sqrt{\left(\frac{1+r}{1-r} \right)^2 + 1 + \left(\frac{1-r}{1+r} \right)^2}$.

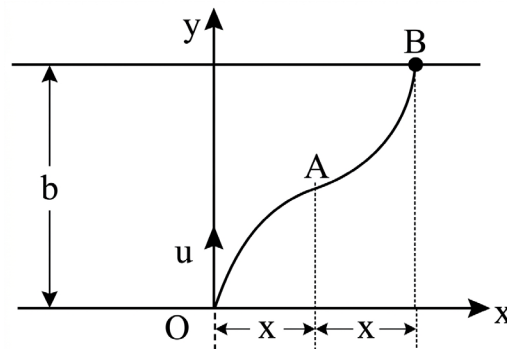
c) $V_1 = V \left(\frac{1+r}{1-r} \right)$ e $V_2 = V \sqrt{\left(\frac{1+r}{1-r} \right)^2 - 1 - \left(\frac{1-r}{1+r} \right)^2}$.

d) $V_1 = 2V \left(\frac{1-r}{1+r} \right)$ e $V_2 = V \sqrt{\left(\frac{1+r}{1-r} \right)^2 - 1 + \left(\frac{1-r}{1+r} \right)^2}$.

e) $V_1 = 2V \left(\frac{1+r}{1-r} \right)$ e $V_2 = V \sqrt{\left(\frac{1+r}{1-r} \right)^2 - 1 + \left(\frac{1-r}{1+r} \right)^2}$.

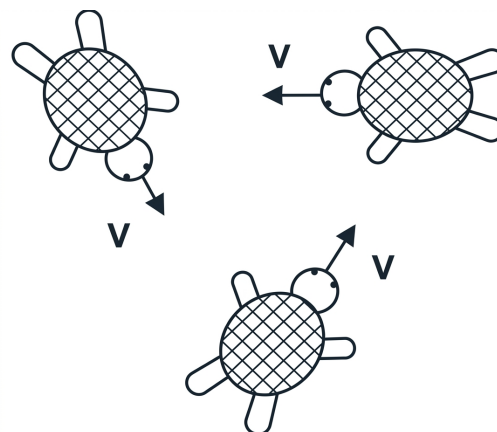
31. (INDIA) A velocidade da correnteza de um rio cresce proporcionalmente à distância da margem e atinge seu máximo v_0 no meio. Perto das margens, a velocidade é zero. Um barco está se movendo ao longo do rio de tal maneira que é sempre perpendicular à correnteza e a velocidade do barco

em águas calmas é u . Calcule a distância pela qual o barco que cruza o rio será levado pela correnteza se a largura do rio for b . Determine também a trajetória do caminho do barco.



32. (INDIA) Encontre o tempo que um avião leva para voar em torno de um quadrado de lado a com o vento soprando a uma velocidade u , nos dois casos, (a) Se a direção do vento for ao longo de um lado do quadrado; (b) a direção do vento é ao longo de uma das diagonais do quadrado.

33. (coordenadas polares) Três tartarugas encontram-se nos vértices de um triângulo equilátero de lado L . Simultaneamente, elas começam a se movimentar com uma velocidade V , sendo que a primeira se dirige em direção à segunda, a segunda em direção à terceira e a terceira, em direção à primeira.



a) Após quanto tempo as tartarugas vão se encontrar?

b) Qual a distância percorrida por uma tartaruga qualquer nesse episódio?

34. (Halliday) O vetor posição de um elétron é $\vec{r} = (5,0 \text{ m})\hat{i} - (3,0 \text{ m})\hat{j} + (2,0 \text{ m})\hat{k}$.



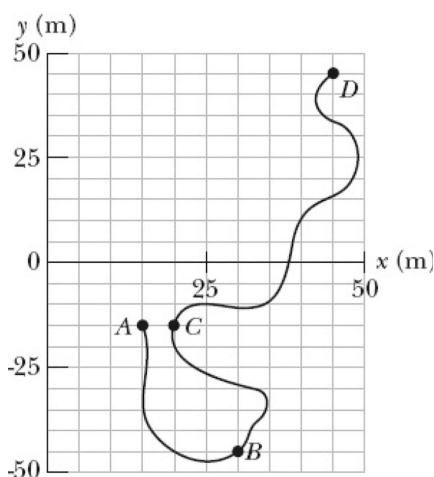
- a) Determine o módulo de $\vec{r}$.
b) Desenhe o vetor em um sistema de coordenadas dextrogiro.

35. (Halliday) A posição de um elétron é dada por $\vec{r} = 3,00t\hat{i} - 4,00t^2\hat{j} + 2,00\hat{k}$ com t em segundos e $\vec{r}$ em metros.

- a) Qual é a velocidade $\vec{v}(t)$ do elétron na notação dos vetores unitários? Quanto vale $\vec{v}(t)$ no instante $t = 2,00$ s
b) na notação dos vetores unitários e como
c) um módulo e
d) um ângulo em relação ao sentido positivo do eixo x ?

36. (Halliday) O vetor posição de um íon é inicialmente $\vec{r} = 5,0\hat{i} - 6,0\hat{j} + 2,0\hat{k}$ e 10 s depois passa a ser $\vec{r} = 2,0\hat{i} + 8,0\hat{j} - 2,0\hat{k}$, com todos os valores em metros. Qual é a velocidade média $\vec{v}_{\text{méd}}$ durante os 10 s na notação dos vetores unitários?

37. (Halliday) A Figura mostra os movimentos de um esquilo em um terreno plano, do ponto A (no instante $t = 0$) para os pontos B (em $t = 5,00$ min), C (em $t = 10,0$ min) e, finalmente, D (em $t = 15,0$ min). Considere as velocidades médias do esquilo do ponto A para cada um dos outros três pontos. Entre essas velocidades médias determine (a) o módulo e (b) o ângulo da que possui o menor módulo e (c) o módulo e (d) o ângulo da que possui o maior módulo.



38. A posição $\vec{r}$ de uma partícula que se move em um plano xy é dada por

$$\vec{r} = (2,00t^3 - 5,00t)\hat{i} + (6,00 - 7,00t^4)\hat{j},$$

com $\vec{r}$ em metros e t em segundos. Na notação dos vetores unitários, calcule (a) $\vec{r}$, (b) $\vec{v}$ e (c) $\vec{a}$ para $t = 2,00$ s.

(d) Qual é o ângulo entre o semieixo positivo x e uma reta tangente à trajetória da partícula em $t = 2,00$ s?

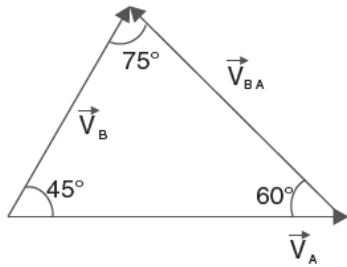
39. (Halliday) Uma mulher que é capaz de remar um barco a 6,4 km/h em águas paradas se prepara para atravessar um rio retilíneo com 6,4 km de largura e uma correnteza de 3,2 km/h. Tome perpendicular ao rio e apontando rio abaixo. Se a mulher pretende remar até um ponto na outra margem exatamente em frente ao ponto de partida, (a) para que ângulo em relação a ela deve apontar o barco e (b) quanto tempo ela levará para fazer a travessia? (c) Quanto tempo gastaria se, permanecendo na mesma margem, remasse 3,2 km rio abaixo e depois remasse de volta ao ponto de partida? (d) Quanto tempo gastaria se, permanecendo na mesma margem, remasse 3,2 km rio acima e depois remasse de volta ao ponto de partida? (e) Para que ângulo deveria direcionar o barco para atravessar o rio no menor tempo possível? (f) Qual seria esse tempo?

40. (INDIA) Considere um conjunto com um grande número de partículas, cada uma com velocidade v . A direção da velocidade é distribuída aleatoriamente no conjunto. Mostre que o módulo da velocidade relativa entre um par de partículas, médio sobre todos os pares do conjunto, é maior do que v .



GABARITO

1.



$$\vec{V}_{BA} = \vec{V}_B - \vec{V}_A \Rightarrow \vec{V}_{BA} + \vec{V}_A = \vec{V}_B$$

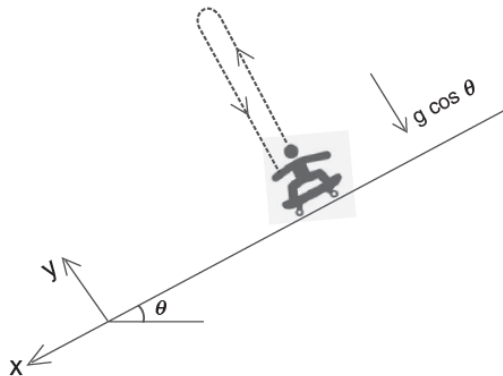
A partir da figura:

$$\frac{v_B}{\sin 60^\circ} = \frac{v_A}{\sin 75^\circ}$$

$$v_A = 900 \frac{\sin 60^\circ}{\sin 75^\circ} = 900 \times \frac{0,866}{0,966} = 807 \text{ km/h}$$

2. O garoto conseguirá pegar a bola somente se ele a vir se movendo perpendicularmente ao plano inclinado (isto é, na direção y).

A aceleração da bola no referencial do garoto é $g \cos \theta$ na direção y negativa.



A bola e o garoto têm a mesma aceleração ($= g \sin \theta$) no referencial do solo. Portanto, o garoto não vê nenhuma aceleração na bola nessa direção.

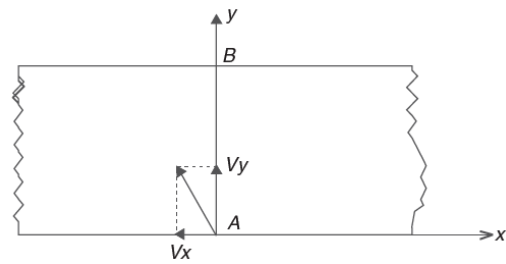
No referencial do garoto, se a velocidade inicial da bola é V , então

$$T = \frac{2V}{g \cos \theta} \therefore V = \frac{1}{2} T g \cos \theta$$

3. No referencial do solo, a formiga deve se mover perpendicularmente à borda do papel.

Componente y de sua velocidade:

$$V_y = \frac{10 \text{ cm}}{5 \text{ s}} = 2 \text{ cm s}^{-1}$$



Componente x da velocidade da formiga no referencial do solo deve ser zero.

$$\therefore V_x = 2 \text{ cm s}^{-1}$$

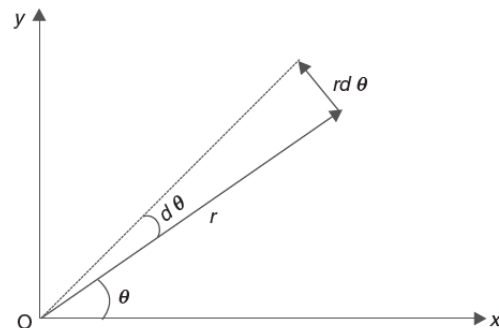
é

$\therefore$ A velocidade da formiga em relação ao papel é

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2} \text{ cm s}^{-1}$$

4. A variação do vetor posição $\vec{\Delta r}$ tem comprimento $r d\theta$, onde

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$



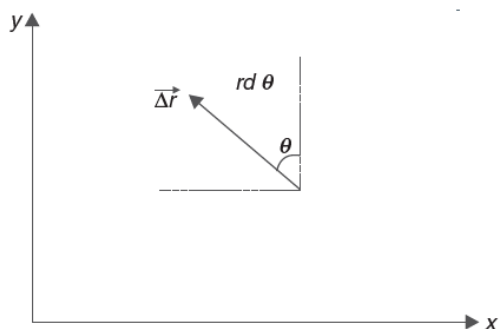
Direção de $\vec{\Delta r}$ é perpendicular a $\vec{r}$.

Logo,

$$\vec{\Delta r} = -r d\theta \sin \theta \hat{i} + r d\theta \cos \theta \hat{j}$$

Mas $r \sin \theta = y$ e $r \cos \theta = x$

$$\therefore \vec{\Delta r} = -y d\theta \hat{i} + x d\theta \hat{j}$$



5.

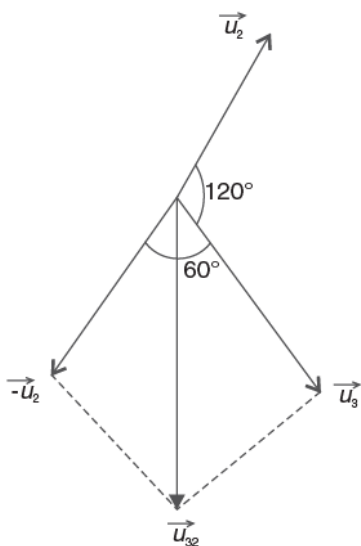


a) Para um observador caindo para baixo com aceleração g , todas as pedras parecem mover-se com velocidades constantes.

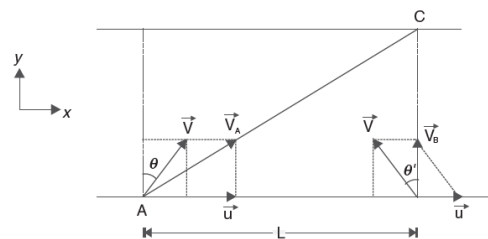
A velocidade da pedra 2 em relação à pedra 1 tem módulo igual a u . Isso significa $\theta = 60^\circ$ (ver figura).

b) Velocidade de 3 em relação a 2 terá módulo

$$u_{32} = \sqrt{u^2 + u^2 + 2 \cdot u \cdot u \cdot \cos 60^\circ} = \sqrt{3}u$$



6.



V = velocidade do barco em relação à água.
 V_A e V_B = velocidades reais dos dois barcos.

A partir da condição dada no problema, segue que

$$V_{Ay} = V_{By} \Rightarrow V \cos \theta = V \cos \theta' \Rightarrow \theta = \theta'$$

Também, $V \sin \theta' = u [\because V_{Bx} = 0]$

$$5 \sin \theta' = 3 \sin \theta' = \frac{3}{5}$$

$$\theta = \theta' = \sin^{-1} \left(\frac{3}{5} \right)$$

$$\therefore V_{Ay} = V_{By} = V \cos \theta = 5 \times \frac{4}{5} = 4 \text{ km/hr}$$

Tempo para atravessar o rio

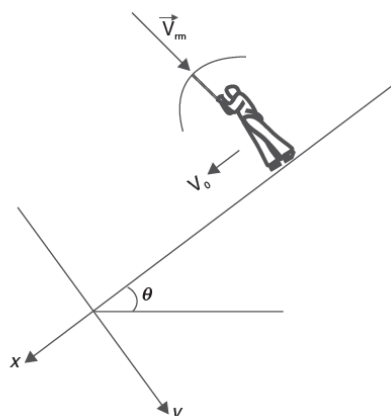
$$t = \frac{3,0 \text{ km}}{4,0 \text{ km/hr}} = \frac{3}{4} \text{ h}$$

Para A,

$$V_{Ax} = V \sin \theta + u = 5 \times \frac{3}{5} + 3 = 6 \text{ km/hr}$$

$$\therefore L = V_{Ax} t = 6 \times \frac{3}{4} = 4,5 \text{ km}$$

7. Tome o eixo x ao longo do plano inclinado e a direção y perpendicular a ele.



A velocidade da chuva em relação ao homem é perpendicular ao plano inclinado neste caso (isto é, ao longo da haste do guarda-chuva. Isso mantém a



cobertura perpendicular à chuva e fornece segurança máxima).

$$\begin{aligned}\vec{V}_{rm} &= \vec{V}_r - \vec{V}_m = (V_x \hat{i} + V_y \hat{j}) - V_0 \hat{i} \\ &= (V_x - V_0) \hat{i} + V_y \hat{j}\end{aligned}$$

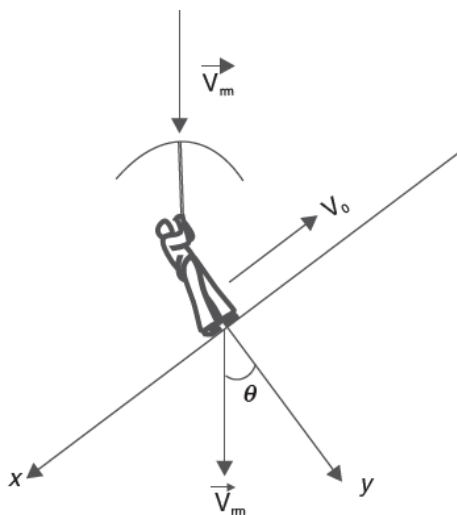
Como $\vec{V}_{rm}$ não tem componente em x

$$\therefore V_x = V_0$$

Quando o homem está subindo, $\vec{V}_{rm}$ é dirigida verticalmente para baixo.

$$\begin{aligned}\vec{V}_{rm} &= (V_x \hat{i} + V_y \hat{j}) - (-V_0 \hat{i}) = V_x \hat{i} + V_y \hat{j} + V_0 \hat{i} \\ &= 2V_0 \hat{i} + V_y \hat{j}\end{aligned}$$

Do diagrama

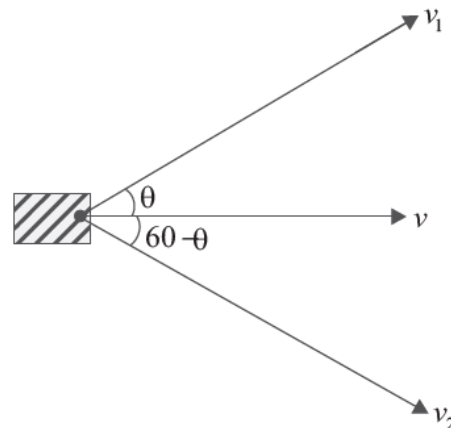


$$\tan \theta = \frac{2V_0}{V_y}$$

$$\frac{3}{4} = \frac{2V_0}{V_y} \Rightarrow V_y = \frac{8V_0}{3}$$

$$\therefore V_r = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = \frac{\sqrt{73}}{3} V_0$$

8. Seja a velocidade do bloco igual a v em uma direção que faz um ângulo θ com a direção de v_1 .



a) Para que a corda fique esticada, os objetos nas duas extremidades devem ter o mesmo componente de velocidade ao longo do comprimento da corda.

$$v \cos \theta = v_1 \quad \text{eq1}$$

$$v \cdot \cos (60^\circ - \theta) = v_2$$

$$\Rightarrow v \left[\frac{1}{2} \cos \theta + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \theta \right] = v_2$$

$$\text{usando (1) } \cos \theta = \frac{v_1}{v} \text{ e } \sin \theta = \frac{\sqrt{v^2 - v_1^2}}{v},$$

$$\therefore v \left[\frac{1}{2} \frac{v_1}{v} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{v^2 - v_1^2}}{v} \right] = v_2$$

$$v_1 + \sqrt{3} \sqrt{v^2 - v_1^2} = 2v_2$$

$$3(v^2 - v_1^2) = 4v_2^2 + v_1^2 - 4v_1v_2$$

$$\Rightarrow 3v^2 = 4v_2^2 + 4v_1^2 - 4v_1v_2$$

$$\therefore v = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{v_1^2 + v_2^2 - v_1v_2} \quad \text{eq(2)}$$

b) Para $\theta = 0^\circ$

$$v = v_1 [\text{da eq(1)}]$$

Substituindo em (2), obtemos

$$v_1 = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{v_1^2 + v_2^2 - v_1v_2}$$

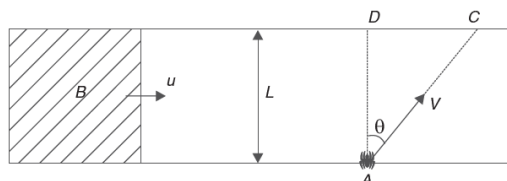
$$\frac{3v_1^2}{4} = v_1^2 + v_2^2 - v_1v_2$$

$$\Rightarrow v_1^2 - 4v_1v_2 + 4v_2^2 = 0 \Rightarrow (v_1 - 2v_2)^2 = 0$$

$$\Rightarrow v_1 = 2v_2 \Rightarrow \frac{v_1}{v_2} = 2$$



9. Deixe o inseto mover-se com velocidade v ao longo da direção mostrada na figura.



Tempo para atravessar é

$$t = \frac{L}{v \cos \theta}$$

$$DC = v \sin \theta \cdot t = L \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = L \tan \theta.$$

O bloco quase não atinge o inseto se a distância percorrida pelo bloco no tempo t for apenas um pouco menor que $d + DC$:

$$u \cdot t = d + L \tan \theta \Rightarrow u \cdot \frac{L}{v \cos \theta} = d + L \tan \theta$$

$$\Rightarrow v = \frac{uL}{d \cos \theta + L \sin \theta}$$

O valor máximo de $d \cos \theta + L \sin \theta$ é $\sqrt{d^2 + L^2}$.

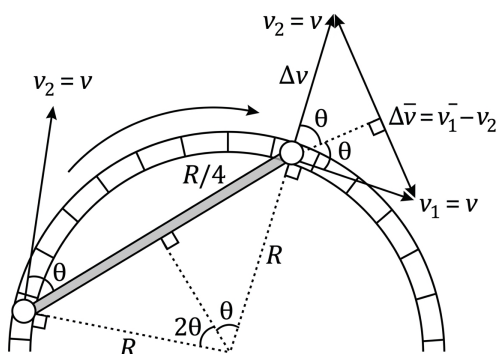
Logo, $v_{\min} = \frac{uL}{\sqrt{d^2 + L^2}}$

10. Resolução do prof Laerte:

A partir do gráfico, vamos calcular $\vec{v}_{1/2}$.

$$\vec{v}_{1/2} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2$$

Tenha em mente que as velocidades são tangentes à trajetória.



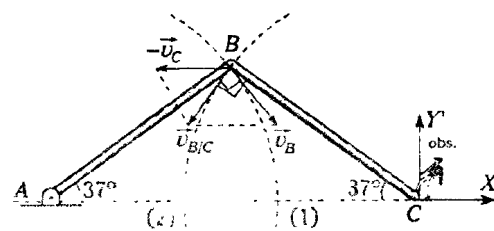
Segundo o gráfico

$$|\vec{v}_1 - \vec{v}_2| = 2v \sin \theta \rightarrow |\vec{v}_1 - \vec{v}_2| = 2v \left(\frac{R/4}{R} \right)$$

$$\therefore |\vec{v}_1 - \vec{v}_2| = \left(\frac{v}{2} \right)$$

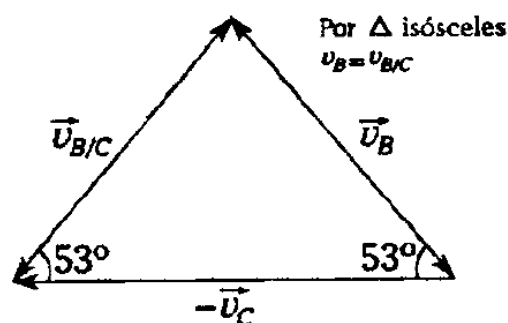
11. Resolução

Será analisado o movimento da extremidade **B** em relação à extremidade **C** (de referência). Nisso teremos o seguinte gráfico:



Para um observador fixo em **C**, o ponto **B** também descreve uma circunferência em relação a ele. Por isso, a velocidade relativa de **B** em relação a **A** ($\vec{v}_{B/A}$) também é tangente à circunferência (2).

Construímos um triângulo com as velocidades a partir do ponto **B** e podemos notar que:



$$|\vec{v}_C| = 2|\vec{v}_B| \cos 53^\circ$$

onde

$$v_B = \omega L = (0,1)(2) = 0,2 \text{ m/s}$$

Substituindo em (1), temos

$$v_C = (2)(0,2) \left(\frac{3}{5} \right) = 0,24 \text{ m/s}$$

2 resolução mais detalhada:

Vamos resolver passo a passo usando **velocidade relativa**, exatamente para a situação da figura.

Dados do enunciado

- Comprimento das hastes: $L = 2 \text{ m}$



- Haste AB gira com velocidade angular constante: $\omega = 0,1 \text{ rad/s}$
- Ângulo em C : $\theta = 37^\circ$
- Ponto A está fixo, ponto C desliza sobre o trilho horizontal.
- Queremos a rapidez do ponto C : v_C .

Velocidade do ponto B em relação a A

Como a haste AB é rígida e tem comprimento L :

$$v_B = \omega \cdot L = 0,1 \cdot 2 = 0,2 \text{ m/s}$$

A velocidade de B é **perpendicular** à haste AB (velocidade tangencial ao movimento circular em torno de A).

Análise por movimento relativo entre B e C

Olhe para o sistema "haste BC ":
Vamos analisar o movimento de B em relação a C .

- Para um observador fixo em C , o ponto B também descreve uma circunferência, agora em torno de C .
- Logo, a velocidade relativa $\vec{v}_{B/C}$ é perpendicular à haste BC .

Chamando:

- $\vec{v}_B$ = velocidade de B em relação ao solo,
- $\vec{v}_C$ = velocidade de C em relação ao solo (horizontal),
- $\vec{v}_{B/C}$ = velocidade de B em relação a C ,

Ou, em termos de módulo, esse triângulo de velocidades forma um triângulo isósceles (pela simetria da configuração na figura), e o enunciado (e a resolução padrão desse problema) usam o ângulo indicado de 53° entre $\vec{v}_B$ e o eixo horizontal para chegar à relação:

$$|\vec{v}_C| = 2|\vec{v}_B| \cos 53^\circ$$

Esse 53° vem de que o triângulo geométrico associado aos ângulos $\theta = 37^\circ$ e $90^\circ - \theta = 53^\circ$ aparece tanto na geometria das hastes quanto no triângulo das velocidades (é o caso clássico em que a decomposição dos vetores resulta em um triângulo retângulo 3-4-5).

Substituindo os valores

Já calculamos:

$$v_B = 0,2 \text{ m/s}$$

Sabemos que:

$$\cos 53^\circ \approx \frac{3}{5}$$

Substituindo em (1):

$$\begin{aligned} v_C &= 2 \cdot v_B \cos 53^\circ = 2 \cdot 0,2 \cdot \frac{3}{5} = 0,4 \cdot \frac{3}{5} \\ &= \frac{1,2}{5} = 0,24 \text{ m/s} \end{aligned}$$

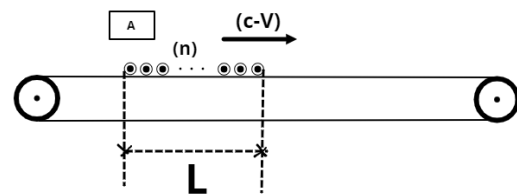
Resposta

A rapidez do extremo C quando $\theta = 37^\circ$ é:

$$v_C = 0,24 \text{ m/s}$$

12. Resolução do Prof. Laerte Pereira:

No ref. De A:

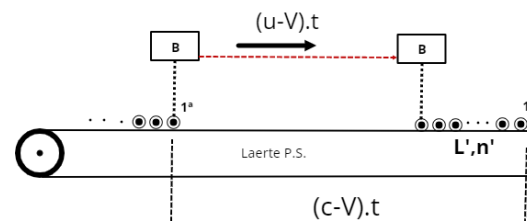


$$L = n \cdot D = c - V$$

Onde D é o diâmetro de uma esferinha.

$$D = \frac{c - V}{n}$$

No ref. De A o contador B:



$$L' = (c - V)t - (u - V)t = n' \cdot D$$

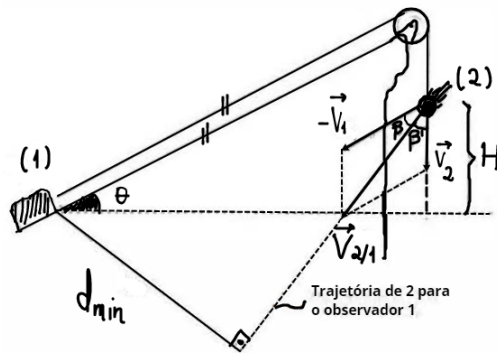
$$(c - u) = n' \left(\frac{c - V}{n} \right)$$

$$n' = \left(\frac{c - u}{c - V} \right) \cdot n$$

13. Resolução do Prof. Laerte Pereira:



No referencial de 1

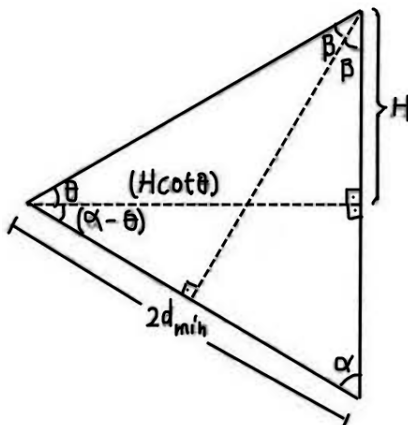


Como o fio é ideal

$$V_1 = V_2$$

$$\beta = \beta'$$

Para o observador 1 a esfera descreve um movimento retilíneo.



$$H \cdot \cot \theta = 2d_{\min}(\sin \alpha)$$

$$\rightarrow d_{\min} = \frac{H \cdot \cot \theta}{2 \cdot (\sin \alpha)}$$

Também sabemos que

$$(\alpha - \theta) + \alpha = 90^\circ$$

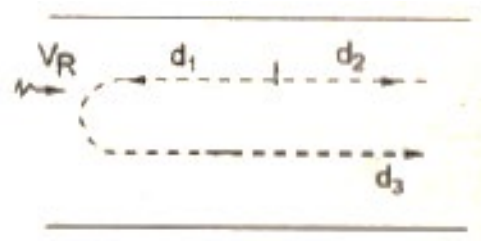
$$\alpha = \left(\frac{90^\circ + \theta}{2} \right)$$

$$d_{\min} = \frac{H \cdot \cot \theta}{2 \cdot \sin \left(\frac{90^\circ + \theta}{2} \right)}$$

14. Resolução do prof. Laerte Pereira:

v_R = rapidez das águas do rio

v_L = rapidez da Lancha



Velocidade total (v_1) quando o barco navega 2 h rio acima.

$$V_1 = (v_L - v_R)$$

$$D_1 = v_1 \cdot t_1$$

$$D_1 = (v_L - v_R) \cdot (2)$$

Velocidade total (v_2) quando as jangadas são rebocadas para $(2h + t_3)$; 2h enquanto o barco navega rio acima e t_3 enquanto navega rio abaixo.

$$D_2 = v_R \cdot (2 + t_3)$$

$$D_3 = (v_L + v_R) \cdot t_3$$

$$D_1 + D_2 = D_3$$

$$t_3 = 2h$$

15. Resolução do Prof. Laerte Pereira:

Aqui x é a separação entre o centro do hemisfério e o extremo da haste. A taxa de variação de x pode ser tomada como a velocidade relativa da extremidade da haste e do centro do hemisfério, ou seja, $(v_1 + v_2)$. Precisamos encontrar a taxa de variação de θ e a taxa de variação de x que conhecemos, então temos que desenvolver uma relação entre x e θ , que é dada como:

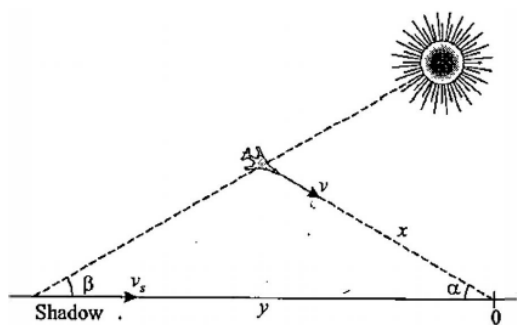
$$x = R \cdot \operatorname{cosec} \theta$$

Derivando

$$\frac{dx}{dt} = -R \csc \theta \cdot \cot \theta \frac{d\theta}{dt}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{(v_1 + v_2) \sin \theta^2}{\cos \theta}$$

16. Resolução do prof. Laerte Pereira:



$$v = \frac{dx}{dt}$$

$$v_s = -\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{x}{\sin \beta} = \frac{y}{\sin(\alpha + \beta)}$$

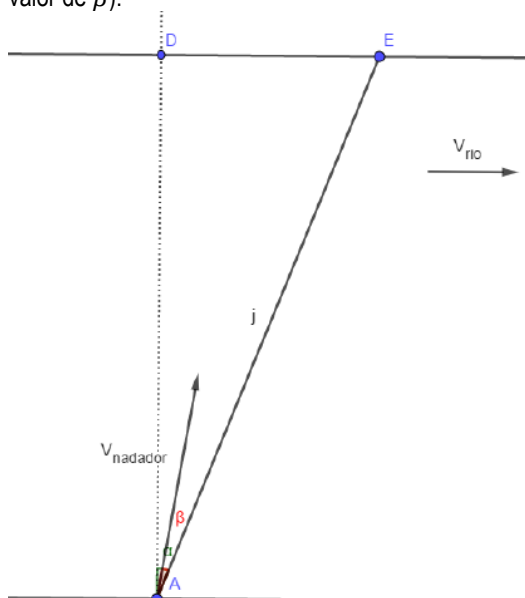
$$y = \frac{x \cdot \sin(\alpha + \beta)}{\sin \beta}$$

Derivando

$$v_s = \frac{v \cdot \sin(\alpha + \beta)}{\sin \beta}$$

17. Resolução:

Considere a situação em que o nadador tem a velocidade inclinada no sentido da velocidade da correnteza (se for o contrário você encontrará isso no valor de β):



A é o ponto de partida do nadador, D é a sua reflexão na margem oposta e E é o ponto de chegada. Convertendo a velocidade da correnteza para m/s obtemos 0,3m/s, assim temos a relação:

$$V_{nadador} = 3 \cdot V_{rio}$$

Pelas distâncias dadas no enunciado conseguimos determinar o ângulo α :

$$\tan \alpha = \frac{DE}{AD} = \frac{\frac{\sqrt{3}D}{3}}{D} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\alpha = 30^\circ$$

A partir disso, podemos concluir que:

$$\angle AED = 60^\circ$$

Note que o nadador deve ter sua velocidade resultante na direção do segmento de reta AE:



Onde $\gamma = \angle AED$. Usando a lei dos senos obtemos:

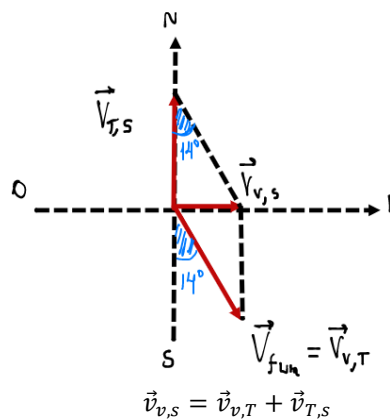
$$\frac{v_{nadador}}{\sin \gamma} = \frac{v_{rio}}{\sin \beta}$$

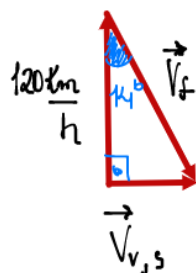
$$\sin \beta = \sin 60^\circ \frac{v_{rio}}{v_{nadador}} = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

Perceba que a questão pede o **menor** ângulo entre a velocidade do nadador ($V_{nadador}$) e a margem do rio ($\beta + 60^\circ$):

$$\sin(\beta + 60^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{12} (1 + \sqrt{33})$$

18. Resolução do prof. Laerte Pereira:



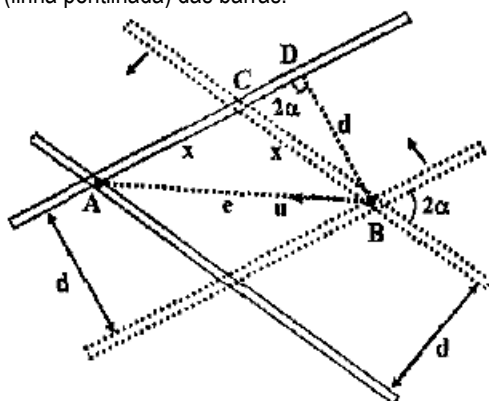


$$\tan 14^\circ = \frac{v_{v,s}}{120} = 0,25$$

$$v_{v,s} = 29,9 \text{ km/h}$$

19. Resolução do prof. Laerte Pereira:

Vamos traçar as posições inicial (linha sólida) e final (linha pontilhada) das barras:



Na figura após um tempo (Δt), as barras percorrem uma distância igual a,

$$d = v \cdot \Delta t$$

Também, no ΔABC , ao mesmo tempo, a distância percorrida pelo ponto de intersecção das barras é,

$$e = (x^2 + x^2 - 2x \cos(180^\circ - 2\alpha))^{\frac{1}{2}}$$

$$e = 2x \cdot \cos \alpha$$

Por outro lado, no triângulo direito BCD, encontra-se:

$$x = \frac{d}{\sin 2\alpha}$$

$$e = 2 \cdot \frac{v \cdot \Delta t}{\sin 2\alpha} \cos \alpha$$

$$u = \frac{e}{\Delta t} = \frac{v}{\sin \alpha}$$

20. Resolução:

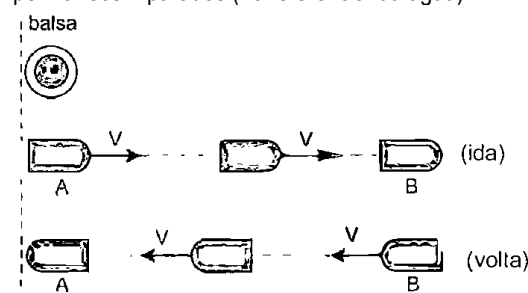
A resolução dessa questão demonstra como a escolha do referencial mais adequado pode simplificar bastante a análise de um problema de Física. Antes

de iniciar a solução do problema, considere as seguintes informações, subentendidas no enunciado, mas que podem não ser conhecidas pelo estudante:

- navegar rio acima = navegar contra a correnteza;
- navegar rio abaixo = navegar a favor da correnteza;
- balsa = embarcação que move-se apenas arrastada pela correnteza, não possui motor;
- velocidade acusada pelo velocímetro do barco a motor = velocidade do barco em relação à água.

A chave é adotar o referencial na água, tomar todas as velocidades em relação à água inicialmente.

Nesse referencial, a balsa se encontra parada durante todo o episódio (a balsa não se move em relação à água). O barco se afasta da balsa durante 1 h, percorrendo a distância AB com velocidade constante V (no referencial da água). Em seguida, o piloto do barco desliga o motor para conserto durante 0,5 h, intervalo de tempo no qual barco, balsa e água permanecem parados (no referencial da água).



Após permanecer parado no ponto B durante 0,5 h (veja figura), o barco retorna com a mesma velocidade V de antes (no referencial da água), a fim de fazer percorrer na volta a mesma distância da ida ($AB = BA$) no mesmo tempo gasto anteriormente (1 h) até alcançar novamente a balsa (que permaneceu parada em A o tempo todo).

Assim, o tempo total para o barco perfazer a distância $AB + BA$ vale:

$$\Delta t = 1 \text{ h (ida)} + 0,5 \text{ h (parado)} + 1 \text{ h (volta)} = 2,5 \text{ h}$$

Conforme o enunciado afirma, porém, nesse intervalo de tempo de 2,5 h, a balsa percorre uma distância de 7,5 km em relação às margens, movendo-se arrastada pela correnteza e, portanto, com a velocidade da correnteza (no referencial da Terra). Assim, qual a velocidade da correnteza (em relação à Terra)?

$$v_c = \frac{D}{\Delta t} = \frac{7,5 \text{ km}}{2,5 \text{ h}} = 3 \text{ km/h}$$

21. Resolução:

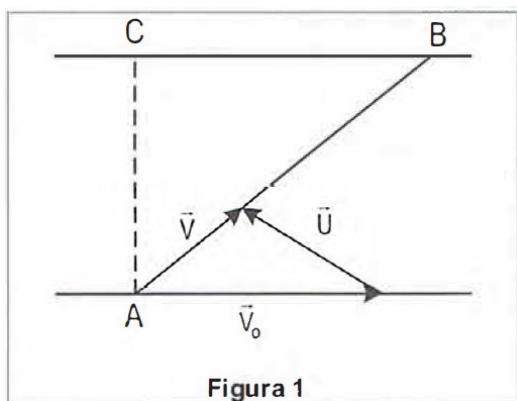


Figura 1

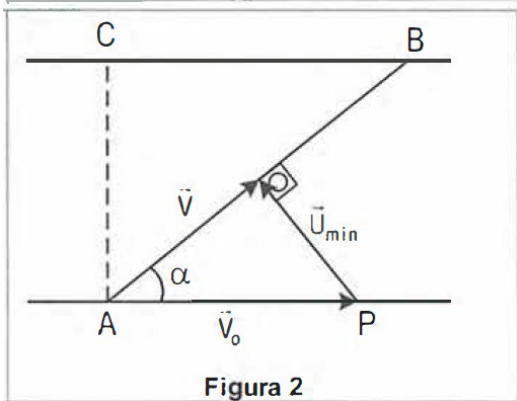


Figura 2

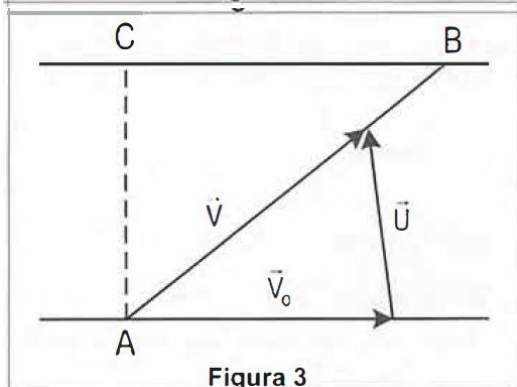


Figura 3

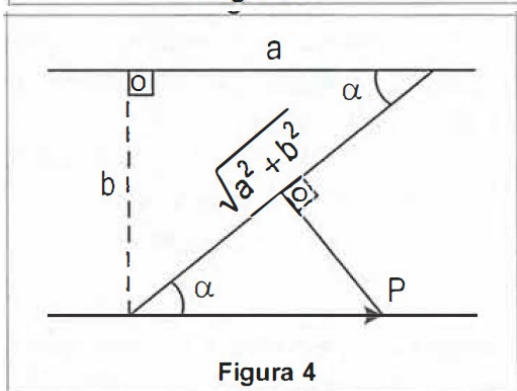


Figura 4

Para que o barco parta do ponto A da margem e chegue ao ponto B da margem oposta, seguindo a trajetória AB em relação à Terra (margens), a velocidade do barco em relação à Terra V deve apontar na direção da reta AB. Ora, quando o vetor O

representar a distância mínima entre o ponto P e a reta AB, isto é, quando O for perpendicular à direção AB como mostra a Figura 2.

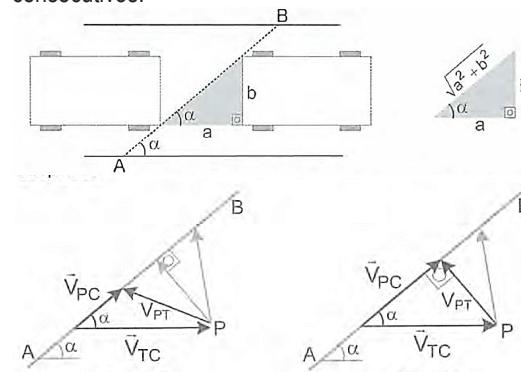
$$\sin \alpha = \frac{U_{\min}}{v_0} = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$U_{\min} = \frac{v_0 b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

22. Resolução:

No referencial dos carros

Essa avenida é percorrida por uma sequência ilimitada de carros, todos se movendo com velocidade constante V (em relação à Terra). Segundo o enunciado, eles estão dispostos de forma que a distância livre entre dois carros consecutivos sempre vale a . Sendo ilimitada a sequência de carros, o pedestre necessariamente atravessará a avenida por uma trajetória retilínea que passa entre dois carros consecutivos.



Entretanto, como o enunciado do problema pede que a velocidade $\vec{V}_{PT}$ do pedestre em relação à Terra seja mínima, essa condição é satisfeita quando $\vec{V}_{PT}$ aponta perpendicularmente à reta AB, como pode ser visto na figura.

$$v_{PT} = v_{TC} \cdot \sin \alpha$$

$$v_{PT\min} = \frac{v \cdot b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

23. a)

$$v_1 = v_c - v_{rel}$$

$$v_1 = (150 - 50) \text{ km/h}$$

$$\boxed{v_1 = 100 \text{ km/h}}$$

b)

$$v_2 = v_c + v_{rel}$$

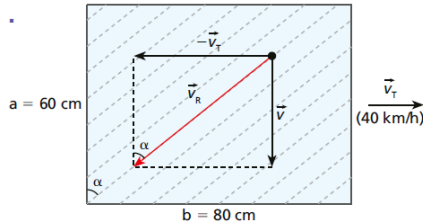
$$v_2 = (150 + 50) \text{ km/h}$$



$$v_{rel} = 200 \text{ km/h}$$

c) Lado Oeste, pois a velocidade resultante, medida em relação à superfície terrestre, é maior.

24. Resolução:



a) $\tan \alpha = \frac{b}{a} = \frac{v_T}{v}$

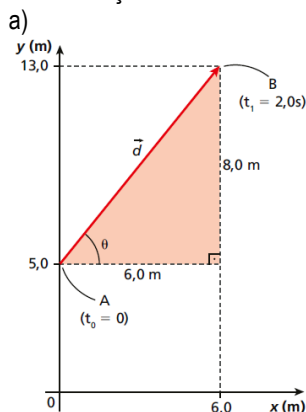
$v = 30 \text{ km/h}$

b) Teorema de Pitágoras:

$$v_R^2 = v_T^2 + v^2$$

$v_R = 50 \text{ km/h}$

25. Resolução:



Aplicando-se o Teorema de Pitágoras ao triângulo retângulo destacado na figura, vem:

$d=10\text{m}$ logo, $\sin \theta = 0,8$

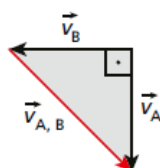
$$|\vec{v}_m| = \frac{|\vec{d}|}{\Delta t} = 5 \text{ m/s}$$

26. Resolução:

a) O movimento de A em relação ao solo é circular e uniforme, e sua aceleração vetorial é centrípeta.

$$a_A = \frac{v^2}{R} = 8 \text{ m/s}^2$$

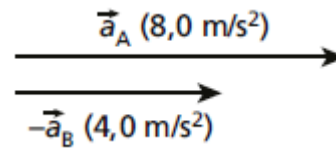
b)



Triângulo pitagórico

$v_{AB} = 25 \text{ m/s} = 90 \text{ km/h}$

c)



$a_{AB} = 12 \text{ m/s}^2$

27. Resolução:

Subida: $\Delta t_1 = \frac{\Delta s}{v_B - v_c}$

Descida: $\Delta t_2 = \frac{\Delta s}{v_B + v_c}$

Da definição de vel. Escalar média:

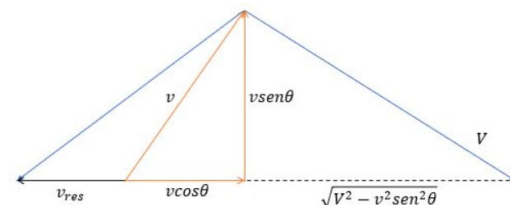
$$v_m = \frac{2\Delta s}{\Delta t_1 + \Delta t_2}$$

$$v_m = \frac{2\Delta s}{\left(\frac{\Delta s}{v_B - v_c}\right) + \left(\frac{\Delta s}{v_B + v_c}\right)}$$

$$v_m = \frac{2}{\left(\frac{1}{v_B + v_c}\right) + \left(\frac{1}{v_B - v_c}\right)}$$

$$v_m = \frac{v_B^2 - v_c^2}{v_B}$$

28. O que a gente vai ter que reparar aqui é que o avião não pode viajar com sua velocidade em relação ao ar em direção a AB, porque o vento, apontando em direção diferente dessa, fará com que a soma vetorial das velocidades não permita que o avião chegue no destino.



A velocidade resultante vai depender do lado para onde a velocidade do avião aponta. Na ida, está a favor do movimento, mas na volta está contra! Então os tempos vão ser:

$$t_{ida} = \frac{l}{\sqrt{v^2 - v^2 \sin^2 \theta} + v \cos \theta}$$



$$t_{\text{volta}} = \frac{l}{\sqrt{V^2 - v^2 \sin^2 \theta} - v \cos \theta}$$

Então o tempo total é:

$$t_{\text{total}} = t_{\text{ida}} + t_{\text{volta}}$$

$$t_{\text{total}} = \frac{l}{\sqrt{V^2 - v^2 \sin^2 \theta} + v \cos \theta} + \frac{l}{\sqrt{V^2 - v^2 \sin^2 \theta} - v \cos \theta}$$

Fazendo o MMC:

$$t_{\text{total}} = \frac{l(2\sqrt{V^2 - v^2 \sin^2 \theta})}{V^2 - v^2(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)}$$

Da relação fundamental:

$$t_{\text{total}} = \frac{l(2\sqrt{V^2 - v^2 \sin^2 \theta})}{V^2 - v^2}$$

$$t_{\text{total}} = \frac{\frac{2l}{V} \sqrt{1 - \frac{v^2}{V^2} \sin^2 \theta}}{1 - \frac{v^2}{V^2}}$$

Quando o vento é paralelo, $\theta = 0$ ou $\theta = 180^\circ$.

$$t_{\text{paralelo}} = \frac{l(2\sqrt{V^2})}{V^2 - v^2}$$

$$t_{\text{paralelo}} = \frac{2lV}{V^2 - v^2}$$

Quando o vento é perpendicular, $\theta = 90^\circ$ ou $\theta = 270^\circ$.

$$t_{\text{perp}} = \frac{l(2\sqrt{V^2 - v^2})}{V^2 - v^2}$$

$$t_{\text{perp}} = \frac{2l}{\sqrt{V^2 - v^2}}$$

Daqui a gente sabe que:

$$\frac{t_{\text{com vento}}}{t_{\text{sem vento}}} = \frac{\frac{\frac{2l}{V} \sqrt{1 - \frac{v^2}{V^2} \sin^2 \theta}}{1 - \frac{v^2}{V^2}}}{\frac{2l}{V}}$$

$$\frac{t_{\text{com vento}}}{t_{\text{sem vento}}} = \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{V^2} \sin^2 \theta}}{1 - \frac{v^2}{V^2}}$$

Queremos provar que essa fração é maior que 1, ou seja, $t_{\text{com}} > t_{\text{sem}}$.

$$\frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{V^2} \sin^2 \theta}}{1 - \frac{v^2}{V^2}} > 1$$

$$\sqrt{1 - \frac{v^2}{V^2} \sin^2 \theta} > 1 - \frac{v^2}{V^2}$$

$$1 - \frac{v^2}{V^2} \sin^2 \theta > 1 - \frac{2v^2}{V^2} + \frac{v^4}{V^4}$$

$$2 - \sin^2 \theta > \frac{v^2}{V^2}$$

Agora pensa! O $\sin^2 \theta$ vai diminuir no máximo 1 daquele 2, então o lado esquerdo é maior ou igual a 1.

Enquanto isso, o lado direito é uma fração menor que 1, já que $v < V$. Então, o lado esquerdo é sempre maior que o direito, e está provado!

Resposta

$$t_{\text{total}} = \frac{\frac{2l}{V} \sqrt{1 - \frac{v^2}{V^2} \sin^2 \theta}}{1 - \frac{v^2}{V^2}}$$

29. Resolução:

podemos representar a posição do observador 2 em relação ao 1 pela equação:

$$\vec{r} = (x, y) = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$$

$$\begin{cases} x = -2 \cos(t) \\ y = -\sin(t) \end{cases}$$

Isolando os valores de $\cos(t)$ e $\sin(t)$ nas equações acima e usando a identidade trigonométrica $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$

$$\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$$

30. Resolução:

Calculando o tempo de descida do primeiro barco, obtemos:

$$t_d = \frac{x}{V_1 + V}$$

Tempo de subida:

$$t_s = \frac{x}{V_1 - V}$$

A razão entre esses tempos é dada pela questão:

$$r = \frac{t_d}{t_s} = \frac{V_1 - V}{V_1 + V}$$

Logo

$$V_1 = V \left(\frac{1+r}{1-r} \right)$$

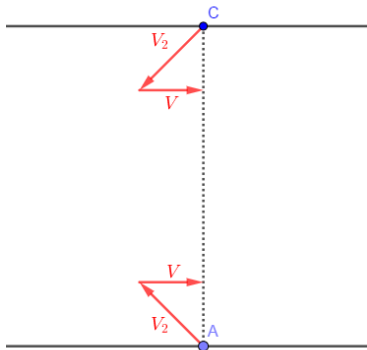
O tempo total de viagem do barco 1 é:

$$t_1 = t_s + t_d$$

$$t_1 = \frac{2xV_1}{V_1^2 - V^2}$$



A velocidade do barco 2 em relação ao rio (desenvolvida pelo seu motor) deve ser inclinada, de modo que a resultante tem a direção AC:



O tempo total de viagem do barco 2 é:

$$t_2 = 2 \left(\frac{x}{\sqrt{V_2^2 + V^2}} \right)$$

O problema nos diz que: $t_1 = t_2$

$$\frac{2V_1}{V_1^2 - V^2} = 2 \left(\frac{1}{\sqrt{V_2^2 + V^2}} \right)$$

Isolando V_2

$$V_2^2 = V^2 + \frac{(V_1^2 - V^2)^2}{V_1^2}$$

$$V_2^2 = V_1^2 - V^2 + \frac{V^4}{V_1^2}$$

Substituindo V_1 , temos:

$$V_2 = V \sqrt{\left(\frac{1+r}{1-r} \right)^2 - 1 + \left(\frac{1-r}{1+r} \right)^2}$$

31. resolução do prof. Laerte Pereira:

$$v_x = k \cdot y$$

Onde k é constante.

Quando

$$y = \frac{b}{2}; v = v_0$$

$$v_0 = \frac{k \cdot b}{2}$$

$$k = \frac{2v_0}{b}$$

$$v_x = \frac{2v_0}{b} \cdot y$$

O deslocamento ao longo do eixo y é:

$$y = ut$$

$$v_x = \left(\frac{2v_0}{b} \right) u \cdot t$$

A aceleração ao longo do eixo x é constante

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{2v_0}{b} \cdot u$$

Então o deslocamento ao longo do eixo X é

$$x = u_x \cdot t + \frac{1}{2} a_x t^2$$

$$x = 0 \cdot t + \frac{1}{2} \left(\frac{2v_0 \cdot u}{b} \right) t^2$$

Como

$$y = ut$$

$$t = \frac{y}{u}$$

$$x = \frac{1}{2} \left(\frac{2v_0 \cdot u}{b} \right) \frac{y^2}{u}$$

Ou

$$y^2 = \frac{ub \cdot x}{v_0}$$

A equação é uma equação de uma parábola, então, a trajetória do barco é uma parábola OA até o meio do rio. A outra metade da trajetória é da mesma natureza. Quando o barco está em $y = b/2$

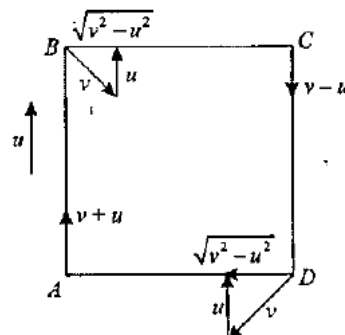
$$x = \frac{v_0}{ub} \left(\frac{b}{2} \right)^2 = \frac{v_0 b}{4u}$$

A equação acima fornece o desvio ao longo do eixo x para a primeira metade. Durante a segunda metade do movimento, também é x . Assim, deriva total ao longo da direção do fluxo do rio = $2x$

$$x = \frac{v_0 b}{2u}$$

32. Resolução:

a)



$$t = \frac{a}{v+u} + \frac{a}{\sqrt{v^2-u^2}} + \frac{a}{v-u} + \frac{a}{\sqrt{v^2-u^2}}$$

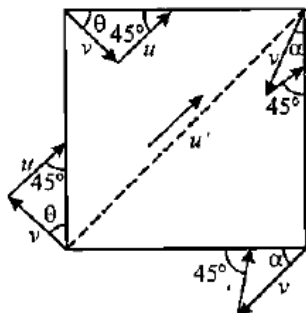
$$t = \frac{2av}{v^2-u^2} + \frac{2a}{\sqrt{v^2-u^2}}$$



$$t = \frac{2av}{v^2 - u^2} + \frac{2a}{\sqrt{v^2 - u^2}} \cdot \left(\frac{\sqrt{v^2 - u^2}}{\sqrt{v^2 - u^2}} \right)$$

$$t = 2a \left(\frac{v + \sqrt{v^2 - u^2}}{v^2 - u^2} \right)$$

b)



$$\frac{u}{\sin \theta} = v\sqrt{2}$$

$$\frac{u}{\sin \alpha} = v\sqrt{2}$$

$$\sin \theta = \sin \alpha = \frac{u}{v\sqrt{2}}$$

$$t = \frac{2a}{v \cos \theta + \frac{u}{\sqrt{2}}} + \frac{2a}{v \cos \theta - \frac{u}{\sqrt{2}}}$$

$$t = 2a \left[\frac{2v \cos \theta}{v^2 \cos \theta - \frac{u^2}{2}} \right]$$

$$t = 2a \left[\frac{4v \cos \theta}{2v^2 \cos \theta - u^2} \right]$$

$$t = 2a \left[\frac{\left(\frac{4v \cdot \sqrt{2v^2 - u^2}}{v\sqrt{2}} \right)}{2v^2 \left(\frac{2v^2 - u^2}{2v^2} \right) - \frac{u^2 \cdot 2v^2}{2v^2}} \right]$$

$$t = 2a \left[\frac{4 \cdot \frac{\sqrt{2v^2 - u^2}}{\sqrt{2}}}{(2v^2(2v^2 - u^2)) - u^2 \cdot 2v^2} \right]$$

$$t = 2a \left[\frac{4 \cdot \frac{\sqrt{2v^2 - u^2}}{\sqrt{2}}}{(2v^2 - u^2) - u^2} \right]$$

$$t = 2a \left[\frac{4 \cdot \frac{\sqrt{2v^2 - u^2}}{\sqrt{2}}}{(2v^2 - 2u^2)} \right]$$

$$t = 2a \left[\frac{2 \cdot \frac{\sqrt{2v^2 - u^2}}{\sqrt{2}}}{(v^2 - u^2)} \right]$$

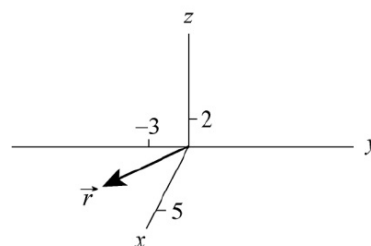
$$t = 2a \left[\frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2v^2 - u^2}}{(v^2 - u^2)} \right]$$

33. Prof. Laerte

34. a) O módulo de $\vec{r}$ é

$$|\vec{r}| = \sqrt{(5,0 \text{ m})^2 + (-3,0 \text{ m})^2 + (2,0 \text{ m})^2} = 6,2 \text{ m}.$$

b) O desenho aparece ao lado. Os valores das coordenadas estão em metros.



35. Para chamar atenção para o fato de que a velocidade é função do tempo, usamos a notação $v(t)$ para dx/dt .

(a) De acordo com a Eq. 4-10, temos:

$$\begin{aligned} \vec{v}(t) &= \frac{d}{dt} (3,00t\hat{i} - 4,00t^2\hat{j} + 2,00t\hat{k}) \\ &= (3,00 \text{ m/s})\hat{i} - (8,00t \text{ m/s})\hat{j} \end{aligned}$$

(b) Fazendo $t = 2,00$ na expressão do item (a), obtemos

$$\vec{v} = (3,00\hat{i} - 16,0\hat{j}) \text{ m/s}.$$

(c) A velocidade escalar no instante $t = 2,00$ sé

$$v = |\vec{v}| = \sqrt{(3,00 \text{ m/s})^2 + (-16,0 \text{ m/s})^2} = 16,3 \text{ m/s}.$$

(d) O ângulo de $\vec{v}$ nesse instante é

$$\tan^{-1} \left(\frac{-16,0 \text{ m/s}}{3,00 \text{ m/s}} \right) = -79,4^\circ \text{ ou } 101^\circ$$

Escolhemos a primeira possibilidade ($79,4^\circ$ no sentido horário a partir do semieixo x positivo, ou 281° no sentido anti-horário a partir do semieixo x positivo) porque os sinais das componentes mostram que o vetor está no quarto quadrante.

36

$$\vec{v}_{\text{méd}} = \dots = (-0,70\hat{i} + 1,40\hat{j} - 0,40\hat{k}) \text{ m/s}.$$

37. As coordenadas dos pontos (em metros) são $A = (15, -15)$, $B = (30, -45)$, $C = (20, -15)$ e $D = (45, 45)$. Os tempos



correspondentes são $t_A = 0$, $t_B = 300$ s, $t_C = 600$ s e $t_D = 900$ s. Todos os deslocamentos $\Delta \vec{r}$ começam no ponto A.

a) A velocidade média de menor módulo (5,0 m/600 s) é a do deslocamento que termina no ponto C: é $|\vec{v}_{\text{méd}}| = 0,0083$ m/s.

b) A direção de $\vec{v}_{\text{méd}}$ é 0° (em relação ao semieixo x positivo).

38. (a) Fazendo $t = 2,00$ na expressão dada, obtemos:

$$\begin{aligned} \vec{r}|_{t=2,00} &= [2,00(8) - 5,00(2)]\hat{i} + [6,00 \\ &\quad - 7,00(16)]\hat{j} \\ &= (6,00\hat{i} - 106\hat{j}) \text{ m} \end{aligned}$$

(b) Derivando a expressão dada em relação ao tempo, obtemos

$$\vec{v}(t) = (6,00t^2 - 5,00)\hat{i} - 28,0t^3\hat{j}$$

na qual usamos a notação $v(t)$ para chamar atenção para o fato de que a velocidade varia com o tempo. No instante $t = 2,00$ s,

$$\vec{v} = (19,0\hat{i} - 224\hat{j}) \text{ m/s.}$$

(c) Derivando $\vec{v}(t)$ em relação ao tempo, obtemos $12,0t\hat{i} - 84,0t^2\hat{j}$, o que nos dá

$$\vec{a} = (24,0\hat{i} - 336\hat{j}) \text{ m/s}^2$$

no instante $t = 2,00$ s.

(d) O ângulo de $\vec{v}$ é ... (o trecho com o valor numérico do ângulo não aparece completo na imagem recortada).

39. Escolhemos os eixos de tal forma que $\hat{i}$ aponta para a outra margem do rio (perpendicularmente à correnteza) e $\hat{j}$ aponta na direção da correnteza. Sabemos que o módulo (presumivelmente constante) da velocidade do barco em relação à água é $|\vec{v}_{ba}| = 6,4$ km/h. O ângulo da velocidade do barco em relação ao eixo x é θ . A velocidade da água em relação à margem é

$$\vec{v}_{am} = (3,2 \text{ km/h})\hat{j}.$$

(a) Para que a mulher chegue a um ponto "diametralmente oposto" ao ponto de partida, a velocidade do barco em relação à margem deve ser

$\vec{v}_{bm} = v_{bm}\hat{i}$, na qual $v_{bm} > 0$ é desconhecida.

Assim, todas as componentes j devem se cancelar na soma vetorial $\vec{v}_{ba} + \vec{v}_{am} = \vec{v}_{bm}$, o que significa que $v_{bm}\sin \theta = (-3,2 \text{ km/h})j$; assim,

$$\theta = \sin^{-1}[(-3,2 \text{ km/h})/(6,4 \text{ km/h})] = -30^\circ.$$

(b) Usando o resultado do item (a), temos $v_{bm} = v_{ba}\cos \theta = 5,5$ km/h. Assim, o tempo necessário para que o barco percorra uma distância $\ell = 6,4$ km é $(6,4 \text{ km})/(5,5 \text{ km/h}) = 1,15$ h ou 69 min.

(c) Se a mulher rema na direção do eixo y (como afirma o enunciado) e sabendo que a velocidade da água em relação à margem é $v_{am} = 3,2$ km/h, temos:

$$t_{\text{total}} = \frac{D}{v_{ba} + v_{am}} + \frac{D}{v_{ba} - v_{am}} = 1,33 \text{ h.}$$

(d) Como

$$\frac{D}{v_{ba} + v_{am}} + \frac{D}{v_{ba} - v_{am}} = \frac{D}{v_{ba} - v_{am}} + \frac{D}{v_{ba} + v_{am}},$$

o resultado é o mesmo do item (c), $t_{\text{total}} = 80$ min.

(e) O ângulo para atravessar o rio no menor tempo possível é $\theta = 0^\circ$. Isso pode ser demonstrado notando que no caso de um ângulo qualquer θ

$$\vec{v}_{bm} = \vec{v}_{ba} + \vec{v}_{am} = v_{ba}\cos \theta \hat{i} + (v_{ba}\sin \theta + v_{am})\hat{j}$$

em que a componente x de $\vec{v}_{bm}$ é igual a ℓ/t . Assim,

$$t = \frac{\ell}{v_{ba}\cos \theta}$$

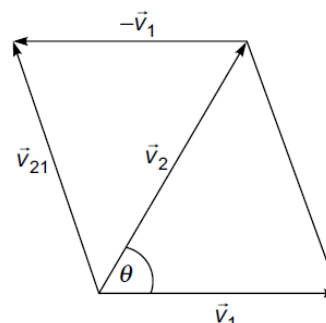
que pode ser minimizado fazendo $dt/d\theta = 0$.

(f) A expressão do item (e) nos dá $t = (6,4 \text{ km})/(6,4 \text{ km/h}) = 1,0$ h ou 60 min.

40. Solução: Seja $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ as velocidades de quaisquer duas partículas e θ o ângulo entre elas. Como cada partícula tem o mesmo módulo de velocidade, então

$$v_1 = v_2 = v$$

A velocidade relativa da partícula 2 em relação à 1 é dada por



$$\vec{v}_{21} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$$

$$\begin{aligned} v_{21} &= \sqrt{v^2 + v^2 - 2v^2\cos \theta} \\ &= \sqrt{2v^2(1 - \cos \theta)} \end{aligned}$$

$$= \sqrt{2v^2 \cdot 2\sin^2 \frac{\theta}{2}}$$

$$= 2v \sin \frac{\theta}{2}.$$

Como as velocidades das partículas são distribuídas aleatoriamente, θ varia de 0 a 2π . O módulo da velocidade relativa média, quando se faz a média sobre todos esses pares, é

$$v_{21} = \frac{\int_0^{2\pi} v_{21} d\theta}{\int_0^{2\pi} d\theta}$$

$$= \frac{\int_0^{2\pi} \left(2v \sin \frac{\theta}{2} \right) d\theta}{\int_0^{2\pi} d\theta}$$

$$= \frac{2v \left[\frac{-\cos(\theta/2)}{(1/2)} \right]_0^{2\pi}}{[\theta]_0^{2\pi}}$$

$$= \frac{-4v[\cos(\theta/2)]_0^{2\pi}}{(2\pi - 0)}$$

$$= -\frac{2v}{\pi} [\cos \pi - \cos 0]$$

$$= -\frac{2v}{\pi} [\cos \pi - \cos 0]$$

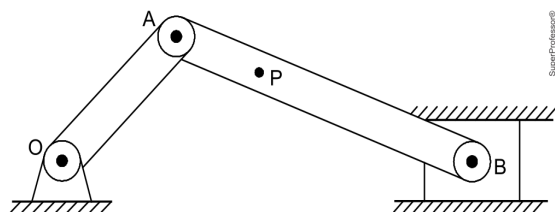
$$= \frac{4v}{\pi} = 1.273 v$$

$$> v$$



COMO CAIU NO VESTIBULAR

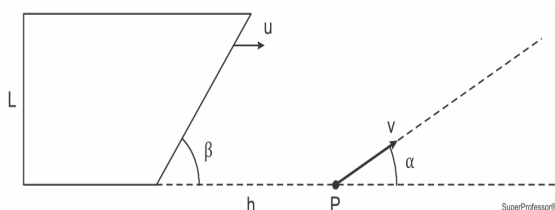
1. (Efomm) A figura representa um esquema simplificado do sistema pistão + biela + virabrequim de um motor de combustão interna. A haste AO, com comprimento $\sqrt{2}/2m$, m, gira no sentido horário em torno do ponto fixo O e está conectada à barra de 1 m de comprimento AB, articulada em seus dois pontos extremos. O ponto B está conectado ao pistão que se move apenas horizontalmente dentro da cavidade.



A figura representa um instante do movimento em que o ângulo da haste AO com a horizontal vale 45° . Um observador fixo no solo determina que P é o ponto da barra AB cuja velocidade possui o menor módulo. A distância AP vale, em metros,

- $(\sqrt{3} - 1)/4$
- $(2 - \sqrt{3})/3$
- $(3 - \sqrt{3})/4$
- $(4 - \sqrt{3})/3$
- $(5 - \sqrt{3})/4$

2. (Ime) Um trapézio retângulo desloca-se para a direita à velocidade escalar constante u . No instante inicial, um de seus vértices está à distância h do ponto P. Ainda nesse instante, um objeto parte do ponto P à velocidade constante v , indicada na figura juntamente com outras grandezas. O valor mínimo de v para que o objeto não seja atingido pelo trapézio, onde $0 < \alpha < \beta < \frac{\pi}{2}$, é:



- $\frac{u}{\sin(\beta - \alpha) / \sin \beta + h \sin \alpha / L}$
- $\frac{u \cos \beta}{\cos(\alpha + \beta) + h \sin \alpha / L}$
- $\frac{u \sin \beta}{\sin \beta + h \sin \alpha / L}$

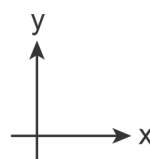
- $\frac{u \sin \beta}{\sin(\beta + \alpha) + h \sin \alpha / L}$
- $\frac{u}{\cos \alpha + h \sin \alpha \cos \beta / L}$

3. (Efomm) Uma roda circular de trator rola em linha reta sobre o chão horizontal sem escorregar. Uma partícula A da extremidade da roda descreve uma curva (chamada cicloide) cuja equação cartesiana é $x = \arccos(1 - y) - \sqrt{2y - y^2}$ com x e y medidos em metros em um sistema de coordenadas cuja origem está sobre o solo, com eixo x paralelo ao solo. Enquanto a partícula se desloca desde o contato com o solo até o ponto mais alto da roda, sua coordenada y varia desde o mínimo até o máximo valor para os quais a expressão para x é real. A razão entre o módulo da velocidade de A (em relação ao solo) e sua componente horizontal no instante em que A possui coordenada $y = 1,62$ vale

- $3/2$
- $4/3$
- $6/5$
- $9/8$
- $10/9$

4. (Ime) Na figura, uma partícula S e os pontos extremos A e B de um espelho plano movem-se no plano xy de acordo com as seguintes equações paramétricas para as coordenadas (em metros) em função do instante $t > 0$ (em segundos):

$$\begin{cases} x_A(t) = 5 + t \\ y_A(t) = -5 - 2t \end{cases} \quad \begin{cases} x_B(t) = 10 + t \\ y_B(t) = -5 - 2t \end{cases} \quad \begin{cases} x_S(t) = \sin(t) \\ y_S(t) = \cos(t) \end{cases}$$



Observação:

- o plano do espelho é ortogonal ao plano xy .

A maior velocidade escalar atingida pela imagem da partícula no espelho, em m/s, é:

- 3



- b) $\sqrt{17}$
 c) $2(1+\sqrt{5})$
 d) 5
 e) $2\sqrt{5}$

5. (Esc. Naval) Considere uma partícula se movimentando em um plano xy. Sabendo que as coordenadas cartesianas da partícula são $x = t^2$ e $y = (t-1)^2$, com x e y medidos em metros e t em segundos, em que instante, em segundos, a velocidade da partícula é mínima?

- a) 0
 b) 0,5
 c) 1,0
 d) 1,5
 e) 2,0

6. (Ime) Duas partículas A e B de massas iguais se deslocam no plano XY. As coordenadas de suas posições, em função do instante de tempo t, em que $0 \leq t \leq t_{choque}$, são, respectivamente, $S_A = (t^2 - 9t + 13, t - 2)$ e $S_B = (-2t + 3, t^2 - 7t + 13)$. No instante $t = t_{choque}$, as partículas chocam-se elasticamente. Imediatamente após o choque, o módulo da soma de seus vetores de velocidade é:

- a) $\sqrt{5}$
 b) $\sqrt{10}$
 c) $\sqrt{13}$
 d) $\sqrt{17}$
 e) $\sqrt{53}$

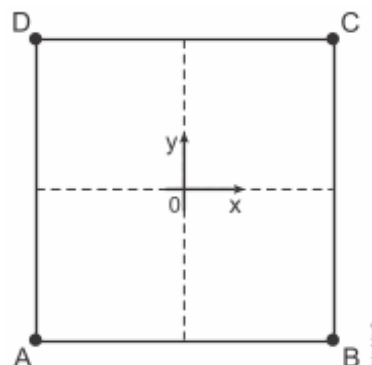
7. (Ime) Uma fonte sonora A, que emite um som de frequência constante, e um observador B estão próximos um do outro e movem-se lentamente de acordo com as equações temporais no Plano XY mostradas abaixo:

$$\begin{aligned} X_A &= \cos(t) + \log(1+t) \\ Y_A &= 2t + 3 \\ X_B &= \log(1+t) - \sin(t) \\ Y_B &= 2t - 1 \end{aligned}$$

Considerando que a fonte sonora emita um som de frequência constante, a frequência percebida pelo observador, dentre as opções, é desprovida de efeito Doppler quando o instante t for:

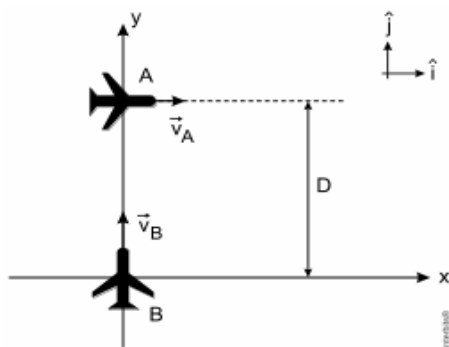
- a) 0
 b) $\pi/6$
 c) $\pi/2$
 d) $3\pi/4$
 e) π

8. (Ime) Quatro partículas, denominadas A, B, C e D, partem simultaneamente dos vértices de um quadrado de lado unitário. Todas as partículas apresentam velocidades escalares iguais durante suas trajetórias. A partícula A persegue a partícula B, de tal forma que o seu vetor velocidade está sempre na direção e sentido de A para B. O mesmo ocorre entre as partículas B e C, C e D e, finalmente, entre D e A. Tomando o centro do quadrado como origem do sistema de coordenadas, a tangente do ângulo entre vetor unitário do sentido positivo do eixo x e o vetor que une o ponto A ao ponto B, quando A se encontra em um ponto arbitrário (x, y) da sua trajetória, é dada por:



- a) $\frac{x-y}{2x-2y+1}$
 b) $-\frac{1+x+y}{x+y}$
 c) $-\frac{x-y}{x+y}$
 d) $\frac{x}{y} - \frac{y}{x}$
 e) $\frac{1+x+y}{1-x+y}$

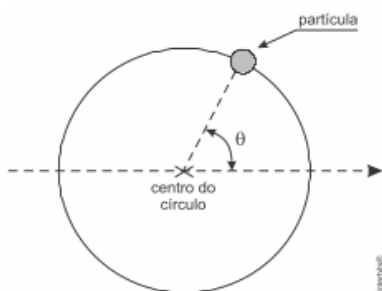
9. (Ita) Dois aviões de combate, A e B, viajam a uma mesma altitude com velocidades constantes $v_A = (100m/s)\hat{i}$ e $v_B = (200m/s)\hat{j}$, respectivamente. A figura ilustra as posições dos aviões no instante $t = 0s$ que estão separadas por uma distância $D = 100m$. Devido ao funcionamento de sua turbina, o avião A emite um som de frequência característica de $1000Hz$. A velocidade do som na região onde se encontram os aviões é de $300m/s$. Com base nessas informações, calcule:



a) a distância mínima entre os dois aviões ao longo do movimento;

b) a frequência percebida no instante $t = 0s$ pelo piloto do avião B, devido ao som da turbina do avião A.

10. (Ime) Uma partícula desloca-se solidária a um trilho circular com $0,5m$ de raio. Sabe-se que o ângulo θ , indicado na figura, segue a equação $\theta = t^2$, onde t é o tempo em segundos e θ é o ângulo em radianos. O módulo do vetor aceleração da partícula, em $t = 1s$, é:



a) $\sqrt{5}$

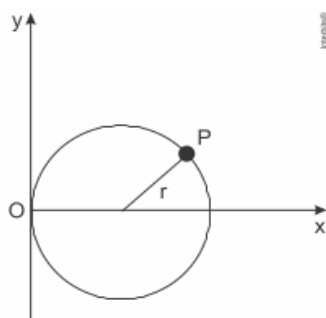
b) $\sqrt{2}$

c) 1

d) $2\sqrt{5}$

e) 2

11. (Esc. Naval) Analise a figura abaixo.



A figura acima ilustra o movimento de uma partícula P que se move no plano xy , com velocidade escalar constante sobre uma circunferência de raio $r = 5m$. Sabendo-se que a partícula completa uma revolução a cada $20s$ e que em $t = 0$ ela passa pela origem do sistema de coordenadas xy , o módulo do vetor velocidade média da partícula, em m/s , entre os instantes $2,5s$ e $7,5s$ é igual a:

a) $\frac{1}{10}\sqrt{2}$

b) $\frac{1}{5}\sqrt{2}$

c) $\frac{2}{5}\sqrt{2}$

d) $\frac{3}{5}\sqrt{2}$

e) $\sqrt{2}$

12. (Ime) Duas partículas A e B , carregadas eletricamente com mesmos valores de cargas positivas, partem da origem em velocidade nula no instante $t = 0$ e têm suas componentes de aceleração em relação aos eixos X e Y regidas pelas seguintes equações temporais:

Partícula A: $\begin{cases} a_x(t) = \cos(t) \\ a_y(t) = \sin(t) \end{cases}$

Partícula B: $\begin{cases} a_x(t) = -\cos(t) \\ a_y(t) = \sin(t) - \cos(t) \end{cases}$

O instante $t_{\min}$ onde $0 \leq t_{\min} \leq 2\pi$, em que a força de repulsão entre as cargas é mínima é

a) $\frac{3}{2}\pi$

b) $\frac{1}{4}\pi$

c) $\frac{1}{2}\pi$

d) $\frac{3}{4}\pi$

e) π

13. (Esc. Naval) Dois navios da Marinha de Guerra, as Fragatas Independência e Rademaker, encontram-se próximos a um farol. A Fragata Independência segue em direção ao norte com velocidade $15\sqrt{2}$ nós e a

Fragata Rademaker, em direção ao nordeste com velocidade de 20 nós. Considere que ambas as velocidades foram medidas em relação ao farol. Se na região há uma corrente marítima de 2,0 nós no sentido norte-sul, qual o módulo da velocidade relativa da Fragata Independência, em nós, em relação à Fragata Rademaker?

- a) 10,0
- b) 12,3
- c) 13,7
- d) 15,8
- e) 16,7

14. (Ime) Dois observadores em movimento acompanham o deslocamento de uma partícula no plano. O observador 1, considerando estar no centro de seu sistema de coordenadas, verifica que a partícula descreve um movimento dado pelas equações $x_1(t) = 3\cos(t)$ e $y_1(t) = 4\sin(t)$, sendo t a variável tempo. O observador 2, considerando estar no centro de seu sistema de coordenadas, equaciona o movimento da partícula como $x_2(t) = 5\cos(t)$ e $y_2(t) = 5\sin(t)$. O observador 1 descreveria o movimento do observador 2 por meio da equação:

Observações :

- os eixos x_1 e x_2 são paralelos e possuem o mesmo sentido; e

- os eixos y_1 e y_2 são paralelos e possuem o mesmo sentido.

a) $9x^2 + 16y^2 = 25$

b) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 25$

c) $4x^2 + y^2 = 1$

d) $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$

e) $4x^2 + y^2 = 4$

15. (Ime) Uma partícula de carga $+Q$ e massa m move-se pelo espaço presa a um carrinho. Esse movimento é regido pelas seguintes equações de posição nos três eixos, para k , ω_1 e ω_2 constantes:

$$x(t) = \frac{k}{\omega_1} \sin(\omega_1 t) - \frac{k}{\omega_2} \sin(\omega_2 t)$$

$$y(t) = \frac{k}{\omega_1} \cos(\omega_1 t) + \frac{k}{\omega_2} \cos(\omega_2 t)$$

$$z(t) = \frac{4k}{\omega_1 + \omega_2} \sin\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t\right)$$

Durante todo o movimento, um campo elétrico atua na partícula, o que provoca uma força que tende a arrancá-la do carrinho.

Dado : coordenadas nos três eixos do campo elétrico: $(0,0,E)$.

Portanto:

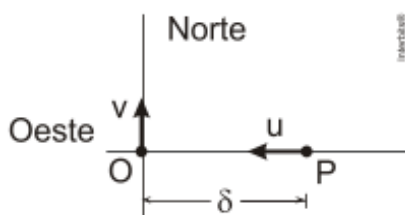
a) mostre que a partícula se move com velocidade escalar constante;

b) determine os instantes em que a força provocada pelo campo elétrico na partícula é ortogonal à sua trajetória;

c) determine as equações dos vetores aceleração tangencial e aceleração normal decompostos nos três eixos;

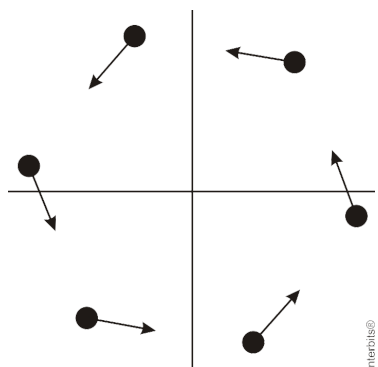
d) supondo que em $t_x = \frac{2\pi}{\omega_1 + \omega_2}$ a partícula se solte do carrinho, determine as acelerações normal e tangencial da partícula imediatamente após t_x .

16. (Ita) Ao passar pelo ponto O, um helicóptero segue na direção norte com velocidade v constante. Nesse momento, um avião passa pelo ponto P, a uma distância δ de O, e voa para o oeste, em direção a O, com velocidade u também constante, conforme mostra a figura. Considerando t o instante em que a distância d entre o helicóptero e o avião for mínima, assinale a alternativa correta.



- A distância percorrida pelo helicóptero no instante em que o avião alcança o ponto O é $6u/v$.
- A distância do helicóptero ao ponto O no instante t é igual a $\delta v / \sqrt{v^2 + u^2}$.
- A distância do avião ao ponto O no instante t é igual a $\delta v^2 / (v^2 + u^2)$.
- O instante t é igual a $\delta v / (v^2 + u^2)$.
- A distância d é igual a $\delta u / \sqrt{v^2 + u^2}$.

17. (Ita) Um problema clássico da cinemática considera objetos que, a partir de certo instante, se movem conjuntamente com velocidade de módulo constante a partir dos vértices de um polígono regular, cada qual apontando a posição instantânea do objeto vizinho em movimento. A figura mostra a configuração desse movimento múltiplo no caso de um hexágono regular.



Considere que o hexágono tinha 10,0 m de lado no instante inicial e que os objetos se movimentam com velocidade de módulo constante de 2,00 m/s. Após quanto tempo estes se encontrarão e qual deverá ser a distância percorrida por cada um dos seis objetos?

- 5,8 s e 11,5 m
- 11,5 s e 5,8 m
- 10,0 s e 20,0 m
- 20,0 s e 10,0 m
- 20,0 s e 40,0 m

18. (Espcex (Aman)) Um bote de assalto deve atravessar um rio de largura igual a 800m, numa trajetória perpendicular à sua margem, num intervalo de tempo de 1 minuto e 40 segundos, com velocidade constante.

Considerando o bote como uma partícula, desprezando a resistência do ar e sendo constante e igual a 6 m/s a velocidade da correnteza do rio em relação à sua margem, o módulo da velocidade do bote em relação à água do rio deverá ser de:

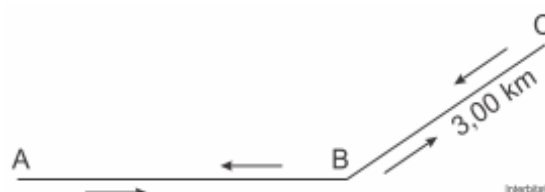


- 4 m/s
- 6 m/s
- 8 m/s
- 10 m/s
- 14 m/s

19. (Ita) Um barco leva 10 horas para subir e 4 horas para descer um mesmo trecho do rio Amazonas, mantendo constante o módulo de sua velocidade em relação à água. Quanto tempo o barco leva para descer esse trecho com os motores desligados?

- 14 horas e 30 minutos
- 13 horas e 20 minutos
- 7 horas e 20 minutos
- 10 horas
- Não é possível resolver porque não foi dada a distância percorrida pelo barco.

20. (Ita) Na figura, um ciclista percorre o trecho AB com velocidade escalar média de 22,5km/h e, em seguida, o trecho BC de 3,00km de extensão. No retorno, ao passar em B, verifica ser de 20,0km/h sua velocidade escalar média no percurso então percorrido, ABCB. Finalmente, ele chega em A perfazendo todo o percurso de ida e volta em 1,00h com velocidade escalar média de 24,0km/h. Assinale o módulo v do vetor velocidade média referente ao percurso ABCB.





- a) $v = 12,0km/h$
- b) $v = 12,00km/h$
- c) $v = 20,0km/h$
- d) $v = 20,00km/h$
- e) $v = 36,0km/h$

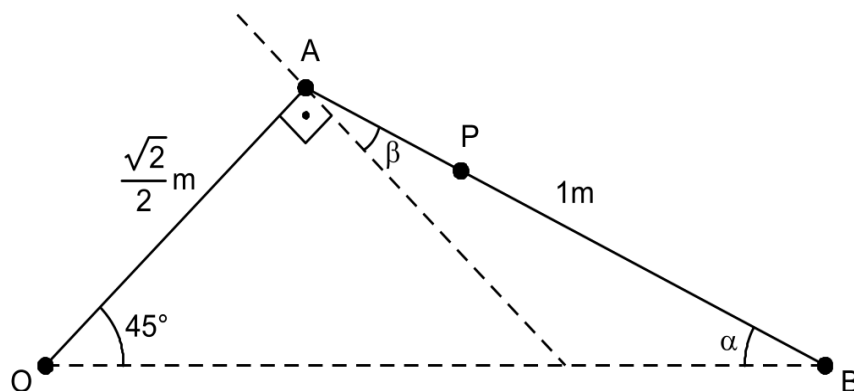


Gabarito

Resposta da questão 1:

[C]

Medida dos ângulos α e β assinalados na figura abaixo:



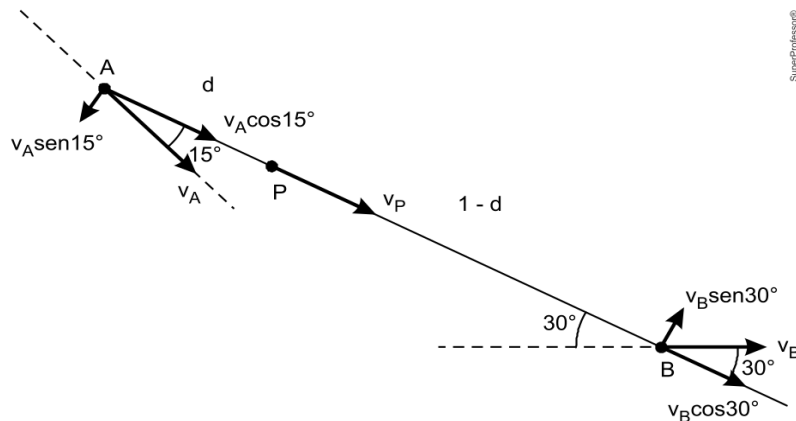
Lei dos senos no $\triangle ABO$:

$$\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\operatorname{sen} \alpha} = \frac{1}{\operatorname{sen} 45^\circ} \Rightarrow \operatorname{sen} \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 30^\circ$$

Soma dos ângulos internos no $\triangle AOB$:

$$45^\circ + 90^\circ + \beta + 30^\circ = 180^\circ \Rightarrow \beta = 15^\circ$$

Na barra AB, temos:



$$\begin{cases} v_A \cos 15^\circ = v_B \cos 30^\circ \\ \omega_A = \omega_B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_A = \frac{v_B \cos 30^\circ}{\cos 15^\circ} \\ \frac{v_A \sin 15^\circ}{d} = \frac{v_B \sin 30^\circ}{1-d} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{v_B \cos 30^\circ \sin 15^\circ}{\cos 15^\circ d} = \frac{v_B \sin 30^\circ}{1-d} \Rightarrow \tan 15^\circ (1-d) = \tan 30^\circ d$$

Como:

$$\begin{aligned} \tan 15^\circ &= \tan(45^\circ - 30^\circ) = \frac{\tan 45^\circ - \tan 30^\circ}{1 + \tan 45^\circ \tan 30^\circ} = \frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 + 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{3 - \sqrt{3}}{3 + \sqrt{3}} \cdot \frac{3 - \sqrt{3}}{3 - \sqrt{3}} = \frac{9 - 6\sqrt{3} + 3}{9 - 3} \\ &= \frac{6(2 - \sqrt{3})}{6} = 2 - \sqrt{3} \end{aligned}$$

Chegamos a:

$$\begin{aligned} (2 - \sqrt{3})(1 - d) &= \frac{\sqrt{3}d}{3} \Rightarrow 6 - 6d - 3\sqrt{3} + 3\sqrt{3}d = \sqrt{3}d \Rightarrow 2\sqrt{3}d - 6d = 3\sqrt{3} - 6 \\ \Rightarrow d(2\sqrt{3} - 6) &= 3\sqrt{3} - 6 \Rightarrow d = \frac{3\sqrt{3} - 6}{2\sqrt{3} - 6} \cdot \frac{2\sqrt{3} + 6}{2\sqrt{3} + 6} = \frac{18 + 18\sqrt{3} - 12\sqrt{3} - 36}{12 - 36} = \frac{6\sqrt{3} - 18}{-24} \\ \therefore d &= \frac{3 - \sqrt{3}}{4} m \end{aligned}$$

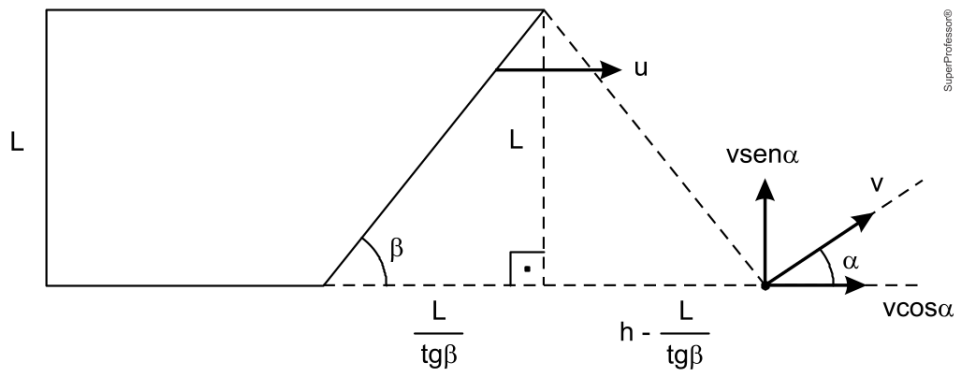
Resposta da questão 2:

[A]

Tempo que o objeto leva para subir uma altura L:

$$\begin{aligned} L &= v \sin \alpha t \\ t &= \frac{L}{v \sin \alpha} \end{aligned}$$

Na direção x:



SuperProfessor®

$$\begin{aligned}
 h - \frac{L}{\operatorname{tg} \beta} &= (u - v \cos \alpha) t \\
 h - \frac{L \cos \beta}{\operatorname{sen} \beta} &= (u - v \cos \alpha) \frac{L}{v \operatorname{sen} \alpha} \\
 h v \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta - L v \operatorname{sen} \alpha \cos \beta &= L u \operatorname{sen} \beta - L v \cos \alpha \operatorname{sen} \beta \\
 \frac{h v \operatorname{sen} \alpha}{L} - \frac{v \operatorname{sen} \alpha \cos \beta}{\operatorname{sen} \beta} &= u - v \cos \alpha \\
 v \left(\cos \alpha - \frac{\operatorname{sen} \alpha \cos \beta}{\operatorname{sen} \beta} + \frac{h \operatorname{sen} \alpha}{L} \right) &= u \\
 v \left(\frac{\operatorname{sen} \beta \cos \alpha - \operatorname{sen} \alpha \cos \beta}{\operatorname{sen} \beta} + \frac{h \operatorname{sen} \alpha}{L} \right) &= u \\
 \therefore v &= \frac{u}{\frac{\operatorname{sen}(\beta - \alpha)}{\operatorname{sen} \beta} + \frac{h \operatorname{sen} \alpha}{L}}
 \end{aligned}$$

Resposta da questão 3:

[E]

Derivando a equação dada, obtemos:

$$\begin{aligned}
 \frac{dx}{dt} &= -\frac{1}{\sqrt{1 - (1 - y)^2}} \cdot (-1) \cdot \frac{dy}{dt} - \frac{1}{2\sqrt{2y - y^2}} \cdot (2 - 2y) \cdot \frac{dy}{dt} \\
 v_x &= \frac{1}{\sqrt{1 - (1 - y)^2}} \cdot v_y + \frac{y - 1}{\sqrt{1 - (1 - y)^2}} \cdot v_y \\
 v_x &= \frac{y}{\sqrt{1 - (1 - y)^2}} \cdot v_y \\
 \frac{v_y}{v_x} &= \frac{\sqrt{1 - (1 - y)^2}}{y}
 \end{aligned}$$

Logo:

$$\begin{aligned}v^2 &= v_x^2 + v_y^2 \\ \left(\frac{v}{v_x}\right)^2 &= 1 + \left(\frac{v_y}{v_x}\right)^2 \\ \left(\frac{v}{v_x}\right)^2 &= 1 + \left(\frac{\sqrt{1 - (1 - y)^2}}{y}\right)^2 \\ \left(\frac{v}{v_x}\right)^2 &= 1 + \frac{1 - (1 - y)^2}{y^2} \\ \left(\frac{v}{v_x}\right)^2 &= \frac{2}{y}\end{aligned}$$

Para $y = 1,62$:

$$\begin{aligned}\left(\frac{v}{v_x}\right)^2 &= \frac{2}{1,62} = \frac{200}{162} = \frac{100}{81} \\ \therefore \frac{v}{v_x} &= \frac{10}{9}\end{aligned}$$

Resposta da questão 4:

[D]

De acordo com as equações dadas, o espelho permanece na direção horizontal e a sua velocidade vertical é de -2 m/s. A partícula descreve uma circunferência, e a sua velocidade vale:

$$\begin{aligned}x_s(t)^2 + y_s(t)^2 &= 1 \\ \begin{cases} v_x(t) = \frac{dx_s}{dt} = \cos(t) \\ v_y(t) = \frac{dy_s}{dt} = -\sin(t) \end{cases} &\Rightarrow v(t) = \sqrt{\cos^2(t) + [-\sin^2(t)]} = 1 \text{ m/s}\end{aligned}$$

A velocidade da imagem é dada por:

$$v_{\text{img}} = 2v_{\text{esp}}^y - v_s^y$$

E o seu valor máximo vale:

$$\begin{aligned}v_{\text{img}}^{\text{máx}} &= 2 \cdot 2 - (-1) \\ \therefore v_{\text{img}}^{\text{máx}} &= 5 \text{ m/s}\end{aligned}$$

Resposta da questão 5:

[B]

A velocidade da partícula é dada por:

$$\begin{cases} v_x = \frac{dt^2}{dt} = 2t \\ v_y = \frac{d(t-1)^2}{dt} = 2(t-1) \end{cases} \Rightarrow v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{4t^2 + 4(t^2 - 2t + 1)} = 2\sqrt{2t^2 - 2t + 1}$$

Para que ela seja mínima, devemos ter $\frac{dv}{dt} = 0$. Logo:

$$\frac{d(2\sqrt{2t^2 - 2t + 1})}{dt} = 0 \Rightarrow 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{2t^2 - 2t + 1}} \cdot (4t - 2) = 0 \Rightarrow 4t - 2 = 0$$

$$\therefore t = 0,5s$$

Resposta da questão 6:

[D]

Instante do choque ($S_A = S_B$):

$$\begin{cases} x_A = x_B \\ y_A = y_B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t^2 - 9t + 13 = -2t + 3 \\ t - 2 = t^2 - 7t + 13 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t^2 - 7t + 10 = 0 \\ t^2 - 8t + 15 = 0 \end{cases}$$

O único instante que satisfaz ambas as equações é $t = 5$ s.

Velocidades no instante de encontro:

$$\begin{cases} v_A = \frac{dS_A}{dt} = (2t - 9)\hat{i} + \hat{j} \\ v_B = \frac{dS_B}{dt} = -2\hat{i} + (2t - 7)\hat{j} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_A = (\hat{i} + \hat{j})m/s \\ v_B = (-2\hat{i} + 3\hat{j})m/s \end{cases}$$

Como as partículas se chocam elasticamente, o módulo da soma dos vetores velocidade é dado por:

$$\begin{aligned} |\vec{v}_A + \vec{v}_B| &= \sqrt{(\hat{i} + \hat{j}) + (-2\hat{i} + 3\hat{j})} \\ |\vec{v}_A + \vec{v}_B| &= \sqrt{-\hat{i} + 4\hat{j}} = \sqrt{(-1)^2 + 4^2} \\ \therefore |\vec{v}_A + \vec{v}_B| &= \sqrt{17}m/s \end{aligned}$$

Resposta da questão 7:

[D]

Posições da fonte (A) e do observador (B):

$$\begin{aligned} R_A &= (\cos(t) + \log(1 + t), 2t + 3) \\ R_B &= (\log(1 + t) - \sin(t), 2t - 1) \end{aligned}$$

Posição relativa entre fonte e observador:

$$r = R_A - R_B = (\cos(t) + \sin(t), 4)$$



Velocidade relativa entre fonte e observador:

$$r = RA - RB = (\cos(t) + \sin(t), 4)$$

$$\vec{v} = \frac{dr}{dt} = (-\sin(t) + \cos(t), 0)$$

Para que a frequência percebida não sofra alteração devido ao efeito Doppler, podemos ter:

I. Velocidade relativa nula:

$$-\sin(t) + \cos(t) = 0$$

$$\tan(t) = 1$$

$$\therefore t = \frac{\pi}{4} + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$$

II. Velocidade e posição ortogonais:

$$r \cdot v = 0$$

$$(\cos(t) + \sin(t), 4) \cdot (-\sin(t) + \cos(t), 0) = 0$$

$$\cos^2(t) - \sin^2(t) = 0$$

$$1 - 2\sin^2(t) = 0$$

$$\sin(t) = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\therefore t = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, (k \in \mathbb{Z})$$

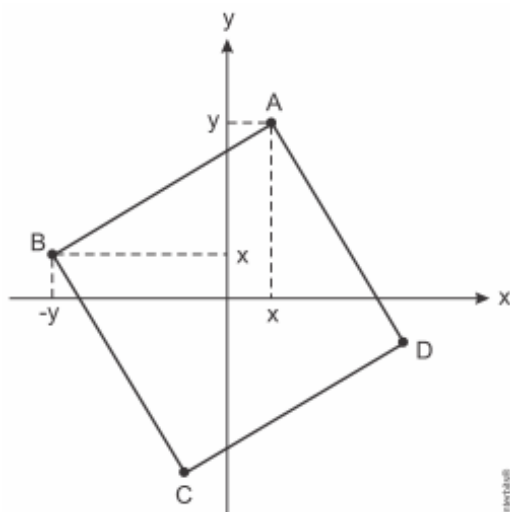
Para $k = 1$, obtemos:

$$t = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{4}$$

Resposta da questão 8:

[C]

Para a situação a seguir:



Temos as coordenadas:



$A(x, y)$ e $B(-y, x)$

E o vetor AB é:

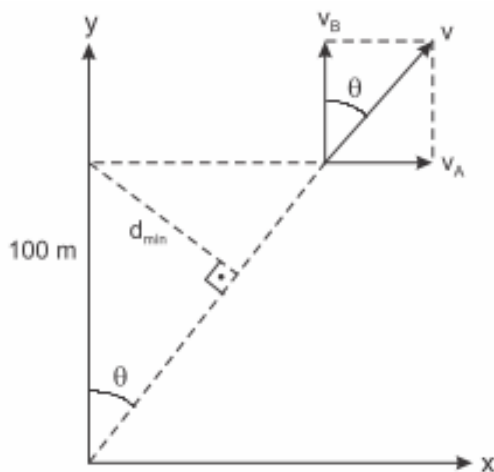
$$AB = (-y - x, x - y)$$

Sendo assim, a tangente procurada vale:

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{x - y}{-y - x} = -\frac{x - y}{x + y}$$

Resposta da questão 9:

a) Analisando a situação, temos:



$$\operatorname{tg} \theta = \frac{v_A}{v_B} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{\operatorname{sen} \theta}{\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 \theta}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \operatorname{sen} \theta = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

Logo:

$$\operatorname{sen} \theta = \frac{d_{\min}}{D} \Rightarrow \frac{\sqrt{5}}{5} = \frac{d_{\min}}{100}$$

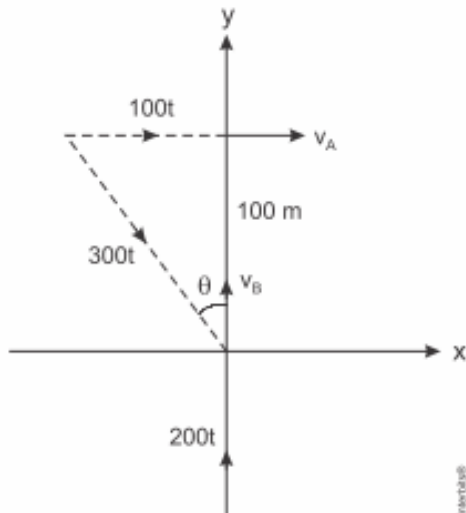
$$\therefore d_{\min} = 20\sqrt{5}m$$

b) Considerando a fonte em repouso:

$$f_{fap} = f_{fonte} \left(\frac{v_{som} + v_B}{v_{som}} \right) = 1000 \left(\frac{300 + 200}{300} \right)$$

$$\therefore f_{ap} \cong 1667Hz$$

Com a fonte em movimento, teríamos:



$$(300t)^2 = (100t)^2 + 100^2 \Rightarrow t = \frac{\sqrt{2}}{4} s$$

$$\sin \theta = \frac{100t}{300t} = \frac{1}{3} \Rightarrow \cos \theta = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

Logo:

$$f_{ap} = f_{fonte} \left(\frac{v_{som} + v_B \cos \theta}{v_{som} - v_A \sin \theta} \right) = 1000 \left(\frac{300 + 200 \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3}}{300 - 100 \cdot \frac{1}{3}} \right)$$

$$\therefore f_{ap} \cong 1832 \text{ Hz}$$

Resposta da questão 10:

[A]

Velocidade e aceleração angulares:

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = \frac{dt^2}{dt} \Rightarrow \omega = 2 \text{ rad/s}$$

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d(2t)}{dt} \Rightarrow \alpha = 2 \text{ rad/s}^2$$

Módulos da aceleração centrípeta e tangencial para $t = 1 \text{ s}$:

$$|a_{cp}| = \omega^2 R = (2.1)^2 \cdot 0,5 \Rightarrow |a_{cp}| = 2 \text{ m/s}^2$$

$$|a_t| = \alpha R = 2 \cdot 0,5 \Rightarrow |a_t| = 1 \text{ m/s}^2$$

Portanto:



$$|\vec{a}| = \sqrt{|a_{cp}|^2 + |a_t|^2} = \sqrt{2^2 + 1^2}$$

$$\therefore |a| = \sqrt{5} m/s^2$$

Resposta da questão 11:

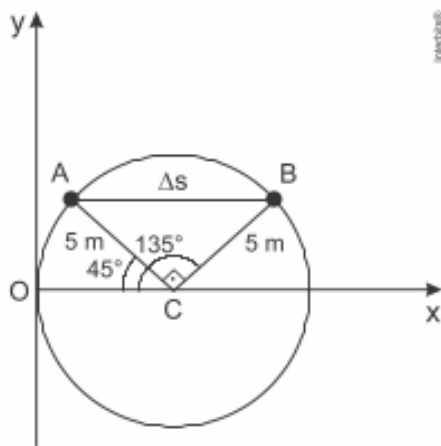
[E]

Se em 20s a partícula percorre 360° , os ângulos percorridos pelos instantes dados são iguais a:

$$2,5s \rightarrow \frac{2,5}{20} \cdot 360^\circ = 45^\circ$$

$$7,5s \rightarrow \frac{7,5}{20} \cdot 360^\circ = 135^\circ$$

Sendo assim, temos as posições:



Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo ABC, obtemos:

$$\Delta s^2 = 5^2 + 5^2 \Rightarrow \Delta s = 5\sqrt{2}m$$

Portanto, o módulo do vetor velocidade média da partícula entre os instantes dados vale:

$$|\vec{v}| = \frac{5\sqrt{2}}{7,5 - 2,5}$$

$$\therefore |v| = \sqrt{2} m/s$$

Resposta da questão 12:

[E]

Posição da partícula A:

Em X:

$$\begin{aligned}v_{A_x}(t) &= \int \cos t dt = \sin t + k_1 \\v_{A_x}(0) &= 0 \Rightarrow k_1 = 0 \\s_{A_x}(t) &= \int \sin t dt = -\cos t + k_2 \\s_{A_x}(0) &= 0 \Rightarrow k_2 = 1 \\\therefore s_{A_x}(t) &= 1 - \cos t\end{aligned}$$

Em y:

$$\begin{aligned}v_{A_y}(t) &= \int \sin t dt = -\cos t + k_3 \\v_{A_y}(0) &= 0 \Rightarrow k_3 = 1 \\s_{A_y}(t) &= \int (1 - \cos t) dt = t - \sin t + k_4 \\s_{A_y}(0) &= 0 \Rightarrow k_4 = 0 \\\therefore s_{A_y}(t) &= t - \sin t\end{aligned}$$

Logo: $SA(t) = (1 - \cos t, t - \sin t)$.

Analogamente, para a partícula B, obtemos:

$$SB_B(t) = (\cos t - 1, \cos t - \sin t + t - 1).$$

A distância entre as partículas é dada por:

$$\begin{aligned}\vec{s}_{A,B}(t) &= \left| \vec{s}_A - \vec{s}_B \right| = \left| (2 - 2\cos t, 1 - \cos t) \right| \\\vec{S}_{A,B}(t) &= \sqrt{(2 - 2\cos t)^2 + (1 - \cos t)^2} \\\vec{S}_{A,B}(t) &= \left| \sqrt{5}(1 - \cos t) \right|\end{aligned}$$

A força de repulsão entre as cargas será mínima quando a distância entre elas for máxima. E $\left| S_{A,B}(t) \right|$ será máxima para $\cos t = -1$, ou seja, $t = \pi + 2\pi k (k \in \mathbb{Z})$.

Dado o intervalo do enunciado, podemos concluir que:

$$t_{\min} = \pi$$

Resposta da questão 13:

[D]

Velocidade da Fragata Independência (em nós):

$$V_I = (15\sqrt{2} - 2)\hat{y}$$

Velocidade da Fragata Rademaker (em nós):

$$\text{Em } X: 20\cos 45^\circ \hat{x} = 10\sqrt{2}\hat{x}$$

$$\text{Em } y: (20\sin 45^\circ - 2)\hat{y} = (10\sqrt{2} - 2)\hat{y}$$

$$\text{Logo: } V_R = 10\sqrt{2}\hat{x} + (10\sqrt{2} - 2)\hat{y}$$

Velocidade relativa da Fragata Independência em relação à Fragata Rademaker (em nós):

$$V = V_I - V_R$$

$$V = (15\sqrt{2} - 2)\hat{y} - [10\sqrt{2}\hat{x} + (10\sqrt{2} - 2)\hat{y}]$$

$$V = -10\sqrt{2}\hat{x} + 5\sqrt{2}\hat{y}$$

Portanto, o módulo desta velocidade é:

$$\begin{aligned} |\vec{V}| &= \sqrt{(-10\sqrt{2})^2 + (5\sqrt{2})^2} = \sqrt{100 \cdot 2 + 25 \cdot 2} = \sqrt{250} \\ \therefore |\vec{V}| &= 15,8 \text{ nós} \end{aligned}$$

Resposta da questão 14:

[D]

Pelo enunciado, temos que:

$$r_1 = (3\cos t, 4\sin t) \text{ e } r_2 = (5\cos t, 5\sin t)$$

O movimento do observador 2 descrito pelo observador 1 é dado por:

$$\underline{r} = r_2 - r_1$$

$$\underline{r} = (5\cos t - 3\cos t, 5\sin t - 4\sin t)$$

$$r = (2\cos t, \sin t)$$

Onde $x = 2\cos t$ e $y = \sin t$, logo:

$$\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$$

Resposta da questão 15:

a) Derivando as equações de posição, obtemos:

$$v_x(t) = \frac{dx(t)}{dt} = k\cos(\omega_1 t) - k\cos(\omega_2 t)$$

$$v_y(t) = \frac{dy(t)}{dt} = -k\sin(\omega_1 t) - k\sin(\omega_2 t)$$

$$v_z(t) = \frac{dz(t)}{dt} = 2k\cos\left[\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\right)t\right]$$

Logo:

$$v^2(t) = v_x^2(t) + v_y^2(t) + v_z^2(t)$$

$$v^2(t) = k^2 [\cos^2(\omega_1 t) - 2\cos(\omega_1 t)\cos(\omega_2 t) + \cos^2(\omega_2 t) + \sin^2(\omega_1 t) + 2\sin(\omega_1 t)\sin(\omega_2 t) + \sin^2(\omega_2 t) + 4\cos^2\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t\right)]$$

Utilizando a relação fundamental e sabendo que:

$$\cos^2 \frac{\theta}{2} = \frac{\cos \theta + 1}{2} \Rightarrow \cos^2 \left[\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \right) t \right] = \frac{\cos[(\omega_1 + \omega_2)t] + 1}{2}$$

Chegamos a:

$$v^2(t) = 2k^2 [1 - \cos[(\omega_1 + \omega_2)t] + \cos[(\omega_1 + \omega_2)t] + 1] = 4k^2$$

$$\therefore v(t) = 2k$$

b) Para que a força elétrica seja ortogonal à trajetória, devemos ter que:

$$F \cdot v = 0 \Rightarrow (0, 0, QE)(v_x, v_y, v_z) = 0 \Rightarrow QE v_z = 0 \Rightarrow v_z = 0$$

$$2k \cos \left[\left| \left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \right) t \right| \right] = 0 \Rightarrow \left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \right) t = \frac{\pi}{2} + n\pi; n \in \mathbb{N}$$

$$\therefore t = \frac{\pi + 2n\pi}{\omega_1 + \omega_2}; n \in \mathbb{N}$$

c) $a(t) = a_t(t) + a_n(t)$

Como $v(t)$ é constante, $\vec{a}_t(t) = \vec{0}$.

E $a_n(t) = (a_x, a_y, a_z)$, onde:

$$a_x(t) = \frac{dv_x(t)}{dt} = -k\omega_1 \sin(\omega_1 t) + k\omega_2 \sin(\omega_2 t)$$

$$a_y(t) = \frac{dv_y(t)}{dt} = -k\omega_1 \cos(\omega_1 t) - k\omega_2 \cos(\omega_2 t)$$

$$a_z(t) = \frac{dv_z(t)}{dt} = -k(\omega_1 + \omega_2) \sin \left[\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \right) t \right]$$

d) Para $t = \frac{2\pi}{\omega_1 + \omega_2}$, vem:



$$\begin{aligned}
 v_x(t) &= k \cos\left(\frac{2\pi\omega_1}{\omega_1 + \omega_2}\right) - k \cos\left(\frac{2\pi\omega_2}{\omega_1 + \omega_2}\right) = \\
 &= -2k \sin\left[\frac{2\pi}{\omega_1 + \omega_2}\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\right)\right] \sin\left[\frac{2\pi}{\omega_1 + \omega_2}\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}\right)\right] = 0 \\
 v_y(t) &= -k \sin\left(\frac{2\pi\omega_1}{\omega_1 + \omega_2}\right) - k \sin\left(\frac{2\pi\omega_2}{\omega_1 + \omega_2}\right) = \\
 &= -2k \sin\left[\frac{2\pi}{\omega_1 + \omega_2}\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\right)\right] \cos\left[\frac{2\pi}{\omega_1 + \omega_2}\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}\right)\right] = 0 \\
 v_z(t) &= 2k \cos\left[\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\right) \frac{2\pi}{\omega_1 + \omega_2}\right] = -2k
 \end{aligned}$$

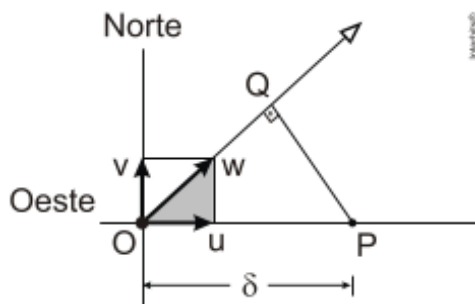
Sendo assim, após a partícula se soltar, teremos:

$$v = (0, 0, v_z) \text{ e } \vec{a} = \left(0, 0, \frac{QE}{m}\right)$$

$$\therefore a_n = 0 \text{ e } \vec{a}_t = \left(0, 0, \frac{QE}{m}\right)$$

Resposta da questão 16:

[C]



A figura mostra a trajetória seguida pelo helicóptero em relação ao avião. Note que os triângulos, sombreado e OPQ, são semelhantes, portanto:

$$\frac{OQ}{\delta} = \frac{u}{w} \rightarrow OQ = \frac{\delta u}{w}$$

Tempo decorrido até o instante em que a distância é mínima $t = \frac{OQ}{w} = \frac{\delta u}{w^2}$

Durante o tempo acima o avião voa $\Delta S = ut = \frac{\delta u^2}{w^2}$

Portanto, a distância do avião ao ponto O será:

$$x = \delta - \frac{\delta u^2}{w^2} = \frac{\delta(w^2 - u^2)}{w^2} = \frac{\delta v^2}{u^2 + v^2}$$



Resposta da questão 17:

[C]

Dados: $R = L = 10,0 \text{ m}$; $v = 2,00 \text{ m/s}$.

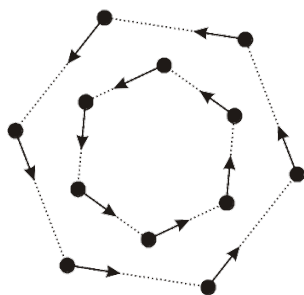


Fig. 1

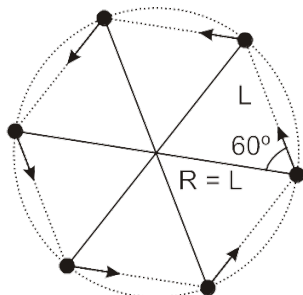


Fig. 2

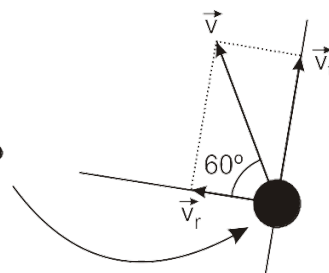


Fig. 3

Como a velocidade vetorial instantânea de cada objeto tem módulo constante e está sempre apontando a posição do objeto vizinho, como mostrado na figura dada, esses objetos descreverão trajetórias que vão se fechando, de modo que eles ocupem sempre os vértices de hexágonos de lado cada vez menor (Fig 1), até que ocorra o colapso (encontros) no centro da circunferência circunscrita a cada um desses hexágonos.

A Fig 3 mostra um detalhe de um desses objetos no instante inicial. A velocidade do objeto está

decomposta nas direções tangencial ($\vec{v}_t$) e radial ($\vec{v}_r$). Como os objetos estão sempre nos vértices de um hexágono, essas componentes têm módulos constantes, sendo:

$$v_r = v \cos 60^\circ = 2,00 \left(\frac{1}{2} \right) \Rightarrow v_r = 1,00 \text{ m/s}.$$

$$v_t = v \sin 60^\circ = 2,00 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \Rightarrow v_t = 1,00 \sqrt{3} \text{ m/s}.$$

Se o encontro ocorre no centro da circunferência circunscrita, cada objeto percorrerá radialmente a distância igual ao raio da circunscrita (R) no instante inicial, com a velocidade radial ($\vec{v}_r$) e se encontrarão após um intervalo de tempo Δt . Assim:

$$v_r = \frac{R}{\Delta t} \Rightarrow 1,00 = \frac{10,0}{\Delta t} \Rightarrow \Delta t = 10,0 \text{ s}.$$

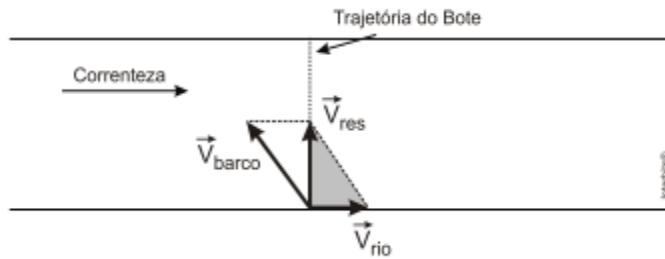
Se cada objeto tem velocidade constante, em módulo, a distância percorrida por cada um dos seis objetos será:

$$D = v \Delta t = 2,00 (10,0) \Rightarrow D = 20,0 \text{ m}.$$

Resposta da questão 18:

[D]

A figura mostra as velocidades do barco em relação ao rio, do rio em relação à margem e a resultante das duas.



$$V_{\text{Resultante}} = \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{800}{100} = 8,0 \text{ m/s}$$

Aplicando Pitágoras ao triângulo sombreado, vem:

$$V_B^2 = 8^2 + 6^2 = 100 \rightarrow V_B = 10 \text{ m/s}$$

Resposta da questão 19:

[B]

Como todos os movimentos são realizados com velocidade constante tem-se $v = D S / D t$

Identificando a velocidade do barco em relação à água como v e a velocidade das águas do rio como u temos:

Na subida com o motor ligado

$$v - u = D S / 10 \rightarrow 10 \cdot v - 10 \cdot u = D S$$

Na descida com o motor ligado

$$v + u = D S / 4 \rightarrow 4 \cdot v + 4 \cdot u = D S$$

Em função de $D S$ temos:

$$40 \cdot v - 40 \cdot u = 4 \cdot D S$$

$$40 \cdot v + 40 \cdot u = 10 \cdot D S$$

Somadas as expressões

$$80 \cdot v = 14 \cdot D S \rightarrow v = \frac{14 \cdot D S}{80}$$

$$4 \cdot v + 4 \cdot u = D S \rightarrow 4 \cdot \left(\frac{14 \cdot D S}{80} \right) + 4 \cdot u = D S \rightarrow \frac{14 \cdot D S}{20} + 4 \cdot u = D S \rightarrow 4 \cdot u = D S - \frac{14 \cdot D S}{20} = \frac{6 \cdot D S}{20} \rightarrow u = \frac{6 \cdot D S}{80}$$

Na descida com o motor desligado:

$$u = D S / T \rightarrow T = D S / u = \frac{D S}{\frac{6 \cdot D S}{80}} = \frac{80}{6} = 13 \text{ h } 20 \text{ min}$$

Resposta da questão 20:

[A]

Considerando o deslocamento em todo o trajeto $\Delta S = v \cdot \Delta t = 24 \cdot 1 = 24 \text{ km}$

A distância AB pode ser calculada da seguinte forma:

$$\Delta S = 2 \cdot AB + 2 \cdot BC \rightarrow \frac{\Delta S}{2} = AB + BC \rightarrow AB = \frac{\Delta S}{2} - BC = \frac{24}{2} - 3 = 12 - 3 = 9km$$

Cálculo do tempo total gasto no trecho ABCB.

$$v = \frac{\Delta S}{\Delta t} \rightarrow \Delta t = \frac{\Delta S}{v} = \frac{9 + 6}{20} = \frac{15}{20} = 0,75h$$

O módulo da velocidade vetorial média é $\frac{9}{0,75} = 12km/h$.